

DOI: 10.3901/JME.2021.13.144

大挠度欧拉梁三参数曲率模型及其在平面柔顺机构中的应用*

谢 丹¹ 黄勇刚²

(1. 西南大学工程技术学院 重庆 400715;

2. 重庆工商大学制造装备机构设计与控制重庆市重点实验室 重庆 400067)

摘要: 提出了一种基于二次 Bernstein 多项式的平面大挠度欧拉梁三参数曲率模型。三个曲率参数视为描述梁平衡位形的广义坐标,应用微分几何曲线论基本定理建立梁弯曲的转角方程和积分形式的挠曲线方程,基于虚功原理导出了以三个曲率参数为基本未知量的平面欧拉梁大挠度弯曲的几何非线性平衡方程,并给出了采用高斯积分近似以及牛顿-拉弗森迭代法的数值计算格式。通过末端载荷状态下的悬臂直梁、曲梁的大挠度变形计算,以及对一种典型的平面曲柄摇杆柔顺机构的详细建模分析,验证了三参数曲率模型方法的高精度、高计算效率和对曲梁的通用性以及变形度量呈现的直观性和丰富性,结果表明该方法在柔顺机构设计和分析中具有明显优势和广阔的应用前景。

关键词: 欧拉梁; 大挠度; 曲率; 参数化模型; 平面柔顺机构

中图分类号: TH112

Novel Model with Three Curvature Variables for Euler Beam under Large Deflection and Its Application in Planar Compliant Mechanisms

XIE Dan¹ HUANG Yonggang²

(1. College of Engineering and Technology, Southwest University, Chongqing 400715;

2. Chongqing Municipal Key Laboratory of Mechanism Design and Control for Manufacturing Equipment, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067)

Abstract: A novel model with three curvature variables for Euler beam under large deflection is proposed based on the quadratic Bernstein polynomials. The three curvature variables are considered as generalized coordinates for bending equilibrium configuration of the beam. Then, the rotation equation and the deflection curve equation in integral form are formulated using the curve theory of differential geometry. By the virtual work principle, the nonlinear geometric equilibrium equation of Euler beam is derived in which three curvature parameters are unknown variables. At the same time the numerical formulation of the equilibrium equation is shown using Gaussian quadrature and Newton-Raphson iteration method. Finally, through the typical numerical examples of straight and curved cantilever beams and the partially compliant crank rocker mechanism, the curvature model proposed above is fully proved to have high accuracy, high calculation efficiency, general applicability to curved beams and intuitive and rich expressions for deformation measurements. The calculation and analysis results show the obvious advantages and application prospects of the proposed method in the design and analysis of compliant mechanisms.

Key words: Euler beam; large deflection; curvature; parametric model; planar compliant mechanisms

0 前言

以欧拉梁为柔性构件的柔顺机构,工作过程常

伴随着复杂的大挠度弯曲,由于其强几何非线性特点,导致性能分析和设计变得异常困难。建立具有高精度、高计算效率、直曲梁通用并便于柔顺机构应用的大挠度欧拉梁几何非线性分析模型,至今仍是柔顺机构学中的一大难点和研究热点。

根据建模和求解理论,此问题的研究方法可归

* 国家自然科学基金资助项目(51805448)。20200728 收到初稿,2021109 收到修改稿

为两大类: 基于连续模型的方法和基于离散模型的方法。连续模型方法是在梁的静力变形微分方程的基础上进行整体求解, 或得到精确解析解, 如椭圆积分法^[1-2]、椭圆函数法^[3]; 或得到近似解析解, 如梁约束模型方法^[4]; 或得到数值解, 如打靶法^[5]、Adomian 分解法^[6]和直接数值积分法^[7]等。而基于离散模型的方法是将梁进行不同方式的几何离散或等效, 将具有无穷多自由度的连续模型转化为只有有限自由度的离散模型。如典型的 $3R$ ^[8]、 $2R$ ^[9]、 PR ^[10]等多伪刚体模型, 将梁等效为运动副带弹性元件的多自由度刚体串联机构进行建模和求解。而链式算法将梁截断为多个短梁, 并将后一短梁视为固定在前一短梁末端的悬臂梁, 通过逐段近似和组装实现大挠度的计算, 如链式约束梁模型^[11-12]和链式常曲率段模型^[13]。离散模型方法经典和标准的算法是有限差分法和有限元方法。特别是有限元方法, 已有便于建模和分析应用的成熟商用软件, 并常作为其他建模方法的对比手段。

根据求解结果的形式, 又可将目前文献中的方法分成: 离散数值解法、解析解法以及参数化模型法。离散数值解法所得结果是大量的离散点数据, 如有限元法以及基于连续模型的数值解法。解析解法则包括前述连续模型的精确解析解法和近似解析解法, 其可得到整体的解析解。而链式类算法可得到分段解析解。参数化模型方法除了基于等效离散的多伪刚体模型外, 还有一类基于对大挠度梁变形挠曲线或曲率的整体逼近方法。如动态样条法^[14]应用 Bezier 曲线逼近梁的挠曲线, Bezier 曲线的控制点坐标作为基本待定参数。光滑曲率模型^[15]则基于悬臂梁的变形曲率光滑性假设, 采用不高于二次的 Legendre 多项式基函数的线性组合来逼近变形曲率, 多项式的系数为基本待定参数。

欧拉梁大挠度问题的研究方法文献较多^[16-17], 但现有方法各具优劣, 一般都不能兼顾计算精度、计算效率、直曲梁通用、建模简便以及结果呈现的直观和丰富。为了解决此问题, 本文尝试采用三个待定的曲率参数将二次 Bernstein 多项式基函数线性组合, 用以逼近大挠度欧拉梁弯曲变形曲率。系统分析了由三个曲率参数确定的梁变形挠曲线及转角, 以及可由其直观、简便得出的丰富变形度量和变形特征。基于虚功原理建立了平面欧拉梁大挠度变形的几何非线性平衡方程, 给出了采用高斯积分近似以及牛顿-拉弗森迭代法的数值计算格式。为了验证所提方法的高精度、高效率、直曲通用以及应用的简便性和对柔性构件变形特征呈现的直观性和

丰富性, 对末端载荷状态下的悬臂直梁和曲梁进行了大挠度弯曲计算, 并对一种典型的平面曲柄摇杆柔顺机构的弹性运动学特性以及柔顺摇杆的变形特征进行了详细分析。

1 三参数二次 Bernstein 多项式曲率与平面挠曲线

根据欧拉梁理论, 对平面均质细长梁, 忽略拉压和剪切变形, 其挠曲线上任一点的曲率与该处所受弯矩成正比。曲率与坐标系无关, 是梁弯曲变形的核心。以力学视角来看是弯曲应变度量, 决定了梁弯曲的应力; 而以微分几何观点来看, 决定了挠曲线几何形状。

1.1 二次 Bernstein 多项式曲率及其对应平面挠曲线方程

Bernstein 多项式基函数具有诸多优良性质, 早已得到广泛应用^[18]。对二次 Bernstein 多项式, 其在区间 $[0, 1]$ 上三个线性无关基函数如下

$$\begin{cases} B_{0,2}(t)=(1-t)^2 \\ B_{1,2}(t)=2(1-t)t, \quad t \in [0,1] \\ B_{2,2}(t)=t^2 \end{cases} \quad (1)$$

Bernstein 多项式基函数具有如下端点性质

$$B_{i,2}(0)=\begin{cases} 1, i=0 \\ 0, i \neq 0 \end{cases} \quad B_{i,2}(1)=\begin{cases} 1, i=2 \\ 0, i \neq 2 \end{cases} \quad (2)$$

和单位分解性

$$B_{0,2}(t)+B_{1,2}(t)+B_{2,2}(t)=1 \quad (3)$$

以及非负性

$$B_{i,2}(t) \geq 0 \quad (4)$$

与平面运动的三个自由度对应, 引入三个曲率参数 $\mathbf{q}=[q_0, q_1, q_2]^T$ 作为描述梁变形运动的广义坐标, 将式(1)的三个基函数线性组合, 用以逼近长为 L 的平面定长均质欧拉梁弯曲变形曲率, 可得三参数二次 Bernstein 多项式曲率表达式如下

$$k(\mathbf{q}, s) = \sum_{i=0}^2 q_i B_{i,2}\left(\frac{s}{L}\right) = q_0\left(1-\frac{s}{L}\right)^2 + 2q_1\frac{s}{L}\left(1-\frac{s}{L}\right) + q_2\left(\frac{s}{L}\right)^2, s \in [0, L] \quad (5)$$

按如下方式建立坐标系: 梁的挠曲线起点为坐标原点, 起点切线指向弧长 s 增大方向为 x 轴正向, x 轴逆时针旋转 90° 为 y 轴正向。式(5)表示相对曲率, 即逆时针弯曲时为正, 反之为负, 则根据微分几何

曲线论基本定理^[19], 由 $k(\mathbf{q}, s)$ 决定的平面挠曲线转角方程和坐标方程分别为

$$\theta(\mathbf{q}, s) = \int_0^s k(\mathbf{q}, \eta) d\eta = q_0 s + \frac{1}{L}(q_1 - q_0)s^2 + \frac{1}{3L^2}(q_2 - 2q_1 + q_0)s^3 \quad (6)$$

$$\begin{cases} x(\mathbf{q}, s) = \int_0^s \cos[\theta(\mathbf{q}, \eta)] d\eta \\ y(\mathbf{q}, s) = \int_0^s \sin[\theta(\mathbf{q}, \eta)] d\eta \end{cases} \quad \eta \in [0, s] \quad (7)$$

1.2 三曲率参数几何意义及其对应的挠曲线性质

性质 1: 三曲率参数的退化性质。

由式(3)易知, 当 $q_0 = q_1 = q_2$ 时, $k(\mathbf{q}, s)$ 退化为常数。而由式(5)的二次项系数易知, $q_1 - q_0 = q_2 - q_1 \neq 0$, 即三个曲率参数成等差数列时, $k(\mathbf{q}, s)$ 退化为一次函数。

性质 2: 三曲率参数的端点插值性。

由式(2)及式(5)可得第一曲率参数 q_0 和第三曲率参数 q_2 分别是挠曲线首末端点的曲率, 即

$$\begin{cases} k(\mathbf{q}, 0) = q_0 \\ k(\mathbf{q}, L) = q_2 \end{cases} \quad (8)$$

性质 3: 曲率函数单调性与曲率参数单调性一致。

根据式(5)对弧长求导的零点是否在 $(0, L)$ 区间, 易判断 $k(\mathbf{q}, s)$ 在 $[0, L]$ 上的单调性与曲率参数的单调性相关。且根据端点曲率对弧长导数的正负性可证明 $k(\mathbf{q}, s)$ 的单调性与三个曲率参数的单调性一致。

性质 4: 三曲率参数的最大和最小值决定了梁弯曲曲率的上下界和最大弯曲应力上界。

由式(3)的单位分解性和式(4)的非负性, 易得

$$\min_{0 \leq i \leq 2} (q_i) \leq k(\mathbf{q}, s) \leq \max_{0 \leq i \leq 2} (q_i) \quad (9)$$

即三个曲率参数的最大和最小值确定了梁弯曲曲率的上下界。

因此, 梁弯曲的绝对值最大曲率满足

$$|k(\mathbf{q}, s)|_{\max} \leq \max_{0 \leq i \leq 2} |q_i| \quad (10)$$

即梁的最大弯曲应力上界由三个曲率参数绝对值的最大值决定。

性质 5: 挠曲线拐点及位置。

$k(\mathbf{q}, s)$ 最多有两个零点如式(11), 因此其确定的挠曲线最多有两个拐点。

$$s_{1,2} = \frac{q_0 - q_1 \pm \sqrt{q_1^2 - q_0 q_2}}{q_2 - 2q_1 + q_0} \cdot L \quad (11)$$

根据 Bernstein 多项式的变差缩减性^[18], 如果三个曲率参数全为正或全为负, 则挠曲线无拐点。如果三个曲率参数正负号仅变化一次, 则肯定有一个拐点。如果三个曲率参数正负号变化两次, 则最多有两个拐点, 具体的拐点数和位置由式(11)计算的弧长是否在 $[0, L]$ 区间确定。

性质 6: 挠曲线末端转角和转角极值及其位置。

挠曲线最大转角由拐点处转角和末端转角确定。根据式(6)易得挠曲线末端转角为

$$\theta(\mathbf{q}, L) = \frac{L}{3}(q_0 + q_1 + q_2) \quad (12)$$

由上分析可知, 二次 Bernstein 多项式的三个曲率参数具有明确的几何性质, 可方便、直观地给出挠曲线的丰富变形特征信息。

2 大挠度平衡方程及其数值计算格式

2.1 基于虚功原理的平衡方程

假设梁的长度、弹性模量、截面惯性矩分别为 L 、 E 、 I , 由前述三参数曲率模型, 设梁初始曲率参数 $\mathbf{q}_e = [q_{e0}, q_{e1}, q_{e2}]^T$, 则梁的弯曲应变能为

$$U(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} EI \int_0^L [k(\mathbf{q}, s) - k(\mathbf{q}_e, s)]^2 ds \quad (13)$$

将式(5)代入上式并对三个曲率参数分别求偏导数, 可得广义弹性恢复力表达式为

$$\mathbf{F}_q = -\nabla_{\mathbf{q}} [U(\mathbf{q})] = -EIL \mathbf{K}_e (\mathbf{q} - \mathbf{q}_e) \quad (14)$$

其中广义刚度矩阵

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/10 & 1/30 \\ 1/10 & 2/15 & 1/10 \\ 1/30 & 1/10 & 1/5 \end{bmatrix} \quad (15)$$

由挠曲线方程式(7)和末端转角公式(12), 可得三个曲率参数为广义坐标的梁末端雅可比矩阵为

$$\begin{cases} \mathbf{J}_x(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(\mathbf{q}, L)}{\partial q_0} & \frac{\partial x(\mathbf{q}, L)}{\partial q_1} & \frac{\partial x(\mathbf{q}, L)}{\partial q_2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_y(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y(\mathbf{q}, L)}{\partial q_0} & \frac{\partial y(\mathbf{q}, L)}{\partial q_1} & \frac{\partial y(\mathbf{q}, L)}{\partial q_2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_\theta = \begin{bmatrix} \frac{L}{3} & \frac{L}{3} & \frac{L}{3} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (16)$$

因此, 梁末端纵向力 \mathbf{F}_x 、横向力 \mathbf{F}_y 和弯矩 \mathbf{M} 对应三个曲率广义坐标的广义外力为

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_x \mathbf{J}_x^T(\mathbf{q}) + \mathbf{F}_y \mathbf{J}_y^T(\mathbf{q}) + \mathbf{M} \mathbf{J}_\theta^T \quad (17)$$

根据虚功原理, 悬臂梁在末端载荷作用下以三个曲率参数为基本未知量的平衡方程如下

$$EILK_e(\mathbf{q} - \mathbf{q}_c) - \mathbf{F}_x \mathbf{J}_x^T(\mathbf{q}) - \mathbf{F}_y \mathbf{J}_y^T(\mathbf{q}) - \mathbf{M} \mathbf{J}_\theta^T = \mathbf{0} \quad (18)$$

以上平衡方程未作小挠度假设, 且包含梁的初始曲率, 因此可适用于平面欧拉直、曲梁的大挠度变形。

2.2 大挠度平衡方程数值计算格式

(1) 基于高斯积分的近似平衡方程。

设 σ_k 和 A_k 是 $[-1, 1]$ 区间的高斯积分点和权系数, 通过被积参数变换, 高斯积分点对应的弧长参数 $s_k = L(\sigma_k + 1)/2$ 。采用 m 点高斯积分, 则由式(7)可得挠曲线末端坐标的近似计算公式

$$\begin{cases} x(\mathbf{q}, L) = \frac{L}{2} \cdot \sum_{k=1}^m A_k \cos[\theta(\mathbf{q}, s_k)] \\ y(\mathbf{q}, L) = \frac{L}{2} \cdot \sum_{k=1}^m A_k \sin[\theta(\mathbf{q}, s_k)] \end{cases} \quad (19)$$

平衡方程式(18)雅可比矩阵中的元素可做如下近似计算

$$\begin{cases} \frac{\partial x(\mathbf{q}, L)}{\partial q_i} = -\frac{L}{2} \sum_{k=1}^m A_k \cdot \frac{\partial \theta(\mathbf{q}, s_k)}{\partial q_i} \cdot \sin[\theta(\mathbf{q}, s_k)] \\ \frac{\partial y(\mathbf{q}, L)}{\partial q_i} = \frac{L}{2} \sum_{k=1}^m A_k \cdot \frac{\partial \theta(\mathbf{q}, s_k)}{\partial q_i} \cdot \cos[\theta(\mathbf{q}, s_k)] \end{cases} \quad (20)$$

由转角公式(6)易得

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta(\mathbf{q}, s_k)}{\partial q_0} = s_k - \frac{s_k^2}{L} + \frac{s_k^3}{3L^2} \\ \frac{\partial \theta(\mathbf{q}, s_k)}{\partial q_1} = \frac{s_k^2}{L} - \frac{2s_k^3}{3L^2} \\ \frac{\partial \theta(\mathbf{q}, s_k)}{\partial q_2} = \frac{s_k^3}{3L^2} \end{cases} \quad (21)$$

(2) 非线性平衡方程的牛顿-拉弗森迭代格式。

基于高斯积分的近似平衡方程是以三个曲率参数为未知数的非线性代数方程组, 可采用牛顿-拉弗森迭代法求解。其迭代格式为

$$\mathbf{q}^{i+1} = \mathbf{q}^i - [\nabla_{\mathbf{q}} f(\mathbf{q}^i)]^{-1} f(\mathbf{q}^i) \quad (22a)$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{q}^i) = & EILK_e(\mathbf{q}^i - \mathbf{q}_c) - \mathbf{F}_x \mathbf{J}_x^T(\mathbf{q}^i) - \\ & \mathbf{F}_y \mathbf{J}_y^T(\mathbf{q}^i) - \mathbf{M} \mathbf{J}_\theta^T \end{aligned} \quad (22b)$$

$$\nabla_{\mathbf{q}} f(\mathbf{q}^i) = EILK_e - \mathbf{F}_x \mathbf{H}_x(\mathbf{q}^i) - \mathbf{F}_y \mathbf{H}_y(\mathbf{q}^i) \quad (22c)$$

式中, $\mathbf{H}_x(\mathbf{q}^i)$ 和 $\mathbf{H}_y(\mathbf{q}^i)$ 是末端横向和纵向位移对三个曲率参数的海塞矩阵, 其元素根据式(19)近似计算如下

$$\frac{\partial^2 x(\mathbf{q}, L)}{\partial q_i \partial q_j} = -\frac{L}{2} \cdot \sum_{k=1}^m A_k \cdot \frac{\partial^2 \theta(\mathbf{q}^i, s_k)}{\partial q_i \partial q_j}$$

$$\frac{\partial \theta(\mathbf{q}^i, s_k)}{\partial q_j} \cdot \cos[\theta(\mathbf{q}^i, s_k)] \quad (23a)$$

$$\frac{\partial^2 y(\mathbf{q}, L)}{\partial q_i \partial q_j} = -\frac{L}{2} \cdot \sum_{k=1}^m A_k \cdot \frac{\partial \theta(\mathbf{q}^i, s_k)}{\partial q_i} \cdot$$

$$\frac{\partial \theta(\mathbf{q}^i, s_k)}{\partial q_j} \cdot \sin[\theta(\mathbf{q}^i, s_k)] \quad (23b)$$

后续计算中, 迭代终止条件设定为满足如下条件之一

$$\begin{cases} \|\mathbf{q}^{i+1} - \mathbf{q}^i\| \leq 10^{-6} \\ \|f(\mathbf{q}^{i+1})\| \leq 10^{-6} \\ i > 100 \end{cases} \quad (24)$$

牛顿-拉弗森迭代法是二阶收敛算法, 仅需少数几步就能迭代到设定的精度, 但其非全局收敛, 因此设置迭代步数为 100 作为终止条件, 视为发散, 避免仿真代码进入无限循环状态。

(3) 高斯积分近似的误差估计。

由于 m 点高斯积分可以精确计算不高于 $2m-1$ 次多项式的积分, 因此式(19)能够精确计算式(7)三角函数泰勒展开至 $2m-1$ 次多项式的积分值。根据拉格朗日余项公式保守估算积分误差, 采用 5 点高斯积分, 挠曲线最大转角不超过 $\pm 90^\circ$ 时, 式(19)积分误差将不超过 $2.52 \times 10^{-5} L$, 式(20)积分误差将不超过 $4.01 \times 10^{-5} L^2$ 。采用 4 点高斯积分, 挠曲线最大转角不超过 $\pm 60^\circ$ 时, 式(19)积分误差将不超过 $3.59 \times 10^{-5} L$, 式(20)积分误差将不超过 $6.85 \times 10^{-5} L^2$ 。

3 悬臂直梁和曲梁大挠度分析

3.1 悬臂直梁横向载荷下的大挠度分析

为了统一比较梁的不同长度 L 、弹性模量 E 、截面惯性矩 I 、末端横向力 F 对变形的影响, 将悬臂梁长度归一化, 并定义无量纲化末端横向力载荷指标 $f = FL^2/(2EI)$ 。应用三参数曲率模型对 $0 \leq f \leq 5$ 的悬臂直梁采用 5 点高斯积分进行计算, 求解 20 个均分的载荷步下的挠曲线和末端轨迹。首个载荷迭代初值 $\mathbf{q} = [0, 0, 0]^T$, 后续载荷迭代初值采用前一个载荷的求解结果, 计算所得挠曲线及其末端轨迹如图 1 所示, 所有载荷下迭代次数均不多于 4 次即收敛到迭代终止条件。与文献[1]提供的椭圆积分解代码求解结果对比, 梁末端点 x 坐标、 y 坐标及转角的相对误差百分比曲线如图 2 所示。

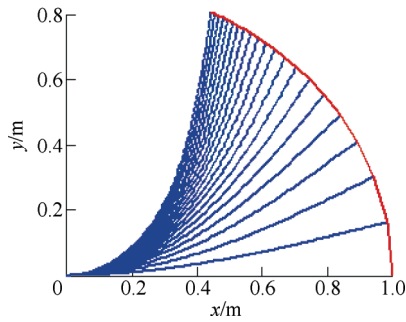


图1 横向载荷下挠曲线及末端轨迹

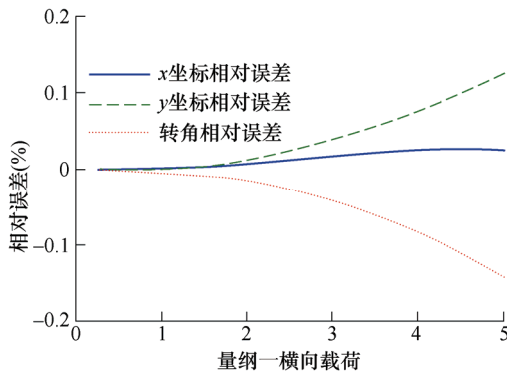


图2 末端x坐标、y坐标及转角相对误差百分比

3.2 四分之一圆弧悬臂曲梁复合载荷下的变形分析

采用文献[12]中相同算例, 梁的长度 $L=0.1571$ m、弹性模量 $E=1.4 \times 10^9$ Pa、截面惯性矩 $I=0.01 \times 0.001^3/12$ m⁴、初始半径 $R=0.1$ m 即初始曲率参数 $q_c=[10, 10, 10]^T$, 在末端横向力 $F_y=0.01$ N、纵向力 $F_x=-0.07$ N、弯矩 $M=-0.0002$ N·m 载荷作用下, 采用5点高斯积分求解可得变形前和变形后的挠曲线如图3。变形后末端点 x 、 y 坐标和转角分别为: $0.044\ 025$ m、 $0.119\ 010$ m、 125.908° 。试算五次最多迭代次数均不超过4次, 解平衡方程并绘制200个坐标点的挠曲线计算时间最长均不超过0.4秒。本文方法所得结果与文献[12]采用16个短梁单元的计算结果一致。

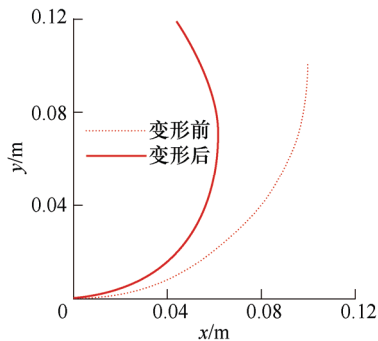


图3 四分之一圆弧梁变形前后挠曲线

通过以上对悬臂直梁和曲梁的大挠度分析及与其他方法的对比验证, 本文所提出的基于二次Bernstein多项式的三参数曲率模型具有高精度、高计算效率的同时对直梁和曲梁具有通用性。

4 部分柔顺曲柄摇杆机构建模分析

本节对一种在3R伪刚体模型文献[8]、完备椭圆积分分解文献[2]和链式梁约束模型文献[11]中均作为算例的部分柔顺曲柄摇杆机构进行建模分析, 以便对比, 并展示三参数曲率模型方法独特的优越性和应用潜力。该机构初始位形如图4, 曲柄长 $L_{AB}=1-\sqrt{2}/2$ m, 连杆长 $L_{BC}=1$ m, 柔顺摇杆长 $L_{CD}=1$ m, 机架 $L_{AD}=\sqrt{2}/2$ m, 柔顺摇杆的厚度为5 mm, 宽度为10 mm, 弹性模量为 $E=1.4 \times 10^9$ Pa。

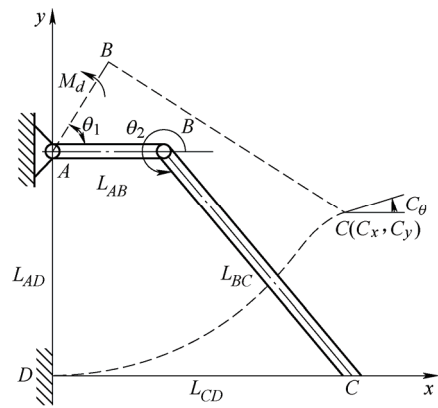


图4 机构初始位形与基本参数符号

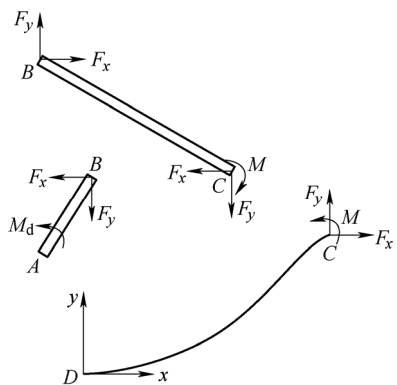


图5 构件的受力分析

4.1 基于三参数曲率模型的机构平衡方程

假设机构运动速度很小, 不考虑惯性力和摩擦力, 各构件的受力如图5所示。以曲柄的转角 θ_1 为输入, 连杆相对曲柄的转角 θ_2 、柔顺摇杆的三个曲率参数 $q=[q_0, q_1, q_2]^T$ 和柔顺摇杆末端所受力和弯矩 F_x 、 F_y 、 M 作为机构的基本未知量。

由式(18), 柔顺摇杆平衡方程的矩阵形式为

$$EILK_e \mathbf{q} - \mathbf{F}_x \mathbf{J}_x^T(\mathbf{q}) - \mathbf{F}_y \mathbf{J}_y^T(\mathbf{q}) - \mathbf{M} \mathbf{J}_\theta^T = 0 \quad (25)$$

连杆力矩平衡方程为

$$\mathbf{F}_y L_{BC} \cos(\theta_1 + \theta_2) - \mathbf{F}_x L_{BC} \sin(\theta_1 + \theta_2) + \mathbf{M} = 0 \quad (26)$$

对柔顺摇杆末端 C , 三个几何封闭方程为

$$\begin{cases} C_x(\mathbf{q}) - L_{AB} \cos \theta_1 - L_{BC} \cos(\theta_1 + \theta_2) = 0 \\ C_y(\mathbf{q}) - L_{DA} - L_{AB} \sin \theta_1 - L_{BC} \sin(\theta_1 + \theta_2) = 0 \\ C_\theta(\mathbf{q}) - \theta_1 - \theta_2 - \pi/4 = 0 \end{cases} \quad (27)$$

以上方程联立后应用第 2.2 节的数值计算格式可求解出前述的机构基本未知量。而曲柄的平衡力矩按以下公式计算

$$\mathbf{M}_d = \mathbf{F}_y L_{AB} \cos \theta_1 - \mathbf{F}_x L_{AB} \sin \theta_1 \quad (28)$$

4.2 机构的基本特性分析

机构初始位形 $\theta_1=0^\circ$, $\theta_2=-45^\circ$, $\mathbf{q}=[0, 0, 0]^T$, $\mathbf{F}_x=0$, $\mathbf{F}_y=0$, $\mathbf{M}=0$ 。以曲柄逆时针转动一周为驱动, 由式(13)和式(28)可得机构应变能、曲柄平衡力矩随曲柄转角的变化曲线分别如图 6、7 所示。

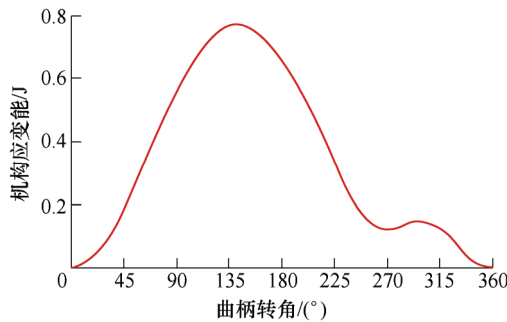


图 6 机构应变能变化曲线

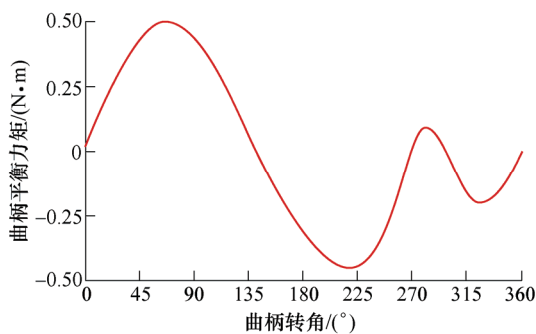
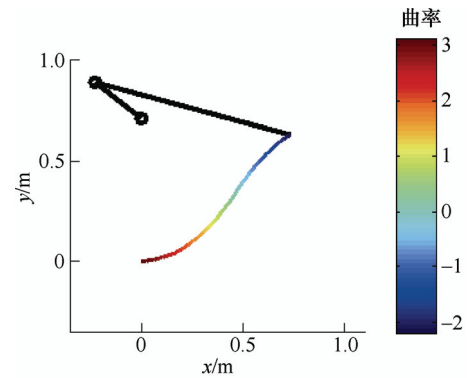


图 7 曲柄平衡力矩变化曲线

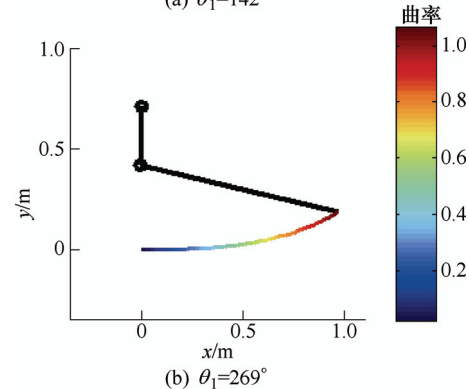
由图 6 可知, 曲柄转角为 0° 和 269° 时, 机构应变能处于极小位置, 是两个稳定平衡点; 而曲柄转角为 142° 和 298° 时, 机构应变能处于极大位置, 是两个不稳定平衡点。对照图 7 可知, 这四个关键位形对应的曲柄平衡力矩均为 0。以上结果与文献[2]

完备椭圆积分解法、文献[11]链式梁约束模型法所得结果一致。本文方法在一台 1.7 GHz 英特尔 i5 处理器、8 GB 内存的笔记本电脑中, 每隔 10 度计算一个机构位形(含初始位形共 36 个位形), 采用 4 点高斯积分, 求解平衡方程组并计算和绘制机构应变能、曲柄平衡力矩曲线不超过 0.8 s。包括绘制含柔顺摇杆挠曲线(50 个坐标点)的机构 36 个位形图用时不超过 1.8 s。计算效率显著高于文献[2]的 25.9 s 和文献[11]的 3.6 s。

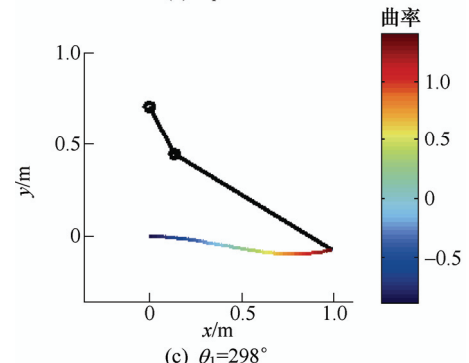
除初始位形外, 机构其他三个关键位形及摇杆弯曲曲率云图分别如图 8a、8b、8c 所示。



(a) $\theta_1=142^\circ$



(b) $\theta_1=269^\circ$



(c) $\theta_1=298^\circ$

图 8 机构的三个关键位形及摇杆弯曲曲率云图

4.3 基于三参数曲率解的柔顺摇杆变形特征

根据机构平衡方程组求解得到的柔顺摇杆三个曲率参数随曲柄转角变化的曲线如图 9 所示, 相邻曲率参数的差随曲柄转角变化的曲线如图 10 所示。根据这两组曲线以及第 1.2 节的相关

结论,能非常简便、直观地得到柔顺摇杆的变形特征。

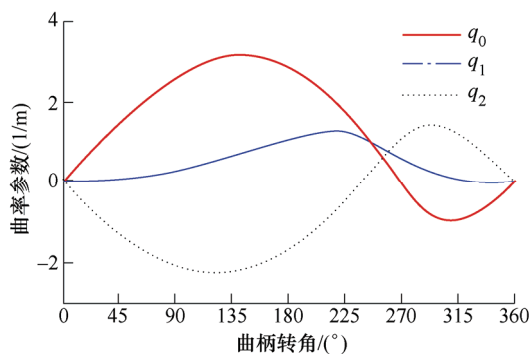


图 9 三个曲率参数变化曲线

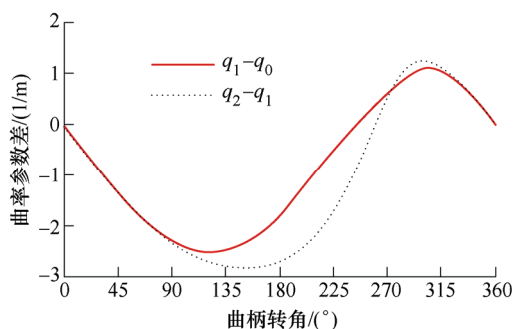


图 10 曲率参数差曲线

(1) 曲率多项式退化特性:由性质 1 和图 10 可知,曲柄转角大致在 $\pm 25^\circ$ 内,三个曲率参数基本成等差数列,因此摇杆弯曲曲率退化为一次曲率。

(2) 绝对值最大曲率(应力)及其位置:由性质 2、性质 3 和性质 4 以及图 9 可知,曲柄转角在 $[0^\circ, 245^\circ]$ 区间摇杆根部是曲率绝对值最大位置,而曲柄转角在 $[245^\circ, 260^\circ]$ 区间曲率绝对值最大位置在摇杆中间部分,曲柄转角在 $[260^\circ, 360^\circ]$ 区间,摇杆末端曲率绝对值最大。曲柄转动一周柔顺摇杆曲率绝对值最大值(对应最大应力值)如图 11 所示,对应应在摇杆上的位置如图 12 所示。

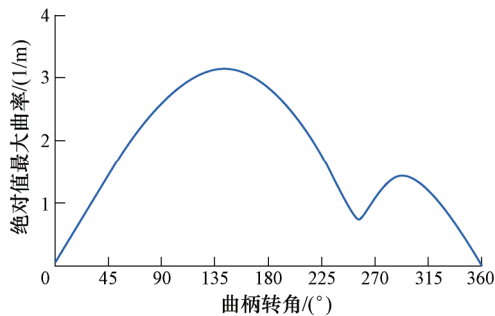


图 11 曲率绝对值最大值

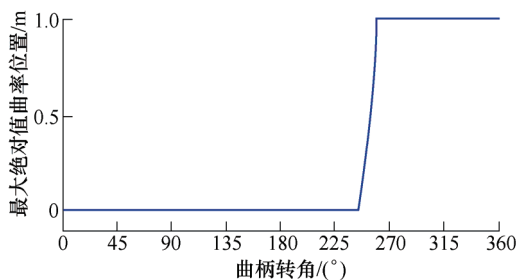


图 12 曲率绝对值最大值对应位置

(3) 拐点个数及其位置:根据性质 5 和图 9,曲柄转角在 $[0^\circ, 238^\circ]$ 和 $[269^\circ, 360^\circ]$ 区间三个曲率参数的正负号仅变化一次,因此摇杆挠曲线有一个拐点。只有曲柄转角在 $[238^\circ, 269^\circ]$ 之间三个曲率参数全为正,因此摇杆挠曲线无拐点。机构第二稳定平衡位置(应变能极小位置)对应的曲柄转角刚好为 269° ,这也印证了此时刻摇杆的弯曲是一种临界状态。柔顺摇杆拐点位置变化如图 13 所示,由此曲线可以看出随着曲柄逆时针转动拐点从摇杆的中点移动到末端点,然后拐点消失,再出现拐点时拐点从根部向中点移动。

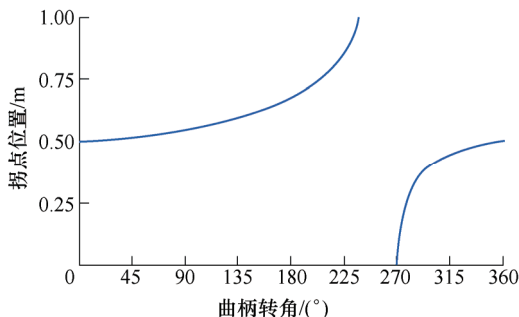


图 13 拐点位置变化

(4) 摇杆一个变形周期内的曲率和转角:根据曲率参数解,摇杆 36 个位形的曲率曲线和转角曲线分别如图 14 和图 15 所示。由图 14 可以直观地看出曲柄转一周摇杆上任意一点的曲率变化范围,特别在摇杆中点位置曲率变化幅值较小,在两个端点曲率变化幅值最大。同样根据图 15 可以直观看出摇杆上任意一点的弯曲转角变化范围,例如末端转角始终大于 0° ,最大末端转角不到 50° ,而摇杆在一个变形周期内的最大转角不超过 60° 。因此在求解平衡方程时采用四点高斯积分近似,在保证精度的同时计算量显著减少,计算效率得到提高。

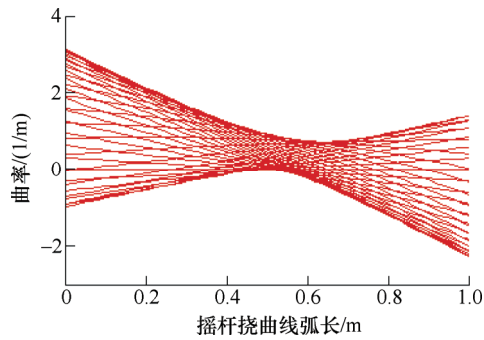


图 14 摇杆 36 个位形的曲率曲线

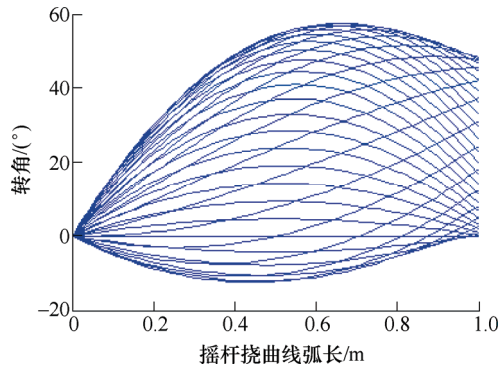


图 15 摇杆 36 个位形的转角曲线

(5) 摇杆末端垂直位移与轨迹: 摇杆末端垂直位移变化曲线以及末端轨迹分别见图 16 和图 17。由图 16 可知, 摇杆末端垂直位移具有与传统刚性曲柄摇杆机构类似的急回现象。而由图 17 可以看出, 摇杆末端上行轨迹与下行轨迹不重合。这是由于摇杆上行和下行的变形形态不同, 从而导致末端轨迹的不重合。

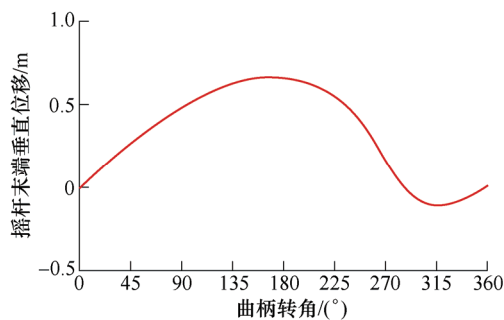


图 16 摇杆末端垂直位移曲线

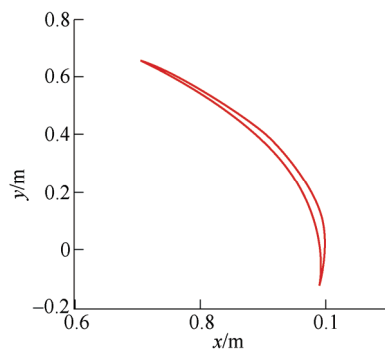


图 17 摇杆末端轨迹

综上, 应用本文提出的三参数曲率模型进行建模, 求解所得的三个曲率参数能简便、直观、高效的体现柔顺构件丰富的变形度量 and 变形特征信息, 从而能够系统分析其随曲柄转角变化的演变规律。

5 结论

(1) 基于二次 Bernstein 多项式基函数, 提出了一种描述平面挠曲线的三参数曲率模型, 并详细分析了曲率参数的几何意义及其对应挠曲线性质。

(2) 基于三参数曲率模型和虚功原理, 建立了平面大挠度欧拉梁几何非线性平衡方程, 并推导出用高斯积分近似和牛顿-拉弗森迭代法的数值计算格式。

(3) 通过对末端载荷条件下的悬臂直梁和曲梁的大挠度计算, 表明了本文方法的高精度和对直梁曲梁的通用性。

(4) 通过对一种典型的部分柔顺曲柄摇杆机构的建模分析, 首次系统揭示了该机构柔顺构件的丰富变形特征, 结果充分表明了本文方法的高精度、高计算效率以及对柔顺构件变形度量和变形特性呈现的直观性和丰富性。

参 考 文 献

- [1] HOWELL L L, OLSEN B M, MAGLEBY S P. Handbook of compliant mechanisms [M]. New York: Wiley, 2013.
- [2] ZHANG Aimei, CHEN Guimei. A comprehensive elliptic integral solution to the large deflection problems of thin beams in compliant mechanisms[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2013, 5(2): 420-431.
- [3] 朱金文, 杨德庆. 三种典型边界条件下受集中载荷梁大挠度弯曲精确解[J]. 力学季刊, 2013, 34(3): 55-60. ZHU Jinwen, YANG Deqing. Exact solution of large deformations of beam under three typical boundary conditions[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2013, 34(3): 55-60.
- [4] AWTAR S, SEN S. A generalized constraint model for two-dimensional beam flexures: Nonlinear load-displacement formulation[J]. Journal of Mechanical Design, 2010, 132(8): 1-10.
- [5] LAN C C, LEE K M. Generalized shooting method for analyzing compliant mechanisms with curved members[J]. Journal of Mechanical Design, 2006, 128(4): 765-775.
- [6] TOLOU N, HERDER J L. A semianalytical approach to large deflections in compliant beams under point load[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2009 (2): 1-13.
- [7] KRAMER S N, SAXENA A. A simple and accurate

- method for determining large deflection compliant mechanisms subjected to end forces and moments[J]. Journal of Mechanical Design, 1998, 120(3): 392-400.
- [8] SU Haijun. A pseudo-rigid-Body 3R model for determining large deflection of cantilever beams subject to tip loads[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2009, 1(2): 1-9.
- [9] 冯忠磊, 余跃庆, 王雯静. 模拟柔顺机构中柔顺杆件末端特征的 2R 伪刚体模型[J]. 机械工程学报, 2011, 47(1): 36-42.
FENG Zhonglei, YU Yueqing, WANG Wenjing. 2R pseudo-rigid-body model of compliant mechanisms with compliant links to simulate tip characteristic[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(1): 36-42.
- [10] 余跃庆, 徐齐平, 周鹏. 复合载荷作用下柔顺机构的 PR 伪刚体新模型[J]. 机械工程学报, 2013, 49(15): 9-14.
YU Yueqing, XU Qiping, ZHOU Peng. New PR pseudo-rigid-body model of compliant mechanisms subject to combined loads[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(15): 9-14.
- [11] MA Fulei, CHEN Guimin. Modeling large planar deflections of flexible beams in compliant mechanisms using chained Beam-Constraint-Model[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2016, 8(2): 1-30.
- [12] CHEN Guimin, MA Fulei, HAO Guangbo, et al. Modeling large deflections of initially curved beams in compliant mechanisms using chained beam constraint model[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2019, 11(1): 1-10.
- [13] CAMPANILE L F, HASSE A. A simple and effective solution of the elastica problem[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2008, 222(12): 2513-2516.
- [14] VALENTINI P P, PENNASTRI E. Modeling elastic beams using dynamic splines[J]. Multibody System Dynamics, 2011, 25(3): 271-284.
- [15] ODHNER L U, DOLLAR A M. The smooth curvature model: An efficient representation of Euler-Bernoulli flexures as robot joints[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2012, 28(4): 761-772.
- [16] CHEN Guimin, HOWELL L L. Symmetric equations for evaluating maximum torsion stress of rectangular beams in compliant mechanisms[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2018, 31(1): 31-40.
- [17] WANG Liping, JIANG Yao, LI Tiemin. Analytical compliance modeling of serial flexure-based compliant mechanism under arbitrary applied load[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2017, 30(4): 951-962.
- [18] FAROUKI R T. The Bernstein polynomial basis: A centennial retrospective[J]. Computer Aided Geometric Design, 2012, 29(6): 379-419.
- [19] 陈维桓. 微分几何[M]. 北京: 北京大学出版社, 2006.
CHEN Weihuan. Differential geometry[M]. Beijing: Peking University Press, 2006.

作者简介: 谢丹(通信作者), 女, 1987 年出生, 博士, 讲师。主要研究方向为刚柔耦合多体系统理论及应用。

E-mail: danxie2017@swu.edu.cn

黄勇刚, 男, 1976 年出生, 博士, 副教授。主要研究方向为机构学与机器人及机械系统 CAE。

E-mail: hyg@ctbu.edu.cn