DOI: 10.3901/JME.2021.09.039

空间连杆机构位移分析的共形几何代数方法^{*}

黄昔光¹ 刘聪聪¹ 黄旭¹ 李强¹ 李端玲²

(1. 北方工业大学机械与材料工程学院 北京 100144;

2. 北京邮电大学自动化学院 北京 100876)

摘要: 空间连杆机构位移分析是机构运动学和动力学研究的基础, 由于空间连杆机构输入输出位移参数多且强非线性, 尽管经过多年研究已经有多种位移分析的求解方法, 但多维高阶代数方程组求解至今仍然是困扰机构学与机器人学研究的难题。总结了传统空间连杆机构位移分析理论基本求解过程, 阐述了空间连杆机构位移分析中三种常见的几何代数系统, 归纳了空间连杆机构位移分析所需的共形几何代数(Conformal geometric algebra, CGA)基本理论。以一种空间 6R 串联机构和空间 RRSRR 机构为例, 将 CGA 引入到空间连杆机构位移分析中, 把空间连杆机构几何模型中的关节特征点映射到五维共形空间中, 建立了关节特征点的 CGA 表达式, 基于特征点构造若干直线、平面或球面等几何体, 通过几何体的外积计算获得待求关节交点的 CGA 形式表达方程, 再利用 CGA 理论框架内的内积或幂零性质直接获得空间连杆机构的关节转角余弦表达或无增无漏根的一元高次位移分析输入输出方程, 从而获得空间连杆机构位移分析的全部符号形式解析解。方法实现了几何语言直接(脱离坐标)求解空间连杆机构位移分析, 避免了经典机构学理论中复杂的旋转坐标变换矩阵运算以及多元高次非线性方程组求解。基于计算机代数计算系统 Maple16 编程, 数字实例计算表明, 方法正确有效, 具有较好的几何直观性。

关键词: 共形几何代数; 空间连杆机构; 位移分析; 解析解

中图分类号: TG156

Displacement Analysis of Spatial Linkage Mechanisms Based on Conformal Geometric Algebra

HUANG Xiguang¹ LIU Congcong¹ HUANG Xu¹ LI Qiang¹ LI Duanling²

(1. School of Mechanical and Materials Engineering, North China University of Technology, Beijing 100144;

2. Automation School, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876)

Abstract: The displacement analysis is the basis of kinematics and dynamics research for spatial mechanisms. Though there exist many methods to solve the displacement analysis, the solution of multi-dimensional high-order algebraic equations is still a difficult problem in the research of mechanism and robotics due to the strong nonlinearity of input and output displacement parameters of spatial mechanisms. The basic process of traditional displacement analysis theory of spatial mechanisms is analyzed, three common geometric algebraic systems and the basic theoretical framework of conformal geometric algebra (CGA) are expounded. CGA is introduced into the displacement analysis of spatial mechanism and new algorithms are proposed for displacement analysis of a spatial 6R spatial mechanism and a spatial RRSRR mechanism. The revolute joints are determined by the description of rigid motion in CGA. The cosine values of all joint rotating angles and the input-output polynomial equation with a single unknown can be derived by the inner product between and all closed-form solutions are obtained. The algorithm is the pure geometric computation in a clear and coordinates-free way and avoids the use of rational angles or matrices, and complex computations for nonlinear and multivariable equations. Finally, two numerical examples are given to demonstrate the efficiency of the algorithm and the results show that this algorithm can simplify the complexity of computation with strong geometrical intuition based on Maple16.

Key words: conformal geometric algebra; spatial linkage mechanism; displacement analysis; closed-form solutions

^{*} 国家自然科学基金(51105003, 51775004, 51775052)、北京市自然科学基金(3172010)、国家重点研发计划(2020YFC0811004)、陕西省自然科学基金基础研究计划(2019JM-181)和北方工业大学毓优秀人才支持计划资助项目。20200805 收到初稿, 20201124 收到修改稿

0 前言

与平面连杆机构相比,空间连杆机构具有构件数少、结构紧凑、运动多样、工作灵活可靠等特点,可实现平面连杆机构根本无法实现的某些运动,在农业、工业、动力机械、工程机械、汽车、飞机以及仪器仪表等领域有着广泛的潜在应用。空间连杆机构的位移分析,尤其是输入输出方程至关重要,是空间连杆机构综合、速度和加速度分析以及动力学研究的基础^[1]。然而,由于空间连杆机构位移分析比较复杂,很难应用直观试凑法进行分析与设计,已成为阻碍空间连杆机构广泛使用的技术瓶颈。

空间 7R 机构的位置逆解问题曾被喻为机构运动分析问题中的珠穆朗玛峰^[2]。直到 1986 年,廖启征等^[3]首次解决了该问题,随后找到了具有全部实根的机器人机构^[4],理论上已经解决了串联机器人位置逆解难题。文献[3-4]采用齐次坐标变换矩阵建模或对偶矩阵建模,寻找合适的封闭方程,最后进行消元求解,其数学处理技巧性强。此后很多类似求解过程与方法相继应用于空间串联机构位置逆解分析,主要有球面三角法^[5]、齐次坐标变换矩阵法^[6]、对偶矩阵法^[7]、对偶四元数法^[8]、四元数法^[11],以及最近出现的倍四元数法^[9-10]等。同时,随着空间连杆机构的广泛应用与发展,空间 RRSRR 机构广泛应用于轻工业机械、农业机械、汽车工业、飞机工业以及机器人等领域^[11],该机构的位移分析引起了机构学以及机器人学领域学者的广泛关注。YOU 等^[12-13]采用数值计算求解了空间 RRSRR 机构位移分析,但未能实现封闭解求解。XIE 等^[14]采用螺旋理论获得了一元 8 次输入输出方程,包含有 4 个增根。WALLACE 等^[15]使用几何构型的方法率先成功获得了该机构的一元 4 次方程。随后,DUFFY 等^[16]使用球面三角法,ZHOU 等^[17]使用矢量代数法,YANG 等^[18]使用对偶数法分别获得了该机构无增无漏的输入输出方程。

与平面连杆机构相比,空间连杆机构结构复杂,位移分析中运动参数繁多,解具有强非线性与耦合性。尽管经过多年研究,已经有多种位移分析的求解方法,但方法基本上数学建模依赖坐标系的选取,都需要经过复杂的旋转角和矩阵运算,最终将空间机构位移分析问题转化为多元高次非线性方程的求解问题,消元技巧性强,推导过程复杂繁

琐,涉及大量的应用数学以及数学分析等数学专业知识。并且,建模与计算过程都难以反映机器人几何结构与运动之间的几何关系,缺乏几何直观性。因此,有必要揭示传统空间连杆机构位移分析经典理论与几何代数理论新成果的内在联系与区别,探索避免经典机构学运动学理论中对旋转变换矩阵运算以及复杂非线性方程组的求解的依赖,进而研究在统一数学框架内进行数学建模与求解的空间连杆机构位移分析新理论具有重要的理论意义与工程应用价值。

最近出现的共形几何代数(Conformal geometric algebra, CGA)是一种建立在共形空间上的几何代数系统,其能够统一表示点、线、面、圆、球等几何元素,并直接进行运算^[19]。其优越的几何计算能力和时空表达能力,已被广泛应用于相对论物理学和计算机视觉等领域^[20-21]。张英等^[22]采用 CGA 对平面并联机构位移正解分析进行几何建模与免消元计算,从代数角度看,该问题本质上属于二元一次方程组线性消元问题,不涉及非线性方程组求解问题。最近,文献[23]应用 CGA 求解了空间 3-PPS 并联机构位置正解分析,通过几何体的建模与运算,直接获得该机构无增无漏的一元高次输入输出方程。但是如何将 CGA 系统引入空间连杆机构位移分析中,求解复杂的非线性空间连杆机构位移分析问题,并揭示其运动学位移分析的几何直观性,有待系统地深入研究。

本文分析了传统空间连杆机构位移分析理论的基本过程,阐述了涉及空间连杆机构位移分析的三种常见的几何代数系统以及空间连杆机构位移分析所需的 CGA 基本理论,以一种空间 6R 串联机构和空间 RRSRR 机构为例,并将共形几何代数引入空间机构位移分析非线性求解中,获得了空间连杆机构位移分析全部符号形式的解析解。实现了几何语言直接(脱离坐标)推导出空间连杆机构无增无漏的输入输出方程,避免了经典机构学理论中复杂的旋转坐标变换运算以及多元高次非线性方程组求解,推导过程简洁,计算效率高,具有较好的几何直观性。

1 传统空间连杆机构位移分析方法

空间连杆机构位移分析本质上是运动几何学问题研究。从机构学的发展历史来看,图解法和代数是机构学研究的两类主要数学方法。随着电子计算机和数值计算方法的迅速发展,代数法已在空间

机构位移分析中得到了更加广泛地研究与应用。近年, 随着机械系统向高速高精、智能高效等方向发展, 机构学与机器人学迫切需要数学理论为运动几何建模提供简洁、通用的代数表示, 为运动几何计算提供快速、鲁棒的代数处理。目前采用代数法求解空间连杆机构位移分析, 主要有如下 3 个步骤。

(1) 数学建模: 建立笛卡儿坐标系, 通过旋转坐标变换将运动几何问题代数化, 获得位移分析封闭方程组。对于由 n 个杆件构成封闭运动链, 位移封闭方程为^[2]

$$[M_{0,1}][M_{1,2}]\cdots[M_{n-1,n}]=I \quad (1)$$

式中, I 为 4×4 单位阵。

$$[M_{i,j}] = \begin{bmatrix} \cos \widehat{x_i x_j} & \cos \widehat{x_i y_j} & \cos \widehat{x_i z_j} & P_x^{oj} \\ \cos \widehat{y_i x_j} & \cos \widehat{y_i y_j} & \cos \widehat{y_i z_j} & P_y^{oj} \\ \cos \widehat{z_i x_j} & \cos \widehat{z_i y_j} & \cos \widehat{z_i z_j} & P_z^{oj} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$i, j=0,1, 1,2, \cdots, n-1,n$, $\widehat{x_i x_j}$ 表示为坐标系 $\{i\}$ 的 x 轴与坐标系 $\{j\}$ 的 x 轴的夹角, 其他亦然。

利用式(1) 等号左右两边对应元素相等, 可以获得包含三角函数的超越方程组, 根据需要, 通过变量替换等数学处理, 可将超越方程组转换成为多元高次非线性代数方程组。

(2) 数学模型求解与计算: 运用数学分析的相关专业知识对推导出的多元高次非线性方程组进行数值计算或者消元求解, 推导出方程组数值解或一元高次输入输出方程, 从而获得位移分析的数值解或者所有封闭形式的解析解, 建立代数处理的算法。

(3) 代数解的几何还原: 将获得的代数解进行运动几何解释, 例如获得空间机构输出杆件的位置与姿态, 或者机构的构型情况等。

由上述分析可知, 传统的代数法进行空间机构位移分析时, 存在如下不足。

(1) 消元技巧性强: 同一个运动几何问题将会出现各种各样的代数表示, 也就是说, 对同一个空间机构位移分析问题, 由于数学建模用到的建模方法不同, 导致不同的代数表示, 以至于非线性方程组求解方法与技巧各不相同, 形式各异。

(2) 求解过程复杂抽象: 原本是运动几何问题, 为方便研究, 需要进行代数化表示, 代数求解后需要几何还原, 求解过程和最终获得的解都难以揭示机构刚体运动的几何关系, 缺乏几何直观性, 导致问题的求解相对抽象复杂, 难以理解。

(3) 对机器人工程师或研究者的数学专业知识

要求高: 几何问题数学建模与非线性方程组求解, 要求在不同的数学知识体系或框架之间进行反复转换, 对应用数学和数学分析等数学专业知识要求比较高。

因此, 尽管经过多年的研究, 空间机构位移求解也出现了形式多样的求解方法, 但该问题的求解至今仍然是困扰机构学与机器人学研究的难题。如何在统一的数学知识框架内完成空间机构位移分析的建模与求解, 避免经典机构学理论中复杂的旋转坐标变换运算以及多元高次非线性方程组求解, 建立简洁高效、具有几何直观性的空间机构位移分析几何计算新方法, 有待探索新的数学理论在空间机构学位移分析的应用与研究。

2 几何代数基础

2.1 几何代数的运算法则

几何代数是描述空间对象的统一数学语言, 将传统数学中的矢量、四元数、张量等都统一到同一个代数框架内。同时, 几何代数具有强大的多维统一表达与几何计算能力, 可直接对几何问题进行描述与计算。内积、外积以及几何积是支撑几何代数进行几何空间构造与几何对象表达的基础运算。

几何积是几何代数的固有积, 对于两个任意维度空间内的对象 u 和 v , 其几何积表达式为

$$uv = u \cdot v + u \wedge v \quad (2)$$

式中, uv 表示矢量 u 和 v 的几何积; “ $\cdot$ ” 表示内积, 其运算结果的几何意义是 v 中与 u 正交的组成部分。当 u 和 v 均为相同维度矢量时, 其内积与矢量代数中的点积类似, 结果为 u 在 v 上投影的长度。但矢量代数中的点积, 其运算对象只能是维度相同的矢量, 而几何代数中的内积既适用于相同维度的矢量, 也可用于不同维度的矢量。内积内蕴了角度、距离等几何度量信息, 适用于简化高维几何对象表达与多维空间关系计算。当 u 和 v 互相垂直时, 内积结果为 0。“ $\wedge$ ” 表示外积, 外积用来构建基本的几何体或者几何体求交。例如, 两矢量 u, v 的外积可构建平面 $u \wedge v$ (图 1a), 平面 $u \wedge v$ 与矢量 w 的外积可构建六面体 $u \wedge v \wedge w$ (图 1b)。通过外积可以构建几何代数中任意维度元素, 外积不满足交换律, 但满足

$$u \wedge v = -v \wedge u \quad (3)$$

两个平行矢量的外积等于 0, 即

$$u \wedge u = -(u \wedge u) = 0 \quad (4)$$

图 1 外积的几何性质

在几何代数中, 几何元素 A 的逆表示为 A^{-1} , 定义为

$$AA^{-1} = 1 \quad (5)$$

几何元素 A 的对偶写成 A^* , 定义为

$$A^* = \frac{A}{I} \quad (6)$$

式中, I 为伪标量, 表示组成几何代数空间的所有线性无关矢量的外积, 对于欧氏三维空间的伪标量, 则有

$$I = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \quad (7)$$

$$II = 1 \quad (8)$$

2.2 三种常用的几何代数系统

几何代数系统的类型通过所包含正交基自乘的符号进行区分, 并在不同代数系统内定义相应的运算法则。几何代数空间用符号 $Cl_{(p,q)}$ 表示, p 、 q 分别是几何代数空间中自乘符号为+1、-1的正交基的个数

$$e_i e_i = \begin{cases} +1 & 0 < i \leq p \\ -1 & p < i \leq p+q \end{cases} \quad (9)$$

式中, e_i 为几何代数中的正交矢量基。

欧氏几何代数 $Cl_{(3,0)}$ 、齐次几何代数 $Cl_{(3,1)}$ 以及共形几何代数 $Cl_{(4,1)}$ 是三种常用的几何代数系统, 后两个几何代数系统是在欧氏几何代数的基础上引入相应的辅助维度, 从而逐步提高了几何代数的几何运动表达与计算能力。欧氏几何代数空间与传统的欧氏几何空间相一致, 但是, 欧氏几何代数空间的 Grassmann 分级结构并不对应于几何体的分级结构, 例如, 欧氏空间的点表示为从矢量空间的原点出发到该点的矢量, 但两个点的外积表示过原点以及这两个点的平面, 而不是过两点的直线。为此, 在欧氏几何代数空间的基础上另外引入一个投影维度 e_0 , 从而形成一个矢量空间的原点在三维仿射空间外部的四维矢量空间, 即齐次几何代数空间, 相应的坐标系是齐次坐标系。这样, 四维空间的 Grassmann 结构与几何体的分级结构完全对应, 即

两点的外积运算表示过该两点的直线, 3 个点的外积表示过这三点的平面等。由于引入 e_0 , 在欧氏几何代数空间无法直接表达的平移、旋转等几何变换在齐次几何代数空间内用矩阵的形式进行统一表达与计算。但是, 齐次几何代数空间中两个仿射点的内积运算缺乏几何意义。

LI 等^[21-22]在欧氏空间基础上, 通过共形变换将欧氏空间嵌入共形空间, 构建了共形几何代数。共形几何代数空间在齐次几何代数空间的基础上, 通过引入无穷远点 e_∞ 将闵氏内积结构赋予该五维矢量空间, 从而使得任何两个仿射点的内积结果表示欧氏距离, 具有几何意义。共形几何代数空间不仅保留了齐次代数空间中外积的 Grassmann 分级结构, 而且使得内积具备了表征距离、角度等基本度量的明确几何意义^[22], 使得其处理几何问题的过程和结果具有直观的几何解释。

由上述分析可知, 共形几何代数空间的构建可先将欧氏几何空间通过非线性的球面投影嵌入到高维空间, 再通过齐次变换将该高维空间转换成共形空间。欧氏几何代数与齐次几何代数均为共形几何代数的子集空间。

2.3 共形几何代数

理论上, 共形几何代数系统可推广到任意维数空间。将 n 维欧式空间 R^n 嵌入到 $(n+2)$ 维闵氏空间 $R^{n+1,1}$ 中, 正交矢量基 $\{e_1, \dots, e_n, e_+, e_-\}$ 满足^[22]

$$e_i e_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ e_i \wedge e_j & i \neq j \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \quad (10)$$

$$e_+^2 = 1 \quad e_-^2 = -1 \quad (11)$$

$$e_i \cdot e_+ = e_i \cdot e_- = e_+ \cdot e_- = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (12)$$

引入两个零矢量 e_0 和 e_∞

$$e_0 = \frac{1}{2}(e_- - e_+) \quad e_\infty = e_- + e_+ \quad (13)$$

式中, e_0 和 e_∞ 分别表示坐标原点和无穷远点, 且满足

$$\begin{cases} e_0^2 = e_\infty^2 = 0 \\ e_\infty \cdot e_0 = -1 \end{cases} \quad (14)$$

这样, 正交矢量基 $\{e_1, e_2, e_3, e_+, e_-\}$ 转换为 $\{e_1, e_2, e_3, e_0, e_\infty\}$, 单位伪标量用 I_c 表示

$$I_c = e_1 e_2 e_3 e_0 e_\infty \quad (15)$$

共形几何代数可以统一地表示点、线、面、球等几何元素, 并直接进行几何计算处理几何体。其几何元素的表达有内积表达和外积表达两种方式,

且两种表达方式互相对偶, 如表 1 所示。

表 1 CGA 基本几何元素的表达式

元素	内积表达式	外积表达式
点	$P = x + \frac{1}{2}x^2e_\infty + e_0$	—
球	$S = P - \frac{1}{2}r^2e_\infty$	$S^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4$
面	$\pi = n + de_\infty$	$\pi^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge e_\infty$
圆	$Z = S_1 \wedge S_2$	$Z^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$
线	$l = \pi_1 \wedge \pi_2$	$l^* = P_1 \wedge P_2 \wedge e_\infty$
点对	$P_p = S_1 \wedge S_2 \wedge S_3$	$P_p^* = P_1 \wedge P_2$

表 1 中, P_i 、 S_i 、 π_i 分别表示五维 CGA 空间的不同点、球面以及平面, x 和 n 表示三维欧式空间中的正交向量基的组合表达式, 且

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \quad (16)$$

$$P = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + \frac{1}{2}x^2e_\infty + e_0 \quad (17)$$

式(16)、(17)中, $x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, x_i 为实系数。

在五维 CGA 空间中, 点、线、面、球面都是矢量, 可以统一写成下式

$$S = s_1e_1 + s_2e_2 + s_3e_3 + s_4e_\infty + s_5e_0 \quad (18)$$

式中, $s_i \in \mathbf{R}$, 为实系数。

几何矢量 P 与 S 的内积可表示为

$$\begin{aligned} P \cdot S &= (p + p_4e_\infty + p_5e_0) \cdot (s + s_4e_\infty + s_5e_0) = \\ &= p \cdot s + s_4p \cdot e_\infty + s_5p \cdot e_0 + p_4e_\infty \cdot s + \\ &= p_4s_4e_\infty^2 + p_4s_5e_\infty \cdot e_0 + p_5e_0 \cdot s + \\ &= p_5e_4e_0 \cdot e_\infty + p_5s_5e_0^2 = \\ &= p \cdot s - p_5s_4 - p_4s_5 \end{aligned} \quad (19)$$

式中, $p_i \in \mathbf{R}$, 为实系数。

若 P 、 S 表示两个点, 则

$$P = p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3 \quad p_4 = p^2/2 \quad p_5 = 1$$

$$s = s_1e_1 + s_2e_2 + s_3e_3 \quad s_4 = s^2/2 \quad s_5 = 1$$

由式(19)得

$$\begin{aligned} P \cdot S &= p_1s_1 + p_2s_2 + p_3s_3 - p_4s_5 - p_5s_4 \\ &= p \cdot s - \frac{1}{2}(s^2 + p^2) \end{aligned} \quad (20)$$

由式(20)可知, 两个点的内积与距离的关系为

$$P \cdot S = -\frac{1}{2}(s - p)^2 \quad (21)$$

同理, 内积还可表示点与面之间、点与球之间、面与球之间、球与球之间的距离。

在 CGA 中, 两条直线或者两个平面之间的角度 θ 可以用标准化的对偶几何体的内积来表示

$$\cos \theta = \frac{O_1^* \cdot O_2^*}{\|O_1^*\| \|O_2^*\|} \quad (22)$$

式中, O_1^* 和 O_2^* 表示 CGA 中直线或平面的对偶。

若已知一个点对 P_p , 可以将点对 P_p 中的点分离出来, 即

$$P_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{P_p^* \cdot P_p^*} + P_p^*}{e_\infty \cdot P_p^*} \quad (23)$$

2.4 共形几何代数的刚体运动表达

刚体运动是由三维空间的旋转和移动生成的变换构成。在 CGA 代数中, 刚体 o 的旋转可借助以下运算实现

$$o_{rotated} = Ro\tilde{R} \quad (24)$$

式中, $R = e^{-\theta/2L}$ 称为转动算子, $\tilde{R}$ 表示 R 的共轭

$$R = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - L \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = e^{-\frac{\theta}{2}L_2} \quad (25)$$

其中, L 表示转轴, 由一个标准化的二矢量表示, θ 表示旋转角。

转动算子 R 的共轭算子 $\tilde{R}$ 为

$$\tilde{R} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + L \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = e^{\frac{\theta}{2}L_2} \quad (26)$$

在 CGA 代数中, 刚体 o 的平移可以借助平移算子 T 实现

$$o_{translated} = To\tilde{T} \quad (27)$$

式中, 平移算子 T 定义为

$$T = 1 - \frac{1}{2}te_\infty = e^{-\frac{1}{2}te_\infty} \quad (28)$$

式中, $t = t_1e_1 + t_2e_2 + t_3e_3$ 是一个三维移动矢量, 表示平移的方向和长度, 称之为平移矢量。

平移算子 T 的共轭算子 $\tilde{T}$ 为

$$\tilde{T} = 1 + \frac{1}{2}te_\infty = e^{\frac{1}{2}te_\infty} \quad (29)$$

共形几何代数中旋转和平移的复合在旋量表示下是简单的几何积, 所以刚体运动的运动算子为

$$M = RT \quad (30)$$

称为马达算子。

几何元素 o 的刚体运动可表示为

$$o_{rigid_motion} = Mo\tilde{M} \quad (31)$$

式(31)适用于 CGA 中的如点、线、面、球等所有几何对象的刚体运动。下面以一种空间 6R 串联机构和空间 RRSRR 机构为例, 阐明 CGA 代数相关

理论在空间连杆机构位移分析求解中的应用。

3 空间 6R 串联机构位置逆解

图 3 为如图 2 所示某空间 6R 串联机器人的机构示意图, 该空间机构关节由 6 个转动副 R 组成。第一个关节 R_1 绕 z 轴旋转, 关节 R_2 、 R_3 和 R_5 绕 x 轴旋转, 关节 R_4 和 R_6 绕 y 轴旋转, $L_1 \sim L_6$ 和 L'_1 为各连杆尺度参数, p_i 表示末端执行器的位置。

图 2 机器人三维模型图

图 3 机器人机构简图

空间 6R 串联机构的运动学参数如列表 2 所示。

表 2 空间 6R 串联机构运动学参数

已知参数	描述	待求参数	描述
p_i	操作末端位置	$\theta_1 \sim \theta_6$	各关节角度
n_i	操作末端方位	$P_1 \sim P_6$	各关节位置
π_i	操作末端平面	$P_1 = e_0$	
$L_1 \sim L_6, L'_1$	各连杆的长度		

空间串联机构位置逆解就是已知操作末端的位置 p_i 以及姿态 n_i 、 π_i , 求解机构各关节变量 $\theta_1 \sim \theta_6$ 。基于 CGA 求解逆运动学求解主要思路是: 首先通过构建共形几何代数框架内的球、圆、直线、平面等基本几何体, 通过几何体的外积运算获得各关节点的位置; 然后, 利用过关节点的直线以及平面构造内积, 得出机构所有关节变量的转角余弦表达式, 进而获得空间串联机构的位置逆解解析解。

3.1 求解关节 R_5 和 R_6 的位置 P_5 、 P_6

如图 3 所示, 关节 R_6 绕连杆 L_5 所在的直线转动, 因此, 关节 R_5 、 R_6 和 p_i 在同一直线上, 也就是, 与操作末端的方向 n_i 一致, 根据式(28)得关节点 R_6 的平移旋量为

$$T_6 = 1 + \frac{1}{2} L_6 n_i e_\infty \quad (32)$$

由式(27), 可知关节 R_6 的位置 P_6 为

$$P_6 = T_6 p_i \tilde{T}_6 \quad (33)$$

同理, 关节 R_5 的平移旋量为

$$T_5 = 1 + \frac{1}{2} (L_5 + L_6) n_i e_\infty \quad (34)$$

关节 R_5 的位置 P_5 的位置为

$$P_5 = T_5 p_i \tilde{T}_5 \quad (35)$$

3.2 求解关节 R_1 和 R_2 的位置 P_1 、 P_2

由图 3 可知, 关节 R_1 的位置 P_1 为原点 e_0 , 辅助点 P_{h1} 在 z 轴上, 离原点距离为 L_1 , 根据表 1 中对应 CGA 表示为

$$P_{h1} = L_1 e_3 + \frac{1}{2} L_1^2 e_\infty + e_0 \quad (36)$$

由表 1, 过点 P_{h1} 且平行于 xy 平面的 π_0 为

$$\pi_0 = e_3 + L_1 e_\infty \quad (37)$$

设 yz 平面为 π_1 , 由表 1, 有

$$\pi_1 = e_1 \quad (38)$$

由图 3 可知, 关节点 P_{h1} 、 P_i ($i=1-5$) 在同一面 π_2 内, 则

$$\pi_2^* = P_1 \wedge P_{h1} \wedge P_5 \wedge e_\infty \quad (39)$$

图 3 所示, 以关节点 P_{h1} 为圆心, L'_1 为半径的球面 S_{12} 的共形几何代数表达

$$S_{12} = P_{h1} - \frac{1}{2} L_1'^2 e_\infty \quad (40)$$

两个平面 π_0 、 π_2 与球面 S_{12} 相交, 可产生点对

$$P_{p2} = \pi_0 \wedge \pi_2 \wedge S_{12} \quad (41)$$

由式(23), 可从点对 P_{p2} 中获得其中的点, 任意选择一点, 作为关节 P_2 的位置。关节 P_2 的几何求解简图如图 4 所示。

图 4 p_2 点、 p_3 点求解简图

3.3 求解关节 R_3 和 R_4 的位置 P_3 、 P_4

由图 3 可知, 以 P_2 为球心, L_2 为半径的球面 S_{23} 可表示为

$$\mathbf{S}_{23} = \mathbf{P}_2 - \frac{1}{2}L_2^2\mathbf{e}_\infty \quad (42)$$

与以 $\mathbf{P}_3$ 为球心, d 为半径的球面 $\mathbf{S}_{53}$ 可表示为

$$\mathbf{S}_{53} = \mathbf{P}_3 - \frac{1}{2}d^2\mathbf{e}_\infty \quad (43)$$

式中, $d = \sqrt{L_3^2 + L_4^2}$ 。

球面 $\mathbf{S}_{23}$ 、 $\mathbf{S}_{53}$ 与平面 π_2 相交可得一点对 $\mathbf{P}_{p3}$

$$\mathbf{P}_{p3} = \mathbf{S}_{23} \wedge \mathbf{S}_{53} \wedge \pi_2 \quad (44)$$

由(23), 可从点对 $\mathbf{P}_{p3}$ 中任选一点, 作为关节 $\mathbf{P}_3$ 的位置。关节 $\mathbf{P}_3$ 的几何求解简图如图 4 所示。

同理, 由图 3 易知, 以 $\mathbf{P}_3$ 为球心, L_3 为半径的球面 $\mathbf{S}_{34}$, 和以 $\mathbf{P}_5$ 为球心, L_4 为半径的球面 $\mathbf{S}_{54}$ 的共形几何代数形式分别为

$$\mathbf{S}_{34} = \mathbf{P}_3 - \frac{1}{2}L_3^2\mathbf{e}_\infty \quad (45)$$

$$\mathbf{S}_{54} = \mathbf{P}_5 - \frac{1}{2}L_4^2\mathbf{e}_\infty \quad (46)$$

球面 $\mathbf{S}_{34}$ 、 $\mathbf{S}_{54}$ 与 π_2 相交可得一点对 $\mathbf{P}_{p4}$

$$\mathbf{P}_{p4} = \mathbf{S}_{34} \wedge \mathbf{S}_{54} \wedge \pi_2 \quad (47)$$

由式(23), 可从点对 $\mathbf{P}_{p4}$ 中任意选择一点, 作为关节 $\mathbf{P}_4$ 的位置。关节点 $\mathbf{P}_4$ 的几何求解示意图如图 5 所示。

图 5 $\mathbf{P}_4$ 点求解简图

3.4 求解各关节角

确定关节点 $\mathbf{P}_i$ ($i=1\sim6$) 的位置后, 由表 1 可以获得过各关节点的直线 $\mathbf{l}_i$ 以及平面 π_3 , 即

$$\mathbf{l}_1^* = \mathbf{P}_{h1} \wedge \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{e}_\infty \quad (48)$$

$$\mathbf{l}_2^* = \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_3 \wedge \mathbf{e}_\infty \quad (49)$$

$$\mathbf{l}_3^* = \mathbf{P}_3 \wedge \mathbf{P}_4 \wedge \mathbf{e}_\infty \quad (50)$$

$$\mathbf{l}_4^* = \mathbf{P}_4 \wedge \mathbf{P}_5 \wedge \mathbf{e}_\infty \quad (51)$$

$$\mathbf{l}_5^* = \mathbf{P}_5 \wedge \mathbf{P}_6 \wedge \mathbf{e}_\infty \quad (52)$$

$$\pi_3^* = \mathbf{P}_4 \wedge \mathbf{P}_5 \wedge \mathbf{P}_t \wedge \mathbf{e}_\infty \quad (53)$$

根据式(22)可求得关节角 θ_i ($i=1\sim6$) 的余弦为

$$\cos \theta_1 = \frac{\pi_1^* \cdot \pi_2^*}{\|\pi_1^*\| \|\pi_2^*\|} \quad (54)$$

$$\cos \theta_2 = \frac{\mathbf{l}_1^* \cdot \mathbf{l}_2^*}{\|\mathbf{l}_1^*\| \|\mathbf{l}_2^*\|} \quad (55)$$

$$\cos \theta_3 = \frac{\mathbf{l}_2^* \cdot \mathbf{l}_3^*}{\|\mathbf{l}_2^*\| \|\mathbf{l}_3^*\|} \quad (56)$$

$$\cos \theta_4 = \frac{\pi_2^* \cdot \pi_3^*}{\|\pi_2^*\| \|\pi_3^*\|} \quad (57)$$

$$\cos \theta_5 = \frac{\mathbf{l}_4^* \cdot \mathbf{l}_5^*}{\|\mathbf{l}_4^*\| \|\mathbf{l}_5^*\|} \quad (58)$$

$$\cos \theta_6 = \frac{\pi_3^* \cdot \pi_t^*}{\|\pi_3^*\| \|\pi_t^*\|} \quad (59)$$

由式(54)~(59), 可反解出各个关节的两个角度, 需要代入位置正运动学, 可分别得到各个角度的唯一解, 从而得到机器人运动学位置逆解的所有解析解。空间串联机构位置正运动学的 CGA 方法推导过程如下。

机器人正运动学就是在给定机器人各个关节变量 $\theta_1 \sim \theta_6$ 和结构参数的条件下, 求解机器人的末端位姿。传统机构学与机器人学理论中, 建立坐标系之间的方法一般是 D-H 方法^[11], 相邻的两坐标系 $\{i-1\}$ 与 $\{i\}$ 之间的关系, 可以通过图 6 中的各个参数来描述。

图 6 空间相邻坐标系之间变换

设两相邻连杆坐标系之间的相对运动关系的运动算子为 ${}^{i-1}\mathbf{M}_i$, 根据式(25)~(30)可得

$${}^{i-1}\mathbf{M}_i = \mathbf{R}_{\theta_i} \mathbf{T}_{d_i} \mathbf{R}_{\alpha_i} \mathbf{T}_{a_i} \quad (60)$$

式中, $\mathbf{R}_{\theta_i}$ 为绕轴 z_{i-1} 转过 θ_i 角, $\mathbf{T}_{d_i}$ 为沿 z_{i-1} 轴平移 d_i , $\mathbf{R}_{\alpha_i}$ 沿 x_i 轴旋转 α_i 角。

由式(31)可得,任意自由度为 n 的空间串联机构的变换方程 CGA 表达式为

$${}^0M_n = {}^0M_1 {}^1M_2 \cdots {}^{n-1}M_n \quad (61)$$

根据式(61)可得空间 6R 串联机构的各关节 CGA 表达式为

$$\begin{cases} P_2 = ({}^1M_2)P_1({}^1\tilde{M}_2) \\ P_3 = ({}^1M_2 {}^2M_3)P_1({}^2\tilde{M}_3 {}^1\tilde{M}_2) \\ P_4 = ({}^1M_2 {}^2M_3 {}^3M_4)P_1({}^3\tilde{M}_4 {}^2\tilde{M}_3 {}^1\tilde{M}_2) \\ P_5 = ({}^1M_2 {}^2M_3 {}^3M_4 {}^4M_5)P_1({}^4\tilde{M}_5 {}^3\tilde{M}_4 {}^2\tilde{M}_3 {}^1\tilde{M}_2) \\ P_6 = ({}^1M_2 {}^2M_3 \cdots {}^5M_6)P_1({}^5\tilde{M}_6 {}^4\tilde{M}_5 \cdots {}^1\tilde{M}_2) \end{cases} \quad (62)$$

同理,空间串联机构操作末端抓手的位姿 CGA 可描述为

$$\begin{cases} p_t = {}^1M_7 P_1 {}^1\tilde{M}_7 \\ n = {}^1M_7 e_3 {}^1\tilde{M}_7 \\ \pi_t = {}^1M_7 e_1 {}^1\tilde{M}_7 \end{cases} \quad (63)$$

其中, ${}^1M_7 = {}^1M_2 {}^2M_3 {}^3M_4 {}^4M_5 {}^5M_6 {}^6M_7$ 。

由式(54)~(59)求得 $\theta_i = \pm \arccos(\cos(\theta_i))$ ($i=1 \sim 6$)依次代入式(62)、(63),与已知值进行验证,可确定 θ_i ($i=1 \sim 6$)的唯一值。

上述求解推导过程与坐标系无关,获得的解均可以清晰地表达机器人的几何结构与机器人运动之间的几何关系,具有明显的几何直观性。

4 空间 RRSRR 机构位移分析

空间 RRSRR 机构如图 7 所示,机构由构件 1、2、3、4 及机架 0 组成,包括 4 个转动副 R 和 1 个球面副 S。构件 1 为原动件, θ_1 为输入角, θ_5 为输出角。建立右手坐标系,其中 z_i 轴沿各运动副轴线, z_1 、 z_2 、 z_4 和 z_5 轴为相应转动副轴线, z_3 轴取平行于 z_2 , x 轴沿两相邻 z 轴的公垂线, y 轴省略。

图 7 RRSRR 机构简图

空间 RRSRR 机构位移分析的已知结构参数和待求参数如表 3 所示。

表 3 空间 RRSRR 机构位移分析参数

已知参数	描述	待求参数	描述
$a_{12} \sim a_{51}$ $d_1 \sim d_5$	结构参数	$P_{A'} \sim P_{E'}$	各关节点位置
$A(o)$	原点	θ_2, θ_4	关节转角
θ_1	输入角	θ_5	输出角

空间 RRSRR 机构位移分析就是已知机构结构参数以及输入角 θ_1 求解输出角 θ_5 。该问题的输入输出位移参数具有强非线性,求解过程是典型的几何运动学非线性代数方程组求解问题。以往的相关研究均采用经典的空间机构学位移分析代数法求解方法与步骤,存在求解方法不统一、求解过程缺乏几何直观性、数学专业知识要求高等难题。本文将共形几何代数引入空间机构位移分析中,实现了共形几何代数统一框架内完成几何建模以及免消元计算,推导过程简洁,求解具有几何直观性。具体求解步骤如下。

4.1 求解关节点 B 和 B' 的位置 P_B 、 $P_{B'}$

由图 7 可知,由点 A(与原点 o 共点)到关节点 B 的运动可描述为:沿 z_1 平移 d_1 ,沿 z_1 旋转 θ_1 ,沿 x_2 平移 a_{12} 。由式(24)~(30)可知,点 A 到关节点 B 的运动算子 ${}^A M_B$ 可表示为

$$\begin{aligned} {}^A M_B &= T_{1z} R_{1z} T_{2x} \\ T_{1z} &= 1 - \frac{1}{2} d_1 e_3 e_\infty \\ R_{1z} &= \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) e_{12} \\ T_{2x} &= 1 - \frac{1}{2} a_{12} e_1 e_\infty \end{aligned} \quad (64)$$

由图 7 可知,由关节点 B 到关节点 B' 的运动可描述为:沿 X_2 旋转 a_{12} ,沿 Z_2 平移 d_2 。由式(24)~(30)可知,关节点 B 到关节点 B' 的运动算子可表示为

$$\begin{aligned} {}^B M_{B'} &= R_{2x} T_{2z} \\ R_{2x} &= \cos\left(\frac{\alpha_{12}}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha_{12}}{2}\right) e_{23} \\ T_{2z} &= 1 - \frac{1}{2} d_2 e_3 e_\infty \end{aligned} \quad (65)$$

由式(31),关节点 B 和 B' 的位置矢量 P_B 、 $P_{B'}$ 可表示为

$$P_B = {}^A M_B P_A {}^A \tilde{M}_B \quad (66)$$

$$\mathbf{P}_{B'} = ({}^A\mathbf{M}_B {}^B\mathbf{M}_{B'})\mathbf{P}_A ({}^B\tilde{\mathbf{M}}_{B'} {}^A\tilde{\mathbf{M}}_B) \quad (67)$$

由式(64)、(65)可知, 关节点 B 和 B' 的位置矢量 $\mathbf{P}_B$, $\mathbf{P}_{B'}$ 表达式中仅含有单变量输入角 θ_1 。

4.2 求解关节点 D' 和 D 的位置 $\mathbf{P}_{D'}$ 、 $\mathbf{P}_D$

由图 7 可知, 由点 A 到关节点 D' 的反向运动可描述为: 沿 x_1 旋转 $-\alpha_{51}$, 沿 x_1 平移 $-a_{51}$, 沿 z_5 旋转 $-\theta_5$, 沿 z_5 平移 $-d_5$, 沿 x_5 平移 $-a_{45}$ 。由式(24)~(30)可知, 关节点 A 到关节点 D' 的运动算子可表示为

$$\begin{aligned} {}^A\mathbf{M}_{D'} &= \mathbf{R}_{1x}^- \mathbf{T}_{1x}^- \mathbf{R}_{5z}^- \mathbf{T}_{5z}^- \mathbf{T}_{5x}^- \\ \mathbf{R}_{1x}^- &= \cos\left(-\frac{\alpha_{51}}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\alpha_{51}}{2}\right) \mathbf{e}_{23} \\ \mathbf{T}_{1x}^- &= 1 - \frac{1}{2}(-a_{51})\mathbf{e}_1\mathbf{e}_\infty \\ \mathbf{R}_{5z}^- &= \cos\left(-\frac{\theta_5}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\theta_5}{2}\right) \mathbf{e}_{12} \\ \mathbf{T}_{5z}^- &= 1 - \frac{1}{2}(-d_5)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_\infty \\ \mathbf{T}_{5x}^- &= 1 - \frac{1}{2}(-a_{45})\mathbf{e}_1\mathbf{e}_\infty \end{aligned} \quad (68)$$

由图 7 可知, 由关节点 $\mathbf{P}_{D'}$ 到关节点 $\mathbf{P}_D$ 的逆向运动可描述为: 沿 X_5 旋转 $-\alpha_{45}$, 沿 Z_4 平移 $-d_4$ 。由式(24)~(30)可知, 关节点 D' 到关节点 D 的运动算子可表示为

$$\begin{aligned} {}^{D'}\mathbf{M}_D &= \mathbf{R}_{5x}^- \mathbf{T}_{4z}^- \\ \mathbf{R}_{5x}^- &= \cos\left(-\frac{\alpha_{45}}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\alpha_{45}}{2}\right) \mathbf{e}_{23} \\ \mathbf{T}_{4z}^- &= 1 - \frac{1}{2}(-d_4)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_\infty \end{aligned} \quad (69)$$

由式(31), 关节点 D' 和 D 的位置矢量 $\mathbf{P}_{D'}$, $\mathbf{P}_D$ 可表示为

$$\mathbf{P}_{D'} = ({}^A\mathbf{M}_{D'})\mathbf{P}_A ({}^A\tilde{\mathbf{M}}_{D'}) \quad (70)$$

$$\mathbf{P}_D = ({}^A\mathbf{M}_{D'} {}^{D'}\mathbf{M}_D)\mathbf{P}_A ({}^{D'}\tilde{\mathbf{M}}_D {}^A\tilde{\mathbf{M}}_{D'}) \quad (71)$$

由式(68)、(69)可知, 关节点 D' 和 D 的位置矢量 $\mathbf{P}_{D'}$, $\mathbf{P}_D$ 表达式中仅含有单变量输出角 θ_5 。

4.3 确定关节点 C 的位置 $\mathbf{P}_C$ 的位置

由图 7 可知, 关节点 C 同时在以关节点 B 为球心, 以 $\sqrt{d_2^2 + a_{23}^2}$ 为半径的球面 $\mathbf{S}_{BC}$; 以关节点 B' 为球心, 以 a_{23} 为半径的球面 $\mathbf{S}_{B'C}$; 以关节点 D 为球心, 以 a_{34} 为半径的球面 $\mathbf{S}_{DC}$ 以及以关节点 D' 为球心, 以 $\sqrt{d_4^2 + a_{34}^2}$ 为半径的球面 $\mathbf{S}_{D'C}$ 上。由外积的几何性质有

$$\mathbf{P}_{C_1} = (\mathbf{S}_{BC} \wedge \mathbf{S}_{B'C} \wedge \mathbf{S}_{DC} \wedge \mathbf{S}_{D'C})I_c$$

$$\mathbf{S}_{BC} = \mathbf{P}_B - \frac{1}{2}(d_2^2 + a_{23}^2)\mathbf{e}_\infty$$

$$\mathbf{S}_{B'C} = \mathbf{P}_{B'} - \frac{1}{2}a_{23}^2\mathbf{e}_\infty$$

$$\mathbf{S}_{DC} = \mathbf{P}_D - \frac{1}{2}a_{34}^2\mathbf{e}_\infty$$

$$\mathbf{S}_{D'C} = \mathbf{P}_{D'} - \frac{1}{2}(d_4^2 + a_{34}^2)\mathbf{e}_\infty \quad (72)$$

将式(66)、(67)、(70)、(71)代入式(72), 展开可得

$$\mathbf{P}_{C_1} = W_1\mathbf{e}_1 + W_2\mathbf{e}_2 + W_3\mathbf{e}_3 + W_4\mathbf{e}_\infty + W_5\mathbf{e}_0 \quad (73)$$

式中, $W_1 \sim W_5$ 为关于 θ_1 、 θ_5 的符号形式表达式, 限于篇幅, 不予详细展开。

按照表 1 中矢量点的 CGA 表达形式, 化简式(73), 可得到关节点 $\mathbf{P}_C$ 的 CGA 规范表达式

$$\mathbf{P}_C = \frac{W_1}{W_5}\mathbf{e}_1 + \frac{W_2}{W_5}\mathbf{e}_2 + \frac{W_3}{W_5}\mathbf{e}_3 + \frac{W_4}{W_5}\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 \quad (74)$$

4.4 一元高次输入输出方程

基于 CGA 代数中点的幂零性质, 式(74)中各系数应满足以下关系

$$\frac{W_4}{W_5} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{W_1}{W_5} \right)^2 + \left(\frac{W_2}{W_5} \right)^2 + \left(\frac{W_3}{W_5} \right)^2 \right] \quad (75)$$

整理式(75)得

$$W_1^2 + W_2^2 + W_3^2 - 2W_4W_5 = 0 \quad (76)$$

展开(76), 可得

$$n_1 + n_2c_5 + n_3s_5 + n_4c_5s_5 + n_5c_5^2 = 0 \quad (77)$$

式中, $c_5 = \cos\theta_5$, $s_5 = \sin\theta_5$, $n_1 \sim n_5$ 为由结构参数组成的符号形式参数。

引入万能公式

$$\begin{cases} c_5 = \frac{1-t_5^2}{1+t_5^2} \\ s_5 = \frac{2t_5}{1+t_5^2} \end{cases} \quad (78)$$

式中, $t_5 = \tan \frac{\theta_5}{2}$ 。

将式(78)代入式(77), 可得

$$\sum_{i=0}^4 m_i t_5^i = 0 \quad (79)$$

式中, $m_0 \sim m_4$ 为由结构参数及已知输入角 θ_1 组成的符号形式的参数。式(79)为空间 RRSRR 机构运动学位移分析关于变量 θ_5 的一元四次输入输出方程, 该方程既没有增根, 也无漏根。

4.5 求解剩余关节转角

求解式(79), 可获得关于输出变量 θ_5 的 4 组根。由式(66)、(67)、(70)、(71)、(74), 通过求出的 θ_5 可确定关节点 B , B' , D' , D 和 C 的相对对应的位置 P_B , $P_{B'}$, $P_{D'}$, P_D 以及 P_C 。

同时, 由图 7 可知, 关节点 C 的位置 P_C 也可由正反两个方向的运动求得。由式(24)~(30)可知, 由关节点 B' 到关节点 C 的正向运动算子可表达为

$$\begin{aligned} {}^{B'}M_C &= R_{2z} T_{3x} \\ R_{2z} &= \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) - e_{12} \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \\ T_{3x} &= 1 - \frac{1}{2} a_{23} e_1 e_\infty \end{aligned} \quad (80)$$

由式(31), 关节点 C 的位置 P_C 可表示为

$$P_C = ({}^A M_B {}^B M_{B'} {}^{B'} M_C) P_A ({}^{B'} \tilde{M}_C {}^B \tilde{M}_{B'} {}^A \tilde{M}_B) \quad (81)$$

式(81)含有关节角度 θ_2 , 展开式(81), 其对应项应该与求得式(74)对应相等, 可求得唯一的 θ_2 值

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \arctan(s_2, c_2) \\ c_2 &= \cos \theta_2 \quad s_2 = \sin \theta_2 \\ c_2 &= \frac{1}{a_{23} y_{12} c_1} \times \\ &\quad \left(-\frac{W_1}{W_5} s_{12} + d_2 s_1 + a_{12} s_{12} c_1 - \frac{W_3}{W_5} c_{12} s_1 + d_1 c_{12} s_1 \right) \\ s_2 &= -\frac{1}{a_{23} s_{12}} \left(-\frac{W_3}{W_5} + d_1 + d_2 c_{12} \right) \quad c_1 = \cos \theta_1 \\ s_1 &= \sin \theta_1 \quad c_{12} = \cos \alpha_{12} \quad s_{12} = \sin \alpha_{12} \end{aligned} \quad (82)$$

同理, 由图 7 可知, 由关节点 D 到关节点 C 的反向运动算子可表达为

$$\begin{aligned} {}^D M_C &= R_{4z}^- T_{4x}^- \\ R_{4z}^- &= \cos\left(-\frac{\theta_4}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\theta_4}{2}\right) (e_{12}) \\ T_{4x}^- &= 1 - \frac{1}{2} (-a_{34}) e_1 e_\infty \end{aligned} \quad (83)$$

由式(31), 关节点 C 的位置 P_C 也可表示为

$$P_C = ({}^A M_{D'} {}^{D'} M_D {}^D M_C) P_A ({}^D \tilde{M}_C {}^{D'} \tilde{M}_D {}^A \tilde{M}_{D'}) \quad (84)$$

式(84)含有关节角度 θ_4 , 展开式(84), 其对应项应该与求得式(74)对应相等, 可求得唯一的 θ_4 值

$$\begin{aligned} \theta_4 &= \arctan(s_4, c_4) \\ c_4 &= \cos \theta_4 \quad s_4 = \sin \theta_4 \\ c_4 &= \frac{1}{a_{34} y_{45} s_5} \left(\frac{W_2}{W_5} c_5 c_{45} s_{51} + \frac{W_2}{W_5} c_{51} s_{45} + \frac{W_3}{W_5} c_{45} c_{51} c_5 - \right. \\ &\quad \left. \frac{W_3}{W_5} s_{45} s_{51} - a_{45} s_{45} s_5 + d_5 c_{45} c_5 + d_4 c_5 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= -\frac{1}{a_{34} s_{45}} \left(\frac{W_3}{W_5} c_{51} + \frac{W_2}{W_5} s_{51} + d_4 c_{45} + d_5 \right) \\ c_5 &= \cos \theta_5 \quad s_5 = \sin \theta_5 \end{aligned}$$

$$c_{ij} = \cos \alpha_{ij} \quad s_{ij} = \sin \alpha_{ij} \quad ij = 51, 45 \quad (85)$$

由上述分析过程可知, 求解过程是与坐标系无关的纯几何语言运算, 最终获得的解都可以明显的表达机构几何结构与运动之间的几何关系, 具有几何直观性。

5 数字实例验证

5.1 数字实例 1

如图 2 所示的空间 6R 串联机器人, 针对该机器人进行实例计算, 以验证新算法的正确性与有效性。主要机械结构参数: $L_1=615$, $L'_1=100$, $L_2=705$, $L_3=135$, $L_4=755$, $L_5=0$, $L_6=85$, 给定的一组初始关节角为 $\theta_1=\pi/2$, $\theta_2=-\pi/3$, $\theta_3=\pi/4$, $\theta_4=-\pi/6$, $\theta_5=-\pi/3$, $\theta_6=-\pi/4$, 根据运动学正解, 很容易求得机器人末端操作器的位姿, 其共形几何代数表示为

$$\begin{cases} p_t = -36.806e_1 + 705.731e_2 + 555.767e_3 + 404143.58e_\infty + e_0 \\ n_t = -0.433e_1 - 0.854e_2 + 0.289e_3 \\ \pi_t = -0.436e_1 + 0.479e_2 + 0.762e_3 + 777.551e_\infty \end{cases} \quad (86)$$

对应的末端位姿矩阵为

$$T = \begin{bmatrix} 0.789 & 149 & -0.435 & 596 & -0.433 & 013 & -36.806 & 080 \\ -0.204 & 247 & 0.478 & 766 & -0.853 & 854 & 705.730 & 785 \\ 0.579 & 247 & 0.762 & 260 & 0.288 & 849 & 555.766 & 615 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

机器人位置逆解就是已知机器人操作末端操作器的位姿 p_t , π_t , n_t , 求解各个关节变量 θ_i 。采用前面所述的方法, 采用计算机代数计算系统 Maple16 进行编程, 推导计算机人位置逆解, 获得的全部 8 组位置逆解如表 3 所示。

表 3 数字实例的 8 组实数解($^\circ$)

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
1	90.000	-60.000	45.000	-150.000	60.000	135.000
2	90.000	-60.000	45.000	-30.000	-60.000	-45.000
3	90.000	74.083	155.276	-29.183	-62.627	-75.504
4	90.000	74.083	155.276	150.817	62.627	104.496
5	-90.000	-128.982	173.655	46.977	36.320	159.703
6	-90.000	-128.982	173.655	-133.023	-36.320	-20.297
7	-90.000	118.083	26.620	153.376	75.072	68.460
8	-90.000	118.083	26.620	-26.624	-75.072	-111.540

表 3 中第二组解与初始值完全一致, 证明了新算法正确有效。

5.2 数字实例 2

如图 7 所示空间 RRSRR 机构, 针对该机构进行实例计算。空间 RRSRR 机构的结构参数如下^[24]:

$a_{12}=9.10$, $a_{23}=-7.80$, $a_{34}=26.30$, $a_{45}=8.93$, $a_{51}=-12.30$; $d_1=1.50$, $d_2=2.10$, $d_4=-26.98$, $d_5=24.23$; $\alpha_{12}=-50.00^\circ$, $\alpha_{45}=27.63^\circ$, $\alpha_{51}=30.00^\circ$ 。

给定输入角 $\theta_1=100^\circ$, 采用前述的方法, 求解该空间机构的位移分析, 可快速获得输出角 θ_5 以及相应关节转角 θ_2 、 θ_4 的全部 4 组位置逆解, 结果如表 3 所示, 所得结果与文献[24]中得到的结果完全一致。

表 3 数字实例的 4 组解

	输出角 $\theta_5 / (^\circ)$	关节转角 $\theta_2 / (^\circ)$	关节转角 $\theta_4 / (^\circ)$
1	87.139 281 98	78.839 800 28	-102.742 504 72
2	63.530 040 66	176.202 770 53	-68.393 425 66
3	-129.435 523 32	-72.283 637 77	-177.070 374 94
4	162.920 953 03	42.565 062 75	-138.373 882 28

上述求解过程在计算机代数计算系统 Maple15 编程, 使用的操作系统为 Microsoft Windows XP, CPU 频率为 2.70 GHz, 内存为 2 GB 的 PC 机中, 算法求解占用内存 38.99 MB, 计算时间为 3.42 s。同等软硬件条件下, 使用文献[12]中 Dixon 结式消元法求解, 计算占用内存为 41.24 MB, 计算时间需要 6.62 s。数字实例表明, 新算法正确有效, 具有较高的运算效率。

6 结论

(1) 总结了目前空间连杆机构位移分析代数求解方法的基本求解步骤, 分析了其存在主要问题以及关键困难。阐述了三种常见的几何代数系统之间联系, 通过对内积、外积几何意义的剖析, 给出了点、线、面、球等基本几何体的内积和外积的表达, 以及空间机构刚体运动的 CGA 表达方法。

(2) 基于共形几何代数提出了一种空间 6R 串联机构位置逆解和空间 RRSRR 机构位移分析的几何建模与免消元求解的新算法。通过共形几何代数的刚体运动描述, 求解了机构几何模型的特征点位置的 CGA 表达, 进而构建了空间球面以及平面等几何体, 基于空间球面和平面的外积运算, 直接导出该空间连杆机构既无增根也无漏根的符号形式一元高次输入输出方程, 进而获得了空间连杆机构位

移分析全部符号形式的解析解。

(3) 突破了传统空间连杆机构位移分析方法的建模与求解必须在不同的数学理论框架进行的难题, 实现了在共形几何代数统一框架内完成空间连杆机构位移分析的几何建模与求解。推导过程与坐标系无关, 避免了传统连杆空间机构位移分析理论中复杂的旋转矩阵运算以及多元高次非线性方程组求解, 求解过程简单, 几何直观性强。为空间连杆机构位移分析提供了一种新的理论参考。

(4) 需要说明的是, 空间连杆机构位移分析研究的关键难题一直在于推导出既无增根也无漏根的一元高次输入输出方程。尽管 CGA 是最近出现的新数学理论, 但该理论并不能自动完成消元, 需要基于深刻理解传统连杆机构学理论消元理论基础上, 巧妙构造几何体的外积, 才能实现真正消元。这篇论文只是作为使用共形几何代数理论求解空间连杆机构位移分析非线性问题的开始, 在共形几何代数统一框架内成功实现了一种空间 6R 串联机构和空间 RRSRR 机构位移分析的几何建模与免消元求解, 验证了共形几何代数的在空间机构位移分析中的正确性与有效性。至于其他空间连杆机构位移分析, 尤其是多元高次非线性几何运动学问题, 如何通过构造点、线、面、球等基本几何元素, 避免增根的出现, 直接获得无增无漏的一元高次输入输出方程, 实现空间机构位移分析非线性问题的几何建模与免消元, 有待后续深入研究。

参 考 文 献

- [1] 廖启征. 连杆机构运动学几何代数求解综述[J]. 北京邮电大学学报, 2010, 33(4): 1-11.
LIAO Qizheng. Geometry algebra method for solving the kinematics of linkage mechanisms[J]. Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications, 2010, 33(4): 1-11.
- [2] FREUDENSTEIN F. Kinematics: Past, present, and future[J]. Mechanism and Machine Theory, 1973, 8(2): 151-161.
- [3] 廖启征, 梁崇高, 张启先. 空间 7R 机构位移分析的新研究[J]. 机械工程学报, 1986, 22(3): 96-99.
LIAO Qizheng, LIANG Chonggao, ZHANG Qixian. New research of displacement analysis of spatial 7R mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 1986, 22 (3): 1-5.
- [4] LIAO Qizheng, LIANG Chonggao, ZHANG Qixian. Synthe-sizing spatial 7R mechanism with 16-assembly configurations[J]. Mechanism and Machine

- Theory, 1993, 28(5): 751-720.
- [5] DUFFY J. Analysis of mechanisms and robot manipulators [M]. London: Edwart Arnold Ltd, 1980.
- [6] SULTAN I A. On the positioning of revolute-joint robot manipulators[J]. Journal of Robotic Systems, 2000, 17(8): 429-438.
- [7] PENNOCK G R, YANG A T. Application of dual-number matrices to the inverse kinematics problem of robot manipulators[J]. Mech. Transm. Autom. Des. , 1985, 107: 201-208.
- [8] KIM J H, KUMAR V R. Kinematics of robot manipulators via line transformations[J]. Robot. Syst. , 1990, 7(4): 649-674.
- [9] QIAO S, LIAO Q, WEI S, et al. Inverse kinematic analysis of the general 6R serial robot mechanism based on double quaternion[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45(2): 193-199.
- [10] 黄昔光, 廖启征. 空间 6R 串联机器人机构位置逆解新算法[J]. 北京航空航天大学学报, 2010, 36(3): 295-298.
HUANG Xiguang, LIAO Qizheng. New algorithm for inverse kinematics of 6R serial robot mechanism[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2010, 36(3): 295-298.
- [11] 张启先. 空间机构的分析与综合(上册)[M]. 北京: 机械工业出版社, 1984.
ZHANG Qixian. Analysis and synthesis of spatial mechanisms[M]. Beijing: China Machine Press, 1984.
- [12] YOUM Y, HUANG T C. Displacement analysis of 4R1G five-link spatial mechanisms using exact solution of four-link spatial mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 1987, 22(3): 189-197.
- [13] YIH T C, YOUM T. Kinematics of spatial mechanisms in matrix notation. Trends and developments in mechanisms, machines, and robotics[C]// Proceedings of the 20th ASME Biennial Mechanisms Conference, Kissimmee: ASME, 1988: 429-433.
- [14] XIE C X, ZHENG S X, QU H H. Configuration analysis of spatial five-link mechanism RRRSR by means of the tensor rotational transformation method[J]. Journal of South China University of Technology, 1980, 8(2): 86-94.
- [15] WALLACE D M, FREUDENSTEIN F. Displacement analysis of the generalized Clemens coupling, the RRSRR spatial linkage[J]. Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, Series B, 1975, 97(2): 575-580.
- [16] DUFFY J. Analysis of mechanisms and robot manipulators[M]. Arnold: Great Britain/Halstead Press, 1980.
- [17] ZHOU Y B, BUCHAL R. Kinematic analysis of the generalized clemens coupling and its variant mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 1997, 32(6): 699-714.
- [18] YANG A T. Displacement analysis of spatial five-link mechanisms using (3×3) matrices with dual-number elements[J]. Transactions of the ASME, J. Eng. Ind., 1969, 91B: 152-157.
- [19] LI Hongbo, HESTENS D, ROCKWOOD A. A universal model for conformal geometries of euclidean, spherical and double-hyperbolic spaces[M]. Berlin Heidelberg: Springer, 2001.
- [20] 李洪波. 共形几何代数: 几何代数的新理论和计算框架[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, 17(11): 2383-2393.
LI Hongbo. Conformal geometric algebra: A new framework for computational geometry[J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2005, 17(11): 2383-2393.
- [21] HESTENES D. New foundations for classical mechanics[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [22] 张英, 魏世民, 李端玲, 等. 平面并联机构正运动学分析的几何建模和免消元计算[J]. 机械工程学报, 2018, 54(19): 27-33.
ZHANG Ying, WEI Shimin, LI Duanling, et al. Geometric modeling and free-elimination computing method for the forward kinematics analysis of planar parallel manipulators[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(19): 27-33.
- [23] HUANG Xiguang, MA Chaoyang, SU Haijun. Geometric algebra algorithm for closed-form forward displacement analysis of 3-PPS parallel mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 137, 280-296.
- [24] LIANG Chonggao, LEE H, LIAO Qizheng. Analysis of spatial linkages and robot mechanisms[M]. Beijing: Beijing University of Posts & Telecommunications Publishing House, 1988.

作者简介: 黄昔光(通信作者), 男, 1979 年出生, 博士, 副教授, 硕士研究生导师。主要研究方向为机构学与机器人学。

E-mail: marchbupt@126.com