DOI: 10.3901/JME.2021.07.117

具有连续光滑特性的结合面接触刚度模型^{*}

李 玲 云强强 王晶晶 东亚斌 史小辉

(西安建筑科技大学机电工程学院 西安 710055)

摘要: 结合面接触刚度直接影响着机械系统的静、动态力学性能和精度保持性水平。基于微凸体在弹性、弹塑性以及完全塑性接触变形过程中, 接触刚度具有连续、光滑特性的思想, 首先提出利用 Hermite 多项式插值函数, 来弥补单一微凸体接触刚度建模时存在的不连续等缺陷, 建立了具有连续光滑特性的单一微凸体接触刚度新模型; 然后基于统计学方法, 建立了结合面的法向接触刚度模型; 最后将所建模型与 GW、ZMC、KE 和 BRAKE 模型进行对比分析。结果表明: 本文模型实现了单一微凸体接触刚度在不同接触状态之间连续且光滑地转变; 对于光滑表面形貌, 基于 GW、ZMC、KE 以及 BRAKE 模型预测的接触刚度与本文模型结果的差异较小, 其中本文模型最接近于纯弹性的 GW 模型; 当表面粗糙度增大时, GW 模型与其他几种模型的差异逐渐增大, 此时本文模型与考虑微凸体多种变形阶段的 ZMC 模型吻合较好; 再次表明载荷与表面粗糙度是影响刚度的两个主要因素, 即随着载荷的增大或表面粗糙度的减小, 接触刚度递增。

关键词: 结合面; Hermite 多项式插值函数; 弹塑性状态; 接触刚度; 接触载荷

中图分类号: TH113

A Continuous and Smooth Contact Stiffness Model for Mechanical Joint Surfaces

LI Ling YUN Qiangqiang WANG Jingjing DONG Yabin SHI Xiaohui

(School of Mechanical and Electrical Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055)

Abstract: The contact stiffness of the joint surface directly affects the static and dynamic properties and accuracy levels of the mechanical system. Based on the concept that the transitions from elastic, through elastoplastic, to fully plastic deformation of the asperity contact stiffness is continuous and smooth. The Hermite polynomial interpolation method is employed to correct the defect of discontinuity in the traditional asperity stiffness model, and a new stiffness model of a single asperity is proposed, which changes continuously and smoothly at transit points. Then, a normal contact stiffness model of the joint surface is developed based on statistical methods. Finally, the differences between the GW, ZMC, KE, BRAKE models and the proposed model are analyzed. The results show that the proposed model realizes the asperity contact stiffness changes continuously and smoothly between different deformation regimes. For smooth surface, the difference between different models is small, and the proposed model is close to the GW model. However, the difference between the GW model and other models becomes larger as the roughness increases, and the proposed model agrees well with the ZMC model that consider the multiple deformation regimes of the asperity. It is shown again that load and surface roughness are the two main influencing factors of contact stiffness, the contact stiffness increases with the increase of contact load or the decrease of surface roughness.

Key words: joint surface; Hermite polynomial interpolation function; elastoplastic regime; contact stiffness; contact load

0 前言

机械结合面在机械系统运行过程中起着传递运

动、载荷和能量的重要作用, 同时也是导致机械系统力学行为复杂和性能退化的根源^[1]。研究表明^[2-4], 机床中结合面的接触刚度约占机床总刚度的 60%~80%, 其特性变化直接影响着机床的静态、动态力学性能和精度保持性水平^[5-6]。因此, 开展结合面接触刚度理论建模与动力学特性分析, 是机

^{*} 国家自然科学基金(51975449, 51305327)和陕西省自然科学基金(2018JM5066)资助项目。20200410 收到初稿, 20201115 收到修改稿

械系统由单件分析走向整机分析的关键,对整机性能的评估与优化设计具有重要的理论指导意义。

实际上,结合面复杂的力学行为来源于表面上微凸体间的相互影响、相互制约以及相互依赖。这种相互作用引起微凸体接触状态不断转变,依次经历弹性、弹塑性和完全塑性三个阶段^[7]。其中,基于 HERTZ 接触理论可进行弹性变形阶段的研究^[7],利用线性硬度模型可表征完全塑性变形阶段的接触特征^[8],而在弹塑性变形阶段的微凸体接触问题就变得极为复杂。CHANG 等^[9]基于微凸体接触变形过程中体积守恒原则建立了粗糙表面的弹-塑性接触模型,简称 CEB(CHANG-ETSION-BOGY)模型,该模型同时考虑了微凸体的弹性与塑性接触变形机制,并给出了微凸体变形由弹性过渡为塑性时的临界接触点,但该模型忽略了微凸体的弹塑性变形机制,且在临界屈服点处,接触压力直接从 $2KH/3$ 突然跳跃至 KH (其中, K 表示最大接触压力系数, H 表示较软材料的硬度)。为弥补 CEB 模型的不足, ZHAO 等^[10]将表面微凸体的接触变形分为弹性、弹塑性以及完全塑性变形阶段,并利用数学多项式插值函数建立了一种粗糙表面的弹塑性接触模型,简称 ZMC(ZHAO-MAIETTA-CHANG)模型,该模型实现了接触载荷和平均接触压力在弹性屈服点与塑性临界接触点的连续性,但却不具有光滑特性,所以基于此模型建立的接触刚度模型在临界点处是不连续的。与 ZMC 模型类似, LIN 等^[11]采用幂函数方程建立了弹塑性变形阶段的接触模型,也实现了弹性与塑性之间的过渡。KOGUT 和 ESTION^[12, 13]基于有限元法求解了单个球体与刚性平面的接触问题,并使用幂函数经验公式拟合出了有限元的理论近似解,建立粗糙表面的弹塑性接触模型,简称 KE 模型,该模型进一步将微凸体的弹塑性接触变形区分为两个子区域,但在弹性与塑性接触变形的临界点处,由于 KE 模型获得的接触载荷是不连续的,从而引起其刚度模型的不连续性。JACKSON 和 GREEN^[14]采用比 KE 模型更细的网格,建立了新的单个微凸体与刚性平面的有限元接触模型,简称 JG 模型,该模型考虑了微凸体变形过程中材料属性、几何尺寸以及硬度变化的影响。结果表明微凸体的弹性接触变形不仅发生在 $[0, \delta_c]$ 内,甚至可以达到 $1.9\delta_c$ (δ_c 表示弹性屈服点处的接触变形量),但 JG 模型却没有给出开始发生塑性变形时的临界点。同时,上述几种微观接触模型的差异也被研究, BEHESHTI 和 KHONSARI^[15]分别将 CEB、ZMC、KE 以及 JG 接触模型应用到干摩擦线接触表面的建

模中,并考虑了微凸体所在基体的弹性变形,分析了各种模型在预测线接触表面接触压力分布、接触宽度以及真实接触面积时的差异。BRAKE 等^[16]采用 Hermite 多项式插值函数,提出了一种在微凸体的不同接触变形之间,接触载荷光滑且连续变化的粗糙表面弹塑性接触模型,但由于 Hermite 多项式阶次较高,获得的弹塑性阶段的接触载荷与变形量之间的关系出现振荡,尤其是对于长间隔的弹塑性接触区域,从而导致使用其所建立的接触刚度模型也出现振荡,甚至出现负刚度的情况,这是不合理的。

为此,本文在上述文献的基础上,考虑了微凸体产生弹性、弹塑性和完全塑性三个变形阶段的连续光滑特性,修正了微凸体在弹塑性变形阶段的接触刚度模型,提出了一种在不同接触状态之间,微凸体接触刚度满足连续且光滑变化的新模型。并在此基础上,结合微凸体高度分布概率密度函数,建立了更加准确的结合面接触刚度模型,对比分析了 GW(GREENWOOD-WILLIAMSON)^[17]、ZMC、KE、BRAKE 模型与本文模型之间的差异,获得重要结论。论文研究结果为结合面的刚度计算、性能预测与优化提供更加准确的理论依据和试验参考。

1 单一微凸体的接触刚度

结合面的力学行为可以等效为一个粗糙表面与一个刚性光滑平面的接触问题^[5],如图 1a、1b 所示。与 GW 模型基本假设类似,将微凸体峰顶等效成相同的半球体,其曲率半径为 R ,高度服从高斯分布,且微凸体之间相互独立。当两者间施加一法向载荷时,微凸体将产生法向变形量 ω ,图 1c 所示。图中虚线为微凸体原始形状,实线为变形后的形状, z 为微凸体高度, d 为微凸体高度平均平面与理想刚性光滑平面之间的距离,则根据几何关系可知 $\omega=z-d$ 。

由图 1c 可知,当法向载荷逐渐增大到超过材料的屈服极限时,微凸体就会发生弹塑性或者完全塑性接触变形。微凸体由弹性变形转变为弹塑性变形时的临界接触变形量为^[9]

$$\omega_c = \left(\frac{\pi KH}{2E} \right)^2 R \quad (1)$$

式中, H 为较软材料的硬度; R 为曲率半径; E 为材料的复合弹性模量, $E = [(1-\mu_1)/E_1 + (1-\mu_2)/E_2]^{-1}$, E_1 和 E_2 分别为两表面材料的弹性模量, μ_1 和 μ_2 分别为相应的泊松比; K 为最大接触压力因子,其值与较软材料的泊松比 μ 有关, $K=0.454+0.41\mu$ 。

完全塑性接触变形开始时的临界变形量 ω_p 与初始屈服变形量 ω_c 的关系为^[10]

$$\omega_p = 110\omega_c \quad (2)$$

基于式(1)和式(2), 将微凸体的接触变形分为弹性、弹塑性和塑性三个阶段。为便于叙述, 本文最后分析弹塑性变形阶段的接触刚度建模方法。

(a) 两个粗糙表面的法向接触

(b) 光滑刚性平面与一等效粗糙表面的接触

(c) 单个微凸体与光滑刚性平面的接触

图 1 粗糙表面的接触及其等效接触模型

1.1 弹性接触

当 $\omega < \omega_c$ 时, 微凸体处于弹性接触状态, 根据 HERTZ 接触理论, 可得微凸体接触载荷 f_e 与变形 ω 之间的关系

$$f_e(\omega) = \frac{4}{3}ER^{1/2}\omega^{3/2} \quad (3)$$

由 $k = df/d\omega$, 可得微凸体的接触刚度

$$k_e(\omega) = 2ER^{1/2}\omega^{1/2} \quad (4)$$

1.2 塑性接触

当 $\omega > \omega_p$ 时, 微凸体处于完全塑性接触变形阶段, 接触载荷 f_p 、接触刚度 k_p 与变形 ω 之间的关系分别为^[10]

$$f_p(\omega) = 2\pi R\omega H \quad (5)$$

$$k_p(\omega) = 2\pi RH \quad (6)$$

1.3 弹塑性接触

当 $\omega_c \leq \omega \leq \omega_p$ 时, 微凸体处于混合弹塑性变形阶段。在此阶段的起始与终点处, 接触载荷与接触刚度应满足连续光滑条件。因此, 本文利用 Hermite 多项式插值函数改弹塑性阶段的接触刚度模型, 以

实现微凸体接触载荷与刚度在临界点处的连续性与光滑性。

基于 BRAKE 模型中的 Hermite 三次多项式插值函数, 弹塑性阶段的接触载荷可表示为^[16]

$$\bar{f}_{ep}(\bar{\omega}) = \frac{f_{ep}(\omega)}{f_c(\omega_c)} = 1 + \frac{3}{2}(\bar{\omega} - 1) + \frac{6q - 3qK + K}{2K(q-1)^2} \times (\bar{\omega} - 1)^2 + \frac{K - 6q - 6 + 3qK}{2K(q-1)^3} (\bar{\omega} - 1)^2 (\bar{\omega} - q) \quad (7)$$

式中, $f_c(\cdot)$ 表示初始屈服点处的接触载荷, 根据式(1)和式(3)可得 $f_c(\omega_c) = 2\pi KHR\omega_c/3$; $q = \omega_p/\omega_c$, $\bar{\omega}$ 表示无量纲的变形量, $\bar{\omega} = \omega/\omega_c$; $\bar{f}_{ep}(\cdot)$ 为弹塑性变形阶段的无量纲接触载荷, 其满足在此阶段的开始与结束处连续且光滑地变化, 即

$$\begin{cases} \bar{f}_{ep}(1) = \bar{f}_e(1) & \bar{f}_{ep}(q) = \bar{f}_p(q) \\ \bar{f}'_{ep}(1) = \bar{f}'_e(1) & \bar{f}'_{ep}(q) = \bar{f}'_p(q) \end{cases} \quad (8)$$

式中, $\bar{f}_e(\cdot)$ 和 $\bar{f}_p(\cdot)$ 分别表示无量纲弹性与塑性阶段的接触载荷; $\bar{f}'_e(\cdot)$ 、 $\bar{f}'_{ep}(\cdot)$ 和 $\bar{f}'_p(\cdot)$ 分别表示三个阶段接触载荷的一阶导数, 其中

$$\bar{f}'_e(\bar{\omega}) = \frac{f'_e(\omega)}{f'_c(\omega_c)} = \frac{3}{2}\bar{\omega}^2 \quad (9)$$

$$\bar{f}'_p(\bar{\omega}) = \frac{f'_p(\omega)}{f'_c(\omega_c)} = \frac{3\bar{\omega}}{K} \quad (10)$$

为改进接触刚度模型, 将单个微凸体的接触载荷与变形转换成对数坐标, 并将他们重新定义为

$$\begin{cases} \bar{f}_{e,p}^*(\cdot) = \ln \bar{f}_{e,p}(\cdot) \\ \bar{\omega}_{c,p}^* = \ln \bar{\omega}_{c,p} & \bar{\omega}^* = \ln \bar{\omega} \end{cases} \quad (11)$$

式中, $\bar{\omega}_c$ 、 $\bar{\omega}_p$ 分别表示弹性和塑性临界点处的无量纲接触变形。

通过方程式(11)的对数变换可减小混合弹塑性变形阶段的插值间隔长度, 将原来的插值区间(1, 110)减小为(0, $4.7 \approx \ln 100$), 进而降低了接触载荷的振荡性。另外, 弹性与塑性变形阶段接触载荷与变形之间的非线性关系也被分别简化为一阶线性的函数关系, 即

$$\bar{f}_e^*(\bar{\omega}) = \frac{3}{2} \ln \bar{\omega} \quad (12)$$

$$\bar{f}_p^*(\bar{\omega}) = \ln \bar{\omega} - \ln(3/K) \quad (13)$$

选择弹塑性接触阶段的 Hermite 多项式插值函数为 3 阶, 则通过对数变换后的弹塑性接触载荷可表示为

$$\bar{f}_{ep}^*(\bar{\omega}) = C_1 \ln \bar{\omega} + C_2 (\ln \bar{\omega})^2 + C_3 (\ln \bar{\omega})^2 (\ln \bar{\omega} - \ln q) \quad (14)$$

式中, C_1 , C_2 , C_3 表示 Hermite 多项式插值函数的系数项, 分别表示为

$$C_1 = \frac{3}{2} \quad C_2 = \frac{\ln \frac{3q}{K} - \frac{3}{2} \ln q}{(\ln q)^2} \quad C_3 = \frac{\frac{5}{2} \ln q - 2 \ln \frac{3q}{K}}{(\ln q)^3} \quad (15)$$

根据方程式(11), 可得笛卡儿坐标系下的弹塑性接触载荷

$$\bar{f}_{ep}(\bar{\omega}) = \exp(\bar{f}_{ep}^*(\bar{\omega})) \quad (16)$$

将式(14)、(15)代入式(16), 则通过对数转换后, 微凸体弹塑性变形区域的接触载荷为

$$f_{ep}(\omega) = \frac{2}{3} \pi K H R \omega_c \times \exp \left[C_1 \left(\ln \frac{\omega}{\omega_c} \right) + C_2 \left(\ln \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 + C_3 \left(\ln \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \left(\ln \frac{\omega}{\omega_p} \right) \right] \quad (17)$$

由于方程(17)具有连续光滑的数学特性, 所以可直接对其进行求导, 获得微凸体弹塑性变形区的法向接触刚度为

$$k_{ep}(\omega) = \frac{2}{3} \pi K H R \omega_c \times \exp \left[C_1 \left(\ln \frac{\omega}{\omega_c} \right) + C_2 \left(\ln \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 + C_3 \left(\ln \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \left(\ln \frac{\omega}{\omega_p} \right) \right] \times \left\{ \frac{C_1}{\omega} + \frac{2C_2}{\omega} \left(\ln \frac{\omega}{\omega_c} \right) + C_3 \times \left[\frac{2}{\omega} \left(\ln \frac{\omega}{\omega_c} \right) \left(\ln \frac{\omega}{\omega_p} \right) + \frac{1}{\omega} \left(\ln \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \right] \right\} \quad (18)$$

图2显示了基于本文所提模型获得的单个微凸体法向接触载荷 f_a 和接触刚度 k_a 分别与变形量的关系。由图可知, 本文所提模型预测的微凸体接触载荷与接触刚度均满足在混合弹塑性变形的开始($\omega/\omega_c=1$)与结束($\omega/\omega_c=110$)处连续且光滑地变化, 这符合实际微凸体接触特性参数连续且光滑变化的数学特征。

图2 本文模型预测的微凸体接触载荷与接触刚度

1.4 模型比较

为比较各模型的优劣性, 选用的计算参数分别为: $E=207 \text{ GPa}$, $\mu=0.29$, $H=1.96 \text{ GPa}$, $R=0.62 \text{ mm}$ ^[10]。采

用 GW^[17]、ZMC^[10]、KE^[12, 13]和 BRAKE^[16]四种经典的接触模型与本文模型进行对比分析, 获得的不同模型下单个微凸体接触载荷曲线的对比如图3所示。

图3 不同模型下微凸体接触载荷与变形量的关系

由图3可知, GW模型计算的接触载荷随着变形量的增大而连续光滑地递增, 但由于其仅考虑了微凸体的纯弹性变形, 导致当微凸体发生弹塑性或塑性变形时, 基于GW模型的预测结果与其他几种考虑微凸体多种变形过程的模型的差距较大。对于KE模型, 接触载荷在弹性临界点($\omega/\omega_c=1$)和塑性临界点($\omega/\omega_c=110$)处均是不连续的, 此外, KE模型将混合弹塑性变形区分为两个子区域, 但在这两个区域的转换点处($\omega/\omega_c=6$)接触载荷也是不连续的, 如局部放大图所示。BRAKE模型预测的接触载荷却是振荡的, 这是由于其接触载荷表达式的阶次较高引起的。对于ZMC模型, 载荷在微凸体的整个变形过程中是连续的, 但在临界接触点处却是不光滑的。而本文模型预测的接触载荷随着变形的增大而连续光滑地递增, 且其与ZMC模型的吻合程度较高, 尤其在变形量 $\omega=54\omega_c$ 之后, 本文模型基本上与ZMC模型完全重合。因此, 本文模型增强了接触载荷在不同变形阶段转化点处的连续性与光滑性, 从而弥补了上述几种模型的缺陷。

不同模型下单个微凸体的接触刚度对比如图4所示。由图可知, 对于GW模型, 由于其仅考虑了微凸体的纯弹性变形, 所以获得的刚度曲线是连续光滑地变化, 且其与本文模型的差距较大, 如图4a所示。对于ZMC模型, 接触刚度在弹性屈服点($\omega/\omega_c=1$)和塑性临界点($\omega/\omega_c=110$)均是不连续的, 如图4b所示。这是由于ZMC模型仅实现了接触载荷的连续性, 但其却是不光滑的, 从而导致基于ZMC模型获得的接触刚度存在跳跃点, 如图4b所示。基于KE模型获得的接触刚度在弹性屈服点和塑性临界点处也是不连续的, 此外, 在混合弹塑性两个子区域的转换点处($\omega/\omega_c=6$)也是不连续的, 如图4c所

示。基于 BRAKE 模型获得的接触刚度曲线随着变形的变化出现了振荡,且在弹塑性接触阶段的后期,接触刚度为负值,这是不符合实际的,如图 4d 所示。这是由于 BRAKE 模型采用的 Hermite 多项式插值函数获得的接触载荷表达式阶次较高,使得接触载荷的变化是非单调,从而导致其刚度模型存在缺陷。

图 4 不同模型下微凸体接触刚度与本文模型对比

综上可知,基于上述四种模型所建立的接触刚度模型都存在一定的不足。而本文所提接触刚度模型在弹塑性接触变形的开始与结束处均是连续且光滑地变化,增强了微凸体接触刚度在由弹性变形向弹塑性变形以及最终向完全塑性变形转化的连续性与光滑性,从而修正了传统刚度模型不连续的缺陷。

2 结合面的接触刚度

基于统计学方法,将第 1 节建立的单个微凸体接触模型扩展到整个结合面上。假设微凸体高度服从高斯分布,采用粗糙表面高度的标准差 σ 对其进行无量纲处理,则有

$$\varphi^*(z^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sigma}{\sigma_s} \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\sigma_s} \right)^2 (z^*)^2 \right) \quad (19)$$

式中, $z^* = z/\sigma$, 表示无量纲的微凸体高度, σ 为粗糙表面高度的标准差, σ_s 为微凸体高度的标准差,两者之间的关系为^[18]

$$\frac{\sigma}{\sigma_s} = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 3.717 \times 10^{-4}}} \quad (20)$$

式中, $\xi = \eta R \sigma$, 表示粗糙表面的综合粗糙度参数。

假设结合面上微凸体的总数为 N , 预计能发生接触的微凸体数量为^[19]

$$n = N \int_d^{+\infty} \varphi(z) dz \quad (21)$$

式中, $N = \eta A_n$, η 为微凸体分布密度, A_n 表示名义接触面积。基于概率统计分析的方法,对弹性、弹塑性和完全塑性变形的微凸体接触参数进行积分再求和,则结合面的法向载荷为

$$\begin{aligned} F(d^*) &= F_e(d^*) + F_p(d^*) + F_{ep}(d^*) = \\ &\frac{4}{3} \eta A_n E R^{1/2} \sigma^{3/2} \int_{d^*}^{d^* + \omega_c^*} \omega^{*3/2} \varphi^*(z^*) dz^* + \\ &2\pi \eta A_n R H \sigma \int_{d^* + \omega_p^*}^{+\infty} \omega^* \varphi^*(z^*) dz^* + \\ &\frac{2}{3} \eta A_n \pi K R H \omega_c^* \sigma \int_{d^* + \omega_c^*}^{d^* + \omega_p^*} f_{ep}^* \varphi^*(z^*) dz^* \end{aligned} \quad (22)$$

式中, $\omega^* = \omega/\sigma$, 表示无量纲的接触变形量, ω_c^* 和 ω_p^* 分别为无量纲的弹性与塑性临界接触点处的变形量, $\omega_c^* = \omega_c/\sigma$, $\omega_p^* = \omega_p/\sigma$, d^* 表示无量纲的表面间隙, $d^* = d/\sigma$, 此外, 单个微凸体弹塑性阶段的无量纲接触载荷为

$$\begin{aligned} f_{ep}^*(\omega^*) &= \left\{ \exp \left[C_1 \left(\ln \frac{\omega^*}{\omega_c^*} \right) + C_2 \left(\ln \frac{\omega^*}{\omega_c^*} \right)^2 + \right. \right. \\ &\left. \left. C_3 \left(\ln \frac{\omega^*}{\omega_c^*} \right)^2 \left(\ln \frac{\omega^*}{\omega_p^*} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

类似地, 结合面的法向接触刚度为

$$\begin{aligned}
K(d^*) &= K_e(d^*) + K_p(d^*) + K_{ep}(d^*) = \\
&2\eta A_n ER^{1/2} \sigma^{1/2} \int_{d^*}^{d^*+\omega_c^*} \omega^{*1/2} \varphi^*(z^*) dz^* + \\
&2\eta A_n \pi RH \int_{d^*+\omega_p^*}^{+\infty} \varphi^*(z^*) dz^* + \\
&\frac{2}{3} \eta A_n \pi KRH \omega_c^* \int_{d^*+\omega_c^*}^{d^*+\omega_p^*} k_{ep}^* \varphi^*(z^*) dz^* \quad (24)
\end{aligned}$$

其中, 单个微凸体在弹塑性接触阶段的无量纲的法向接触刚度为

$$\begin{aligned}
k_{ep}^*(\omega^*) &= \left\{ \exp \left[C_1 \left(\ln \frac{\omega^*}{\omega_c^*} \right) + C_2 \left(\ln \frac{\omega^*}{\omega_c^*} \right)^2 + \right. \right. \\
&C_3 \left(\ln \frac{\omega^*}{\omega_c^*} \right)^2 \left(\ln \frac{\omega^*}{\omega_p^*} \right) \left. \right] \times \left\{ \frac{C_1}{\omega^*} + \frac{2C_2}{\omega^*} \left(\ln \frac{\omega^*}{\omega_c^*} \right) + \right. \\
&\left. \left. C_3 \times \left[\frac{2}{\omega^*} \left(\ln \frac{\omega^*}{\omega_c^*} \right) \left(\ln \frac{\omega^*}{\omega_p^*} \right) + \frac{1}{\omega^*} \left(\ln \frac{\omega^*}{\omega_c^*} \right)^2 \right] \right\} \right\} \quad (25)
\end{aligned}$$

3 对比分析

与分析单个微凸体的接触刚度类似, 分别采用 GW、ZMC、KE 以及 BRAKE 模型计算结合面的接触刚度, 然后与所提模型进行对比分析。所采用的计算参数为 $E=207 \text{ GPa}$, $\mu=0.29$, $H=1.96 \text{ GPa}$, $A_n=100 \text{ mm}^2$, 三种不同粗糙表面的形貌参数如表 1 所示^[15]。

表 1 三种不同粗糙表面形貌参数

类型	$\eta/\times 10^9 \text{ m}^{-2}$	$\sigma/\mu\text{m}$	R/mm
光滑	1.55	0.08	0.32
中等	1.18	0.3	0.17
粗糙	1.15	1.0	0.055

3.1 不同粗糙表面形貌下结合面接触刚度与接触载荷的关系

图 5 显示了在不同的粗糙表面形貌下, 分别基于 GW、ZMC、KE、BRAKE 以及本文模型预测的结合面接触刚度 K 与法向载荷 F 的关系。由图 5 可知, 在三种不同的粗糙表面形貌下, 本文模型获得的接触刚度与 GW、ZMC、KE、BRAKE 模型计算的接触刚度均随着载荷的增大而连续光滑地递增, 这既说明了本文所建立的结合面接触刚度模型的正确性, 同时也说明了本文模型可适用于不同粗糙表面形貌的接触刚度特性分析。

通过对比三幅图可知, 对于相同的法向接触载荷, 随着表面粗糙度的增大, 基于不同模型预测的接触刚度均减小, 即表面接触刚度随着粗糙度的增大而减小。对于光滑接触表面(图 5a), 基于 BRAKE 模型预测的接触刚度最大, 且不同模型之间的差距较小, 尤其是当接触载荷较小时, 他们之间的差距很小。此外, 从图中还可以发现, 本文模型与仅考虑微凸体纯弹性变形的 GW 模型结果比较靠近, 但仍

然存在一定的差距, 如局部放大图所示。对于中等粗糙表面(图 5b), 从图中可观察到, 依然是 BRAKE 模型的结果最大, 但此时本文模型与 ZMC 模型的解吻合较好。对于粗糙的接触表面(图 5c), GW 模型预测的接触刚度最大, 其与考虑微凸体多种接触变形阶段的 ZMC、KE、BRAKE 以及本文模型的计算结果存在较大的差异, 且该差异随着法向载荷的增大而逐渐增大。同时, 本文模型也是最接近于 ZMC 模型的解, 这与单个微凸体接触载荷与 ZMC 模型吻合度较高的结果一致。值得注意的是, 随着表面粗糙度的增大(中等→粗糙), 本文模型与 ZMC 模型之间的差距越来越小, 当表面形貌为粗糙时, 两者之间的差距非常小, 如图 5c 中的局部放大图所示, 此时本文模型结果基本与 ZMC 模型完全重合。

(a) $\eta=1.55 \times 10^9 \text{ m}^{-2}$, $\sigma=0.08 \times 10^{-6} \text{ m}$, $R=0.32 \times 10^{-3} \text{ m}$

(b) $\eta=1.18 \times 10^9 \text{ m}^{-2}$, $\sigma=0.3 \times 10^{-6} \text{ m}$, $R=0.17 \times 10^{-3} \text{ m}$

(c) $\eta=1.15 \times 10^9 \text{ m}^{-2}$, $\sigma=1.0 \times 10^{-6} \text{ m}$, $R=0.055 \times 10^{-3} \text{ m}$

图 5 不同粗糙表面下接触刚度与接触载荷的关系

3.2 不同粗糙表面形貌下结合面接触刚度与表面接触间隙的关系

图 6 显示了在不同的粗糙表面形貌下, 基于不同模型预测的接触刚度 K 与无量纲表面接触间隙 d^* 的关系。由图可知, 表面间隙越大, 结合面接触刚度越小。根据表面塑性指数的计算方程可知, 对于给定的表面材料属性和粗糙度参数(η 、 σ 、 R), 其塑性指数是不变的^[9], 当表面间隙增大时, 粗糙表面间更多的微凸体发生的是弹性变形, 此时表面接触行为逐渐由弹性变形所主导。

图 6 接触刚度与表面无量纲接触间隙的关系

由图 6a 可知, 对于光滑表面形貌, 各个模型之间的差距较小, 且考虑微凸体三种变形阶段的 ZMC、KE、BRAKE 以及本文模型与仅考虑微凸体

纯弹性变形的 GW 模型的差距较小。这是因为当表面的粗糙度较小时, 其塑性指数较低, 大多数表面微凸体发生弹性变形, 因此, 他们与 GW 模型的差距不大。然而, 随着表面粗糙度的逐渐增大, 其塑性指数较高, 微凸体主要发生塑性接触变形, 此时基于 ZMC、KE、BRAKE 以及本文模型预测的接触刚度与 GW 模型结果的差距开始增大, 如图 6b, 6c 所示。此外, 从图 6c 中还可以发现, 对于粗糙的表面形貌, 分别基于 ZMC、KE、BRAKE 以及本文模型的计算的接触刚度比较接近, 这与图 5c 的刚度-载荷曲线的分析结果一致。

4 结论

(1) 基于微凸体在弹性、弹塑性以及塑性接触变形过程中, 其接触特性参数具有连续、光滑特性的思想, 提出利用 Hermite 多项式插值函数, 来修正传统接触刚度建模时存在的不连续等缺陷, 建立了具有连续光滑特性的单个微凸体法向接触刚度模型。并基于统计学方法, 建立了更加准确的结合面接触刚度模型。

(2) 对比分析了 GW、ZMC、KE 和 BRAKE 模型与本文模型之间的差异。研究发现: 对于光滑表面形貌, GW、ZMC、KE 以及 BRAKE 模型与本文模型计算所得的接触刚度的差异较小, 此时本文模型最接近于 GW 模型结果; 而当表面粗糙度增大时, 仅考虑微凸体纯弹性变形的 GW 模型与 ZMC、KE、BRAKE 以及本文模型差异逐渐增大, 且随着载荷的增大或表面接触间隙的减小, 该差异逐渐增大, 此时本文模型与 ZMC 模型吻合较好。

(3) 接触刚度随着表面接触间隙的增大而减小, 且其减小的速率先快后慢。载荷与表面粗糙度是影响结合面接触刚度的两个主要因素, 随着载荷的增大或表面粗糙度的减小, 接触刚度递增, 这是因为两者的变化均可以增大结合面的真实接触面积, 从而引起刚度的增大。因此, 实际工程中可通过改变载荷与表面粗糙度来改善结合面的接触刚度特性。

参 考 文 献

- [1] LI L, YUN Q, LI Z, et al. A new contact model of joint surfaces accounting for surface waviness and substrate deformation[J]. International Journal of Applied Mechanics, 2019, 11(8): 1950079.
- [2] BURDEKIN M, BACK N, COWLEY A. Analysis of the local deformations in machine joints[J]. Journal of

- Mechanical Engineering Science, 1979, 21(1): 25-32.
- [3] ZHANG G P, HUANG Y M, SHI W H, et al. Predicting dynamic behaviors of a whole machine tool structure based on computer-aided engineering[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2003, 43(7): 699-706.
- [4] 田红亮, 钟先友, 赵春华, 等. 计及弹塑性及硬度随表面深度变化的结合部单次加载模型[J]. 机械工程学报, 2015, 51(5): 90-104.
- TIAN Hongliang, ZHONG Xianyou, ZHAO Chunhua, et al. One loading model of joint interface considering elastoplastic and variation of hardness with surface depth[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(5): 90-104.
- [5] LI L, WANG J, PEI X, et al. A modified elastic contact stiffness model considering the deformation of bulk substrate[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2020, 34: 777-790.
- [6] 陈永会, 张学良, 温淑花, 等. 考虑弹塑性阶段的结合面法向接触阻尼分形模型[J]. 机械工程学报, 2019, 55(16): 58-68.
- CHEN Yonghui, ZHANG Xueliang, WEN Shuhua, et al. Fractal model for normal contact damping of joint surface considering elastoplastic phase[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(16): 58-68.
- [7] 李玲, 蔡安江, 蔡力钢, 等. 螺栓结合面微观接触模型[J]. 机械工程学报, 2016, 52(7): 205-212.
- LI Ling, CAI Anjiang, CAI Ligang, et al. Micro-contact model of bolted-joint interface[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(7): 205-212.
- [8] LIU P, ZHAO H, HUANG K, et al. Research on normal contact stiffness of rough surface considering friction based on fractal theory[J]. Applied Surface Science, 2015, 349: 43-48.
- [9] CHANG W, ETSION I, BOGY D. An elastic-plastic model for the contact of rough surfaces[J]. Journal of Tribology, 1987, 109: 257-263.
- [10] ZHAO Y, MAIETTA D, CHANG L. An asperity microcontact model incorporating the transition from elastic deformation to fully plastic flow[J]. Journal of Tribology, 2000, 122: 86-93.
- [11] LIN L, LIN J. An elastoplastic microasperity contact model for metallic materials[J]. Journal of Tribology, 2005, 127: 666-672.
- [12] KOGUT L, ETSION I. Elastic-plastic contact analysis of a sphere and a rigid flat[J]. Journal of Applied Mechanics, 2002, 69: 657-662.
- [13] KOGUT L, ETSION I. A finite element based elastic-plastic model for the contact of rough surfaces[J]. Tribology Transactions, 2003, 46: 383-390.
- [14] JACKSON R L, GREEN I. A finite element study of elasto-plastic hemispherical contact against a rigid flat[J]. Journal of Tribology, 2005, 127: 343-354.
- [15] BEHESHTI A, KHONSARI M M. Asperity micro-contact models as applied to the deformation of rough line contact[J]. Tribology International, 2012, 52: 61-74.
- [16] BRAKE M. An analytical elastic-perfectly plastic contact model[J]. International Journal of Solids and Structures, 2012, 49: 3129-3141.
- [17] GREENWOOD J A, WILLIAMSON J B P. Contact of nominally flat surfaces[J]. Mathematical and Physical Sciences, 1966, 295(1442): 300-319.
- [18] MCCOOL J I. Relating profile instrument measurements to the functional performance of rough surfaces[J]. Journal of Tribology, 1987, 109: 264-270.
- [19] 傅卫平, 娄雷亭, 高志强, 等. 机械结合面法向接触刚度和阻尼的理论模型[J]. 机械工程学报, 2017, 53(9): 73-82.
- FU Weiping, LOU Leiting, GAO Zhiqiang, et al. Theoretical model for the contact stiffness and damping of mechanical joint surface [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(9): 73-82.

作者简介: 李玲(通信作者), 男, 1981 年出生, 博士, 教授。主要研究方向为机床动力学、接触力学和摩擦学。

E-mail: lee_liling@163.com