DOI: 10.3901/JME.2021.08.166

功能梯度压电材料梁的热-机-电耦合振动及屈曲特性分析*

周凤玺¹ 蒲育^{1,2}

(1. 兰州理工大学土木工程学院 兰州 730050;

2. 兰州工业学院土木工程学院 兰州 730050)

摘要: 为提高梁理论对静动态响应预测的可靠性和准确性, 基于一种 n 阶广义梁理论, 研究外驱动电压及轴向机械载荷共同作用下功能梯度压电材料(Functionally graded piezoelectric material, FGPM)梁在热环境中的耦合振动及屈曲特性。考虑温度沿梁厚按不同类型稳态分布, 采用 Voigt 混合幂率模型表征 FGPM 梁的材料属性, 应用 Hamilton 原理统一实施静态建模, 采用 Navier 法求解 FGPM 简支梁的动态响应。分析不同梁理论、不同温度分布、热-机-电耦合效应、材料组份梯度指标、跨厚比等诸多参数对梁振动频率和屈曲临界载荷特性的影响, 揭示多因素影响下 FGPM 梁耦合屈曲和耦合振动这两类静动态力学行为之间的二元耦合性。结果表明, 通过改变外驱动电压大小和极化方向均可实现 FGPM 梁在热-机-电耦合作用下的振动控制以及稳定性安全设计。

关键词: 功能梯度压电材料梁; 热-机-电效应; n 阶广义梁理论; 耦合振动; 耦合屈曲

中图分类号: O343; TB34

Vibration and Buckling Behaviors of Functionally Graded Piezoelectric Material Beams Subjected to Thermal-mechanical-electrical Loads

ZHOU Fengxi¹ PU Yu^{1,2}

(1. School of Civil Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050;

2. College of Civil Engineering, Lanzhou Institute of Technology, Lanzhou 730050)

Abstract: In order to improve the reliability and accuracy for beam models in predicting static and dynamic responses, vibration and buckling behaviors of functionally graded piezoelectric material(FGPM) beams in thermal environment and under the action of external electric voltage and axial mechanical load are studied based on an n -th order generalized beam theory. Various types of temperature distributions through the thickness of a beam are considered and the piezoelectric material properties are described by Voigt mixture power-law model, static and dynamic models for the system are built using Hamilton principle as a unity and Navier method is utilized to solve the dynamic response for FGPM simply supported beams. The effects of various beam theories, different cases of temperature distribution, thermal-mechanical-electrical loads, material graded index and slenderness ratio on the frequency and critical buckling load of FGPM beams are analyzed. Considering various factors, the binary relations between the coupling buckling and vibration behaviors are also illustrated. The results show that the vibration control and stability design of FGPM beams subjected to thermal-mechanical-electrical loads can be performed by changing the external voltage and polarization direction.

Key words: functionally graded piezoelectric material beams; thermal-mechanical-electrical effects; n -th order generalized beam theory; coupling vibration; coupling buckling

* 国家自然科学基金(51978320, 11962016)、甘肃省基础研究创新群体基金(20JR5RA478)、甘肃省自然科学基金(20JR5RA379)、甘肃省高等学校创新能力提升(2019B-180)和兰州工业学院“启智”人才培养计划基金(2018QZ-05)资助项目。20200502 收到初稿, 20201014 收到修改稿

0 前言

功能梯度压电材料(Functionally graded piezoelectric materials, FGPM)作为当前功能-智能一体化先进复合材料的典型代表, 因其在智能控制、损伤检测、信号传输等方面具有许多优点, 被广泛用于传感器、驱动器、执行器等智能结构(器件)中^[1]。

近年来, 针对 FGPM 梁的力学行为研究主要采用正演分析, 即利用解析方法和数值模拟等手段研究梁的弯曲、振动和屈曲等问题, 包括挠曲电效应下的位移响应输出与应力分布^[2-4]、参数识别与材料组分的优化^[5-7]、振动分析与智能控制^[8-11]、安全性分析与设计^[11-13]等。在弯曲分析中, 基于复合材料压电学弹性理论, 利用 Airy 应力函数法推导获得了 FGPM 悬臂梁的静态弯曲响应^[2-4]。CHUAQUI 等^[7]采用径向基函数法(RBT)数值分析了 FGPM 梁的热-电耦合弯曲特性。此外, 对类似的复合智能材料, 薛立军等^[14]分析了功能梯度形状记忆合金梁的纯弯曲力学行为。在振动和屈曲正演分析方面^[8-13], KOMIJANI 等^[8]应用 Ritz 法数值分析了热-电耦合作用下 FGPM 梁在过屈曲附近的非线性自由振动特性, 结果表明, 改变外驱动电压大小和极化方向均可改变梁的频率。PARASHAR 等^[9]应用广义微分求积法(Generalized differential quadrature, GDQ)研究了 FGPM 梁的挠曲振动特性。需要指出, 为了简化分析, 忽略了剪切变形的作用影响而采用 Euler 梁理论(Classical beam theory, CBT)实施建模^[10-11], 其预测输出响应的精确性值得商榷^[12, 15]。KIANI 等^[12-13]则基于不同的梁理论数值分析了热-电耦合作用下 FGPM 梁的前后屈曲特性, 结果表明, 梁达到耦合屈曲时的临界温度与其温度分布方式密切相关^[12]。此外, EBRAHIMI 等^[16-17]采用 Navier 法分析了磁-电-热以及磁-电-机耦合作用下 FGPM 简支纳米梁的振动和屈曲特性。综上所述, 分析热-机-电耦合作用下 FGPM 梁的振动与屈曲特性关乎智能结构的功能与优化、安全与设计, 但该方面的研究较少, 尤其对这两种力学行为之间二元耦联性的揭示鲜有文献报道, 且其耦合作用机理仍需要进一步探究。

本文采用广义梁理论(Generalized beam theory, GBT), 应用 Hamilton 原理统一建立热-机-电耦合 FGPM 梁振动及屈曲问题的控制方程。采用 Navier 法获得 FGPM 简支梁的动态输出响应, 基于二元耦联性解耦得到屈曲静态响应。分析了多因素对 FGPM 梁耦合振动及耦合屈曲特性的影响, 探讨了

其耦合作用机理, 揭示了两类静动态力学行为之间的二元耦联性。

1 控制方程

1.1 FGPM 梁的物性描述

如图 1 所示, 考虑由两种材料复合而成的 FGPM 梁, 其几何尺寸长×宽×高为 $L \times b \times h$, 上表面为铁磁性材料铁酸钴(CoFe_2O_4), 下表面为压电陶瓷材料钛酸钡(BaTiO_3), 施一向 z 轴极化的恒定外驱动电压 V_0 (图中所示设为正向电压), 两端受初始轴向机械静载荷 N 作用(假设压力为正), 温度 T 沿梁厚度方向稳态分布, 采用 Voigt 混合幂律分布模型来表征 FGPM 梁内一点的材料属性, 各物性参数(弹性模量系数 c_{ij} , 压电模量系数 e_{ij} , 介电系数 s_{ij} , 热膨胀系数 α , 热传导率 κ , 密度 ρ)与坐标 z 可由统一式表示为^[16]

$$P(z) = P_b + (P_u - P_b) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (1)$$

式中, P_b 和 P_u 分别表示下表面 BaTiO_3 和上表面 CoFe_2O_4 这两种材料某一相关的物性参数; p 为 FGPM 梁材料组分的梯度指标。这两种材料的各物性参数由表 1 给出^[16]。

图 1 FGPM 梁的几何尺寸及坐标系

表 1 BaTiO_3 和 CoFe_2O_4 材料的相关物性系数

物性参数	BaTiO_3	CoFe_2O_4
弹性系数 c_{11}/GPa	166	286
弹性系数 c_{55}/GPa	43	45.3
压电系数 $e_{31}/(\text{C} \cdot \text{m}^{-2})$	-4.4	0
压电系数 $e_{15}/(\text{C} \cdot \text{m}^{-2})$	11.6	0
介电系数 $s_{11}/(\text{C}^2 \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{N}^{-1})$	11.2×10^{-9}	0.08×10^{-9}
介电系数 $s_{33}/(\text{C}^2 \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{N}^{-1})$	12.6×10^{-9}	0.093×10^{-9}
热膨胀系数 $\alpha/(1/\text{K})$	15.7×10^{-6}	10×10^{-6}
热传导率 $\kappa/[\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})]$	3.2	2.5
密度 $\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	5 800	5 300

本文考虑如下 3 种升温类型^[18]。

类型 1: 均匀升温(Uniform temperature rise,

UTR)

$$T(z) = T_0 + \Delta T \quad (2)$$

式中, T_0 表示无应力状态时的参考温度, 即取梁下表面的参考温度 $T_0=293$ K 为室温; ΔT 表示升温值。

类型 2: 线性升温(Linear temperature rise, LTR)

$$T(z) = T_b + \Delta T \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right) \quad (3)$$

式中, T_b 表示梁下表面处的温度, 取 $T_b = 293$ K。

类型 3: 非线性升温(Non-linear temperature rise, NLTR), 基于一维稳态热传导方程

$$-\frac{d}{dz} \left(\kappa(z) \frac{dT}{dz} \right) = 0 \quad (4)$$

考虑梁下表面和上表面处的温度边界条件

$$\begin{aligned} T &= T_b & z &= -h/2 \\ T &= T_u & z &= h/2 \end{aligned} \quad (5)$$

将热传导方程式(4)和温度边界条件式(5)联立求解, 非线性升温所对应的温度分布可表述为

$$T(z) = T_b + \frac{\Delta T}{C_p} \sum_{i=0}^5 (-1)^i \frac{\kappa_{ub}^i}{(ip+1)\kappa_b^i} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^{ip+1} \quad (6)$$

式中, 系数 $\kappa_{ub} = \kappa_u - \kappa_b$, 即 κ_{ub} 表示为 FGPM 梁的上下表面 CoFe_2O_4 与 BaTiO_3 这两种材料所对应的热传导率之差; $\Delta T = T_u - T_b$ 为梁上下表面的温度差,

即为升温值; 系数 $C_p = \sum_{i=0}^5 (-1)^i \frac{\kappa_{ub}^i}{(ip+1)\kappa_b^i}$ 。

1.2 耦合振动及屈曲控制方程

采用 n 阶 GBT, 梁内任一点的位移场可描述为

$$\begin{cases} u_x(x, z, t) = u(x, t) - z \frac{dw}{dx} + f(z) \left[\varphi(x, t) + \frac{dw}{dx} \right] \\ u_y(x, z, t) = 0 \\ u_z(x, z, t) = w(x, t) \end{cases} \quad (7)$$

式中, $u(x, t)$ 、 $w(x, t)$ 、 $\varphi(x, t)$ 分别表示梁轴线上一点的轴向位移、横向位移及截面转角; $f(z) = z - h(2z/h)^n / (2n)$ 为 n 阶广义梁理论(GBT)对应的剪切形函数。显然, 取 $n=1, 3, \infty$ 时, GBT 可分别退化为 Euler 梁理论(CBT)、Reddy 三阶剪切梁理论(TBT)以及 Timoshenko 梁理论(FSBT)^[18]。

由几何方程可得非零应变分量为

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{du}{dx} - z \frac{d^2w}{dx^2} + f(z) \left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d^2w}{dx^2} \right) \\ \gamma_{xz} = \frac{df}{dz} \left(\frac{dw}{dx} + \varphi \right) \end{cases} \quad (8)$$

基于压电学线弹性理论, 本构方程为

$$\begin{cases} \sigma_x = c_{11}\varepsilon_x - c_{11}\alpha\Delta T - e_{31}E_z \\ \tau_{xz} = c_{55}\gamma_{xz} - e_{15}E_x \\ D_x = e_{15}\gamma_{xz} + s_{11}E_x \\ D_z = e_{31}\varepsilon_x + s_{33}E_z \end{cases} \quad (9)$$

式中, $D_i (i=x, z)$ 为电位移分量; $E_i (i=x, z)$ 为电场强度分量。

由 Maxwell 电位移守恒方程

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

为遵从 Maxwell 电位移守恒方程式(10), FGPM 梁内任一点的电位函数可设为^[16]

$$\phi(x, z, t) = -\cos(\beta z)\phi_E(x, t) + \frac{2z}{h}V_0 \quad (11)$$

式中, $\beta = \frac{\pi}{h}$; V_0 为初始外驱动电压; $\phi_E(x, t)$ 为梁轴线上一点的电位。

电场强度分量可由电位函数进一步表示为

$$\begin{cases} E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \cos(\beta z) \frac{\partial \phi_E}{\partial x} \\ E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\beta \sin(\beta z)\phi_E - \frac{2V_0}{h} \end{cases} \quad (12)$$

结构动能的一阶变分为

$$\delta K = \int_0^L \int_A \rho(z) \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{\partial \delta u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial t} \frac{\partial \delta u_z}{\partial t} \right) dA dx \quad (13)$$

结构应变能的一阶变分为

$$\delta U = \int_0^L \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} - D_x \delta E_x - D_z \delta E_z) dA dx \quad (14)$$

热-机-电载荷作功的一阶变分为

$$\delta W = \int_0^L (N_E - N_T - N) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} dx \quad (15)$$

式中, N_E 和 N_T 分别表示电轴力和热轴力, 这两类轴力分别定义为

$$N_E = \int_A e_{31}(z) \frac{2V_0}{h} dA \quad (16)$$

$$N_T = \int_A c_{11}(z) \alpha(z) (T - T_0) dA \quad (17)$$

对系统应用 Hamilton 原理

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta U - \delta W) dt = 0 \quad (18)$$

为了便于下文由位移法求解动态响应, 将式(8)~(10)以及式(12)~(15)代入式(18), 进行变分和积分运算化简后可得热-机-电耦合 FGPM 梁的自由振动控制方程为

$$S_1 \frac{d^2 u}{dx^2} + S_3 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + S_7 \frac{d^3 w}{dx^3} + E_{31} \frac{d\phi_E}{dx} = I_1 \ddot{u} + I_3 \ddot{\varphi} + I_7 \frac{d\ddot{w}}{dx} \quad (19a)$$

$$S_3 \frac{d^2 u}{dx^2} + S_6 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + S_8 \frac{d^3 w}{dx^3} - S_0 \left(\frac{dw}{dx} + \varphi \right) + (E_{15} + E_{33}) \frac{d\phi_E}{dx} = I_3 \ddot{u} + I_6 \ddot{\varphi} + I_8 \frac{d\ddot{w}}{dx} \quad (19b)$$

$$S_7 \frac{d^3 u}{dx^3} + S_8 \frac{d^3 \varphi}{dx^3} + S_9 \frac{d^4 w}{dx^4} - S_0 \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} \right) + (E_{33} + E_{15} - E_{32}) \frac{d^2 \phi_E}{dx^2} + (N_T + N - N_E) \frac{d^2 w}{dx^2} = I_7 \frac{d\ddot{u}}{dx} + I_8 \frac{d\ddot{\varphi}}{dx} - I_1 \ddot{w} + I_9 \frac{d^2 \ddot{w}}{dx^2} \quad (19c)$$

$$E_{31} \frac{du}{dx} + (E_{33} + E_{15}) \frac{d\varphi}{dx} + S_{11} \frac{d^2 \phi_E}{dx^2} - S_{33} \phi_E + (E_{33} + E_{15} - E_{32}) \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (19d)$$

式中, 各弹性系数定义为

$$S_0 = \int_A c_{55} f'^2 dA$$

$$\{S_i\} = \int_A c_{11}(z) \{1, z, f, z^2, zf, f^2\} dA \quad i=1, 2, \dots, 6$$

$$S_7 = S_3 - S_2 \quad S_8 = S_6 - S_5 \quad S_9 = S_4 + S_6 - 2S_5$$

各惯性系数定义为

$$\{I_i\} = \int_A \rho(z) \{1, z, f, z^2, zf, f^2\} dA \quad i=1, 2, \dots, 6$$

$$I_7 = I_3 - I_2 \quad I_8 = I_6 - I_5 \quad I_9 = I_4 + I_6 - 2I_5$$

各压电系数定义为

$$\{E_{31}, E_{32}, E_{33}\} = \int_A e_{31} \beta \sin(\beta z) \{1, z, f\} dA$$

$$E_{15} = \int_A e_{15} f' \cos(\beta z) dA$$

$$S_{11} = \int_A s_{11} \cos^2(\beta z) dA$$

$$S_{33} = \int_A s_{33} \beta^2 \sin^2(\beta z) dA$$

自由振动控制方程式(19)中与时间 t 无关时, 则退化为热-机-电 FGPM 梁的耦合屈曲方程。此外,

考虑到下文仅考虑简支梁情况, 由 Hamilton 原理导出的力学及电学边界条件, 这里不再详述。

2 特征值问题及求解

为满足简支 FGPM 梁的力学以及电学边界条件, 应用 Navier 法, 梁轴线上一点的位移分量及电位可由 Fourier 级数展开为

$$\begin{Bmatrix} u(x,t) \\ \varphi(x,t) \\ w(x,t) \\ \phi_E(x,t) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_m \cos \lambda_m x \\ \varphi_m \cos \lambda_m x \\ w_m \sin \lambda_m x \\ \phi_m \sin \lambda_m x \end{Bmatrix} \exp(i\omega_m t) \quad (20)$$

式中, i 为虚数单位; $\lambda_m = m\pi/L$; ω_m 为 m 阶固有频率。将式(20)代入控制方程式(19)可得 FGPM 简支梁耦合振动的特征值问题, 由矩阵方程可表示为

$$[\mathbf{K} - \omega_m^2 \mathbf{M}] \mathbf{X} = 0 \quad (21)$$

式中, $\mathbf{K}$ 与 $\mathbf{M}$ 均为 4 阶对称阵; 位移列矢量 $\mathbf{X} = (u_m, \varphi_m, w_m, \phi_m)^T$; 刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 中各元素为

$$\begin{aligned} k_{11} &= S_1 \lambda_m^2 & k_{12} &= S_3 \lambda_m^2 & k_{13} &= S_7 \lambda_m^3 & k_{14} &= -E_{31} \lambda_m \\ k_{22} &= S_0 + S_6 \lambda_m^2 & k_{23} &= S_0 \lambda_m + S_8 \lambda_m^3 \\ k_{24} &= -(E_{15} + E_{33}) \lambda_m \\ k_{33} &= S_9 \lambda_m^4 + \lambda_m^2 [S_0 + (N_E - N_T - N)] \end{aligned}$$

$$k_{34} = -(E_{33} + E_{15} - E_{32}) \lambda_m^2 \quad k_{44} = -(S_{33} + S_{11} \lambda_m^2)$$

对称矩阵 $\mathbf{M}$ 中各元素

$$\begin{aligned} m_{11} &= I_1 & m_{12} &= I_3 & m_{13} &= I_7 \lambda_m & m_{14} &= 0 \\ m_{22} &= I_6 & m_{23} &= I_8 \lambda_m & m_{24} &= 0 & m_{33} &= I_1 + I_9 \lambda_m^2 \\ m_{34} &= 0 & m_{44} &= 0 \end{aligned}$$

将矩阵 $\mathbf{K}$ 与矩阵 $\mathbf{M}$ 分块后进行解耦运算, 可进一步化为标准特征值问题, 进而获得振动频率和相应的振型。由屈曲与振动两类问题的二元耦联性解耦, 即通过刻画频率-机械力、频率-外电压、频率-升温等重要关系曲线, 编写相应的循环子程序, 寻求频率的零值而获得耦合屈曲静态响应参数, 如屈曲临界载荷、临界电压、临界升温值等重要参数。

不失一般性, 引入以下归一化参数

$$(\xi, \bar{u}_m, \bar{w}_m, \bar{\phi}_m) = \frac{1}{L} (x, u_m, w_m, \phi_m) \quad \bar{\varphi}_m = \varphi_m$$

$$\lambda = \frac{L}{h} \quad N_p = \frac{NL^2}{(c_{11})_u I} \quad N_{cr} = \frac{NL^2}{(c_{11})_u I}$$

$$\Omega_m = \omega_m L^2 \sqrt{\frac{\rho_u A}{(c_{11})_u I}} \quad (22)$$

式中, N_p 为量纲一轴向机械载荷; N_{cr} 为量纲一屈曲临界载荷; Ω_m 为 m 阶量纲一频率; λ 为几何参数跨厚比; $I = bh^3/12$ 为惯性矩; $(c_{11})_u$ 和 ρ_u 分别表示梁上表面 CoFe_2O_4 材料的弹性系数 c_{11} 和密度。

3 振动频率及屈曲临界载荷分析

3.1 数值结果及 GBT 阶数 n 值的有效性

作为本文数值结果的有效性验证, 取参数 $n=3$, $\Delta T=0$ K, $\lambda=20$, 表 2 给出了外电压 V_0 驱动下 FGPM 简支梁的量纲一基频 Ω_1 值, 表 3 则给出了机-电耦合作用下 FGPM 简支梁的量纲一屈曲临界载荷 N_{cr} 值, 同时与文献[16-17]的数值结果分别进行比较, 两者均采用 TBT, 本文结果与其几乎相同, 进而间接性验证了本文数值结果的有效性和精确性。

表 2 FGPM 简支梁的量纲一基频 Ω_1 结果比较

电压 V_0/V	基频 Ω_1	梯度指标 p		
		0.2	1	5
-5	文献[16]	9.432 05	8.846 45	8.552 59
	本文	9.432 047	8.846 448	8.552 585
0	文献[16]	9.304 65	8.444 76	7.868 15
	本文	9.304 649	8.444 761	7.868 148
+5	文献[16]	9.175 48	8.022 99	7.118 20
	本文	9.175 482	8.022 989	7.118 202

表 3 FGPM 简支梁的量纲一临界载荷 N_{cr} 结果比较

电压 V_0/V	临界载荷 N_{cr}	梯度指标 p		
		0.2	1	5
-5	文献[17]	9.174 07	8.320 57	8.010 24
	本文	9.174 065	8.320 572	8.010 238
0	文献[17]	8.927 91	7.582 11	6.779 47
	本文	8.927 911	7.582 110	6.779 469
+5	文献[17]	8.681 76	6.843 65	5.548 70
	本文	8.681 757	6.843 649	5.548 699

图 2a~2c 和图 3 分别反映了正向外电压驱动下 FGPM 梁的前三阶量纲一频率 Ω 和量纲一屈曲临界载荷 N_{cr} 随 GBT 阶数 n 的变化关系曲线, 取参数为 $p=1$, $\lambda=5$, $V_0=+5$ V。由图 2a~2c 和图 3 可以看出, 前三阶频率 Ω 及临界载荷 N_{cr} 均随 n 的增加呈波动变化, 且随着正整数 n 的逐渐增大, Ω 及 N_{cr} 值都

将趋于稳定, 直至趋于 $\text{FSBT}(n=\infty)$ 的预测值; 除 $n=1$ (CBT) 外, 取偶数时 Ω 与 N_{cr} 的预测值均高于取奇数时的预测值; 取 $n=2$, Ω 及 N_{cr} 的预测值均为最大, 取 $n=3$ (TBT), 其预测值皆为最小。由图 2 可知, CBT 与 TBT 相比, CBT 高估了 FGPM 梁的前三阶频率值, 基频 Ω_1 相对误差为 1.807 59%, 二阶频率 Ω_2 相对误差达 5.384 77%, 三阶频率 Ω_3 相对误差可达 7.531 96%, 即随着振型阶次的增加, 其相对误差将愈加明显, 换言之, 在 FGPM 梁的高频振动分析中, 采用 CBT 预测的频率不够准确。由图 3 可知,

图 2 前三阶量纲一频率随 GBT 阶数 n 的变化曲线

CBT 与 TBT 相比, CBT 也高估了 FGPM 梁的屈曲临界载荷 N_{cr} 值, 其相对误差达 4.670 79%。这是由于 CBT 忽略了剪切作用的影响, 同时注意到算例中跨厚比 $\lambda=5$ 为短梁, 进而 CBT 明显高估了短梁结构的整体刚度。因此在 FGPM 梁结构的高频振动响应分析、高精度信号传输、稳定安全性设计及智能控制等方面, CBT 对 FGPM 短梁输出响应的预测不够准确, 其误差影响不容小觑。

图 3 量纲一临界载荷随 GBT 阶数 n 的变化曲线

综上所述, 为提高梁理论对 FGPM 梁结构输出响应预测的可靠性和精确性, 另一方面, 为使 FGPM 梁的稳定性设计偏于安全、同时也便于工程中使用, 不论对于短粗梁还是细长梁, 建议 GBT 的阶数取 $n \geq 3$ 的奇数为宜。

3.2 其他因素对频率和临界载荷的影响

本节算例中, 取 $n=3$, 均采用 TBT 梁模型, 主要探讨多因素对热-机-电耦合作用下 FGPM 简支梁振动频率和屈曲临界载荷的影响、同时揭示屈曲与振动这两类静动态力学行为之间的二元耦合性。

图 4 反映了机-电耦合作用下 FGPM 梁的基频-轴向机械力 (Ω_1-N_p) 变化关系曲线, 取参数 $p=1$, $\lambda=20$ 。从 N_p 正半轴来看, 各曲线的 Ω_1 值都随量纲一轴向压力 N_p 的增大而单调减小, 直至 $\Omega_1=0$, 此时梁发生机-电耦合屈曲而失稳, 换言之, Ω_1 曲线与 N_p 轴交点的横坐标为各自外驱动电压作用时所对应的量纲一屈曲临界载荷 N_{cr} 值, 同时这也表明了由振动到屈曲状态这两类静动态力学行为转化之间的二元耦合性。相反地, 各 Ω_1 曲线值均随轴拉力 N_p 的增加而增大。取相同的 N_p 值, 反向驱动电压高于正向电压 V_0 作用所对应的基频 Ω_1 值, 且反向电压 V_0 值越大, 则 Ω_1 越大; 正向电压 V_0 值越大, Ω_1 反而越小; $V_0=0$ V 对应的 Ω_1 曲线则介于其间。当梁达到机-电耦合屈曲时, 反向电压 V_0 越大, N_{cr} 值也越大; 正向电压 V_0 越大, N_{cr} 反而越小。这是由于正向驱动电压沿梁的厚度

方向极化产生的电轴力为压力, 但反向电压极化产生拉轴力, 对电压驱动和机械力作用于梁而产生的两类轴力而言, 压轴力均将削弱梁抵抗弯曲变形及抗失稳的能力, 进而结构的整体刚度降低了, 因此 Ω_1 和 N_{cr} 都随两类压轴力的增加而减小了。

图 4 量纲一基频随量纲一轴向机械力的变化曲线

图 5 给出了 3 种升温类型 UTR、LTR 及 NLTR 下 FGPM 梁 ($p=1$) 横截面的平均热应力 σ_0 随升温 ΔT 变化的关系曲线: 3 种温度分布下对应的 σ_0 均随 ΔT 的增加而单调增大; 取相同的升温 ΔT 值, UTR 分布下 σ_0 增加最为显著, LTR 次之, NLTR 分布较为缓和; 当 ΔT 较小时 (如 $\Delta T \leq 100$ K), LTR 与 NLTR 分布下对应的 σ_0 值则十分接近。考虑到热轴力则为压轴力, 换言之, 随着 ΔT 的增加, 3 类温度分布下对应的热轴力都增大, 但 UTR 分布下热轴力增加最为显著, 故而升温相同时, UTR 分布使得 FGPM 梁的基频 Ω_1 、屈曲载荷 N_{cr} 以及临界升温值 ΔT_{cr} 值减小最为明显, LTR 次之, NLTR 则最为缓和。

图 5 梁横截面的平均热应力随升温的变化曲线

图 6 考虑了 3 种升温类型下的热-电以及热-机-电耦合效应, 在同一坐标系下刻画了 FGPM 梁的 $\Omega_1-\Delta T$ 和 $N_{cr}-\Delta T$ 这两类关系曲线, 取参数为 $p=1$, $\lambda=20$, $V_0=+10$ V。由图 6 可知, Ω_1 和 N_{cr} 均随升温

ΔT 的增加而单调减小, 直至达到各自临界升温值 ΔT_{cr} 而发生热-电耦合屈曲而失稳, 即 $\Delta T = \Delta T_{cr}$ 时, $\Omega_1 = 0$, $N_{cr} = 0$ 。这是因为此时热-电轴力值刚好达到使梁发生耦合屈曲的临界压力值, 临界失稳载荷此时完全由电-热轴力提供, 从而 $N_{cr} = 0$ 。另一方面, 耦合屈曲为临界平衡状态, 因而此时 $\Omega_1 = 0$, 这再次表明了振动及屈曲这两类问题之间的二元耦联性。且同一升温类型下的 Ω_1 和 N_{cr} 两类曲线与横轴交于同一点, 该点的横坐标即为 ΔT_{cr} 值, 即该值可由 Ω_1 - ΔT 曲线的基频零点值来确定, 同时计算结果表明, $\Delta T_{cr} = 126.8 \text{ K (UTR)}$ 、 252.6 K (LTR) 、 265.1 K (NLTR) , 以上数值结果也正好印证了算例图 5 的结论。

图 6 量纲一基频及临界屈曲载荷随升温的变化曲线

图 7 与图 8 均考虑了 NLTR 升温、分别反映了 FGPM 梁的 Ω_1 - ΔT 和 N_{cr} - ΔT 两类关系曲线, 取参数为 $p=1$, $\lambda=20$ 。由图 7 与图 8 可知, 各 Ω_1 与 N_{cr} 值均随升温 ΔT 的增加而单调减小, 当 $\Delta T = \Delta T_{cr}$ 时, $\Omega_1 = 0$, 且 $N_{cr} = 0$, 此时梁发生热-电耦合屈曲而失稳。此外, 对同一外驱动电压 V_0 而言, 图 7 与图 8 得出了相同的临界升温 ΔT_{cr} 值, 且计算结果表明, 当 $V_0 = -10 \text{ V}$, $\Delta T_{cr} = 390.1 \text{ K}$; 当 $V_0 = -5 \text{ V}$, $\Delta T_{cr} = 358.0 \text{ K}$; 当 $V_0 = 0 \text{ V}$, $\Delta T_{cr} = 329.9 \text{ K}$; 当 $V_0 = +5 \text{ V}$, $\Delta T_{cr} = 296.1 \text{ K}$;

图 7 热-电耦合 FGPM 梁的基频随升温变化曲线

图 8 热-机-电耦合 FGPM 梁的临界载荷随升温变化曲线

当 $V_0 = +10 \text{ V}$, $\Delta T_{cr} = 265.1 \text{ K}$ 。这也表明了正向外驱动电压降低了梁的自振频率以及耦合屈曲时的临界升温 ΔT_{cr} 值, 但反向电压作用时其结果正好与正向外电压驱动相反, 无外电场作用则介于其间。

图 9 考虑了 NLTR 升温以及热-机-电耦合效应, 给出了 5 种梯度指标 p 值对应下 FGPM 梁的 Ω_1 - V_0 曲线, 其中取参数 $\Delta T = 100 \text{ K}$, $N_p = 5$, $\lambda = 20$ 。由该图可见, 当 $p=0$ 时, 基频 Ω_1 不随外驱动电压 V_0 的变化而改变。这是由于 FGPM 此时退化为纯 CoFe_2O_4 材料, 由于该材料的压电模量系数 e_{31} 和 e_{15} 均为 0 的缘故。从 V_0 轴负半轴自左向右来看: 除 $p=0$ 以外, 其余各 Ω_1 曲线值均随反向驱动电压的减小而减小。此外, FGPM 梁达到热-机-电耦合屈曲时所对应的临界外驱动电压 V_{cr} 即为各 Ω_1 曲线与 V_0 轴交点的横坐标值, 此时 $\Omega_1 = 0$, 再次表明了二元耦联性。

图 9 热-机-电耦合 FGPM 梁的基频随外电压变化的曲线

图 10a、10b 考虑了 NLTR 升温 $\Delta T = 100 \text{ K}$, 分别给出了热-电耦合作用下 FGPM 梁的 Ω_1 - λ 关系曲线。图 10a 中, 取 $V_0 = +10 \text{ V}$, 图 10b 中, 取 $V_0 = -10 \text{ V}$ 。由图 10a 可知, 在正向电压驱动下, 随着跨厚比 λ 的增加, 各 Ω_1 曲线值起先略有增大, 之后明显单调

减小, 直至达到各自临界跨厚比 λ_{cr} 值时梁发生热-电耦合屈曲而失稳, 即当 $\lambda=\lambda_{cr}$ 时, 基频 $\Omega_1=0$; 取相同的 λ 值, p 值越大, 即随着 BaTiO₃ 材料组份的增加, 基频 Ω_1 越小, 当达到耦合屈曲时 λ_{cr} 值也越小。由图 10b 可知, 在反向电压驱动下, 各 Ω_1 曲线值随 λ 的逐渐增加而增大。此外, 当 $\lambda<20$, p 值越大, 基频 Ω_1 越小, 当 $\lambda>22$ 以后, p 值越大, 基频 Ω_1 也越大。这是由材料组份、跨厚比、热-电耦合效应共同作用影响导致的, 此时表现出多因素影响下复杂的耦合特性。

图 10 热-电耦合 FGPM 梁的基频随跨厚比的变化曲线

图 11 考虑了 NLTR 升温、给出了热-电耦合作用下 FGPM 梁的 Ω_1-p 关系曲线, 其中参数取为 $\lambda=20$, $\Delta T=100$ K。由图 11 可知, 各 Ω_1 曲线值先随 p 的增加迅速减小, 之后趋于缓慢。这是由于 p 增加的起始阶段, CoFe₂O₄ 材料的组份骤减, 因而梁的整体刚度迅速弱化的缘故。特别地, 当 $p=0$ 时, 各 Ω_1 曲线交于同一点, 这再次表明频率 Ω_1 此时不随外驱动电压 V_0 的变化而改变。此外, 取相同的 p 值, 反向电压 V_0 越大, 基频 Ω_1 值也越大; 正向电压 V_0 越大, Ω_1 值反而越小。

图 11 热-电耦合 FGPM 梁的基频随梯度指标的变化曲线

4 结论

(1) 为提高梁理论对 FGPM 梁结构输出响应预测的可靠性和精确性, 同时也便于工程中使用, 不论对短粗梁还是细长梁, GBT 的阶数取 $n \geq 3$ 的奇数为宜。

(2) 对热轴力、电轴力、轴向机械力这 3 类压轴力而言, 虽然作用方式不同, 但影响机理相类似, 即频率、临界载荷及临界升温值均随这 3 类压轴力的增加而减小。正向电压极化产生压轴力, 反向电压极化产生拉轴力。随着机-电拉轴力的增加, 提高了梁结构的整体刚度, 因而频率、临界载荷及临界升温值增大, 抗失稳能力提高。

(3) 梁的基频随着压电材料 BaTiO₃ 组份的逐渐增加而减小, 与此同时逆压电效应对其频率影响则趋于愈加明显; 正向电压驱动下, 随着跨厚比的增加, 基频起先略有增大, 随后显著单调减小, 直至达到临界跨厚比发生屈曲而失稳, 但反向电压驱动下基频值则随跨厚比的逐渐增加而显著增大。

(4) 首次揭示了热-机-电作用下 FGPM 梁耦合屈曲和耦合振动这两类静动态力学行为之间的二元耦联性, 为 FGPM 梁的静动态力学特性研究提供了一种切实可行、行之有效的分析方法、同时为其功能优化和安全设计提供了必要的理论依据和参考。

参 考 文 献

- [1] 裴进浩, 姜皓, 季宏丽, 等. 功能梯度压电驱动器的结构设计、制备与功能验证[J]. 光学与精密工程, 2009, 17(1): 118-125.
- QIU Jinhao, JIANG Hao, JI Hongli, et al. Design, fabrication and performance evaluation of functionally gradient piezoelectric actuator[J]. Optics and Precision

- Engineering, 2009, 17(1): 118-125.
- [2] SHI Z F, CHEN Y. Functionally graded piezoelectric cantilever beam under load[J]. Archive of Applied Mechanics, 2004, 74(3-4): 237-247.
- [3] 于涛, 仲政. 功能梯度压电悬臂梁的弯曲分析[J]. 中国科学 G 辑 物理学 力学 天文学, 2006, 36(5): 518-529.
YU Tao, ZHONG Zheng. Bending analysis for functionally graded piezoelectric cantilever beam[J]. Science in China Series. G Physics, Mechanics & Astronomy, 2006, 36(5): 518-529.
- [4] XIANG H J, SHI Z F. Static analysis for functionally graded piezoelectric actuators or sensors under a combined electro-thermal load[J]. European Journal of Mechanics A/Solids, 2009, 28: 338-346.
- [5] 向宏军, 石志飞. 梯度功能压电材料的一组参数识别[J]. 北京交通大学学报, 2006, 30(1): 30-39.
XIANG Hongjun, SHI Zhifei. Parameter identification methods for a functionally gradient piezoelectric material[J]. Journal of Beijing Jiaotong University, 2006, 30(1): 30-39.
- [6] YANG J, XIANG H J. Thermo-electro-mechanical characteristics of functionally graded piezoelectric actuators[J]. Smart Materials and Structures, 2007, 17(3): 114-125.
- [7] CHUAQUI T R C, ROQUE C M C. Analysis of functionally graded piezoelectric Timoshenko smart beams using a multiquadric radial basis function method[J]. Composite Structures, 2017, 176: 640-653.
- [8] KOMIJANI M, KIANI Y, ESFAHANI S E, et al. Vibration of thermo-electrically post-buckled rectangular functionally graded piezoelectric beams[J]. Composite Structures, 2013, 98: 143-152.
- [9] PARASHAR S K, SHARMA P. Modal analysis of shear-induced flexural vibration of FGPM beam using generalized differential quadrature method[J]. Composite Structures, 2016, 139: 222-232.
- [10] SU Zhu, JIN Guoyong, YE Tianguai. Vibration analysis and transient response of a functionally graded piezoelectric curved beam with general boundary conditions[J]. Smart Materials and Structures, 2016, 25(6): 214-225.
- [11] FU Yiming, WANG Jianzhe, MAO Yiqi. Nonlinear analysis of buckling, free vibration and dynamic stability for the piezoelectric functionally graded beams in thermal environment[J]. Applied Mathematical Modelling, 2012, 36: 4324-4340.
- [12] KIANI Y, REZAEI M, TAHERI S. Thermo-electrical buckling of piezoelectric functionally graded material Timoshenko beams[J]. International Journal of Mechanics and Materials in Design, 2011(7): 185-197.
- [13] SHE Guilin, SHU Xin, REN Yiru. Thermal buckling and postbuckling analysis of piezoelectric FGM beams based on high-order shear deformation theory[J]. Journal of Thermal Stresses, 2017, 40(6): 783-797.
- [14] 薛立军, 兑关锁, 刘兵飞. 功能梯度形状记忆合金梁纯弯曲的理论分析[J]. 机械工程学报, 2012, 48(22): 40-45.
XUE Lijun, DUI Guansuo, LIU Bingfei. Theoretical analysis of functionally graded shape memory alloy beam[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(22): 40-45.
- [15] 赵凤群, 王忠民. 计及不同剪切变形的功能梯度材料梁的弯曲分析[J]. 机械工程学报, 2014, 50(1): 104-110.
ZHAO Fengqun, WANG Zhongmin. Bending analysis of functionally graded materials beam considering different shear deformation theory[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(1): 104-110.
- [16] EBRAHIMI F, MOHAMMAD R B. Vibration analysis of smart piezoelectrically actuated nanobeams subjected to magneto-electrical field in thermal environment[J]. Journal of Vibration and Control, 2016, 24(3): 549-564.
- [17] EBRAHIMI F, MOHAMMAD R B. Magnetic field effects on buckling behavior of smart size-dependent graded nanoscale beams[J]. The European Physic Journal Plus, 2016, 131: 1-14.
- [18] 蒲育, 周凤玺. 湿-热-机耦合作用下多孔功能梯度梁的振动及屈曲特性[J]. 复合材料学报, 2019, 36(12): 2975-2983.
PU Yu, ZHOU Fengxi. Vibration and buckling behaviors of porous functionally graded material beams subjected to hygro-thermal-mechanical effects[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2019, 36(12): 2975-2983.

作者简介: 周凤玺(通信作者), 男, 1979 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为复合材料结构的力学行为和岩土力学。

E-mail: geolut@163.com

蒲育, 男, 1984 年出生, 博士研究生, 副教授。主要研究方向为多场耦合新型功能材料结构的力学行为及数值分析方法。

E-mail: shifopuyu@126.com