

DOI: 10.3901/JME.2015.13.086

刚体两次转动姿态描述方法的内在联系*

张东胜¹ 姚建涛^{1,2} 许允斗^{1,2} 段艳宾^{1,3} 侯雨雷¹ 赵永生^{1,2}

(1. 燕山大学河北省并联机器人与机电系统实验室 秦皇岛 066004;

2. 燕山大学先进锻压成形技术与科学教育部重点实验室 秦皇岛 066004;

3. 中国电子科技集团公司第五十四研究所 石家庄 050081)

摘要: 并联机构动平台姿态描述的方法有多种, 不同描述方法给机构运动学分析的难易程度带来不同的影响, 所以选取合适的姿态描述方法对机构分析非常重要。并联机构的动平台可视为受约束的刚体, 而描述刚体姿态的方法之间存在着内在联系, 所以揭开刚体姿态不同描述方法之间的内在关联性, 有助于选取合适的刚体姿态描述方法。对并联机构动平台绕两相交轴线的转动关系进行了分析, 得出动平台绕某一轴线转动一定角度后其相对动平台法线的耦合转角, 并得到了该角度的解析表达式; 基于动平台姿态不同描述方法, 得到动平台绕其平面内两相交轴依次转动后, 绕动平台平面法线的耦合转角及其解析表达式。确定了动平台不同姿态描述方法的内在联系, 对具有两转动自由度并联机构的姿态描述方法的选择原则进行了合理分类, 该结论适用于大多数具有两转动自由度并联机构姿态描述方法的选取原则。

关键词: 并联机构; 姿态描述; 耦合转角; 自由度

中图分类号: TP24

The Internal Relations of the Pose Description Methods of the Rigid Body after Two Successive Rotations

ZHANG Dongsheng¹ YAO Jiantao^{1,2} XU Yundou^{1,2} DUAN Yanbin^{1,3} HOU Yulei¹
ZHAO Yongsheng^{1,2}

(1. Parallel Robot Mechatronic System Laboratory of Hebei Province, Yanshan University, Qinhuangdao 066004;

2. Key Laboratory of Advanced Forging & Stamping Technology and Science of Ministry of Education, Yanshan University, Qinhuangdao 066004;

3. The 54th Research Institute of CETC, Shijiazhuang 050081)

Abstract: For the parallel mechanisms, there are multiple methods to describe the pose of the mobile platform. Different description methods will bring different effect on the kinematics analysis, so it is pretty important to select the appropriate description method. The mobile platform can be regard as the rigid body with constraints. As the different description methods of the rigid body have some internal relations, it is necessary to find the internal relations which will be useful to select the appropriate description method. When the mobile platform plane rotates a certain angle around one axis which is not normal to the plane, it will have a coupling angle around the normal of the plane, and this angle analytic expression is obtained. On the basis of the different description methods, the coupling angle around the normal and its analytic expression are identified after the rigid body successively rotating around two axes which lie in the mobile platform plane. The internal relations among the description methods are found; then aiming at the mobile platform with two rotational degrees of freedom, the reasonable selection principles are established. This conclusion applies to majority mobile platforms with two rotational degrees of freedom.

Key words: parallel mechanism; pose description; coupling angle; degree of freedom

0 前言

并联机构与串联机构相比具有刚度大、承载能

力强、结构紧凑、累积误差影响小等特点, 所以并联机构一直以来备受学者的关注。在并联机构中, 少自由度并联机构与6自由度并联机构相比, 它具有结构简单, 运动耦合性弱, 易于实现控制, 制造成本低等特点, 所以少自由度并联机构已成为机器人和机构领域研究热点之一^[1]。在各类少自由度并联机构中, 包含两转动自由度的并联机构是比较重

* 国家自然科学基金(51275439)和国家重点基础研究发展计划(973 计划, 2013CB733000)资助项目。20150122 收到初稿, 20150523 收到修改稿

要的一类少自由度并联机构, 在诸多领域得到了广泛的应用, [PP]S 类、2UPS/U、2UPS/PU、2RPU/SPR、5-UPS/PRPU 及直升机主旋翼调姿机构等均为包含两转动自由度的并联机构。

为了更好地分析并联机构的运动学特性, 选择合适的动平台姿态描述方法至关重要。由于不同的姿态描述方法之间存在内在联系, 所以找出其内在关联性, 有助于更合理地选取动平台姿态描述方法。遗憾的是如今只有少许文献提及动平台姿态描述方法^[2-3], 缺乏对并联机构动平台的姿态描述变化规律及方法的深入研究, 所以找出不同姿态描述方法的内在联系同样值得注意。

众所周知, 动平台的基本运动方式为沿某一方向地移动和绕某一轴线地转动, 动平台沿坐标系上某一方向移动时, 其移动距离在三个坐标轴上的分量可用三角函数来表示。例如, 在 XY 平面内, 当动平台沿 X 轴移动一定距离 l 时, 其在 Y 轴上移动的距离为 0; 当动平台沿与 X 轴成 θ 度的 L 轴移动一定距离 l 时, 其在 X 轴上移动的距离为 $l\cos\theta$, 在 Y 轴上移动的距离为 $l\sin\theta$ 。而当动平台绕某一轴线转动一定角度后, 其在另一轴线上转动角度的分量需要进行深入的分析和计算。

当动平台在空间内连续进行两次移动后, 其在空间各坐标轴上的位移量可以通过两次移动分别在各自轴上的余旋分量的和来求得。例如, 在 XY 平面内, 当动平台沿与 X 轴成 θ_1 角的 L_1 轴移动一定距离 l_1 后, 再沿与 X 轴成 θ_2 角的 L_2 轴移动一定距离 l_2 , 则其沿 X 轴移动的最终距离为 $l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2$ 。而动平台在空间内绕不同轴线转动之后, 其在各坐标轴上的分量情况更为复杂。

目前, 动平台转动姿态有多种数学表达式, 如 RPY 角^[4-5]、欧拉角^[6-8]、欧拉-罗德里格参数、四元数和对偶四元数^[9-11]等, 其中仅欧拉角就有 12 种不同的组合方式。但这些方法都是描述动平台绕动坐标系多次转动后动平台姿态与初始坐标系之间的关系, 并未阐明动平台一次或多次转动后动平台绕另一轴线转动的耦合转角, 而该角度对航天器姿态精确控制^[12], 机器人^[13]、望远镜^[14]、医疗设备^[15]、目标跟踪装置^[16]等的末端精确姿态确定和并联机床高精度加工以及机构本身的力学特性等都有重要影响, 且该耦合转角有助于揭开不同欧拉角描述方法之间的内在联系, 为正确选取合适的姿态描述方法提供理论基础。

本文利用螺旋理论、空间坐标系旋转变换公式及欧拉角等方法^[17-19]分析了动平台绕自身两相交轴线的转动关系, 得出了法线方向耦合转角的统一解析表达式, 通过耦合转角确定了姿态描述方法的内在关系; 针对不同类型并联机构确定了姿态描述方

法选取原则; 以五自由度并联机器人为例, 分析了机器人的转动特性, 并通过试验验证了耦合转角的理论计算结果。

1 刚体转动数学模型的建立

对于刚体转动轴线 A 与 B , 若刚体绕轴线 B 转动一定角度 α , 则其绕轴线 A 转动的角度 β 为多少? 根据 A 、 B 轴线的夹角不同, 分三种情况加以讨论。为方便描述, 我们把刚体所在平面称为刚体动平台平面, 其中 A 轴为动平台法线, B 轴空间另一轴线。

(1) 如图 1a 所示, A 、 B 两轴线互相垂直。当刚体绕轴 B 转动 α 角度时, 很容易得到动平台没有绕轴 A 的转动, 即 $\beta = 0$ 。

(2) 如图 1b 所示, A 、 B 两轴线互相平行(或重合)。当刚体绕轴 B 转动 α 角度时, 动平台绕轴 A 的转动角度 $\beta = \alpha$ 。

(3) A 、 B 两轴线成一定夹角 θ 时($0 < \theta < \pi/2$), 如图 1c 所示。

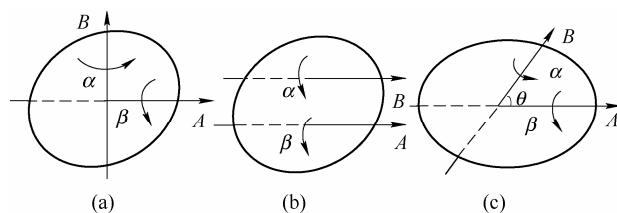


图 1 三种轴线布置

为方便求解, 建立如图 2 所示的坐标系, 其中轴 Z 与轴 A 重合, 假设 XY 坐标系平面为动平台平面, B 在 YZ 平面内, 则轴 $Z(A)$ 为动平台法线, 绕与轴 $Z(A)$ 成 θ 角度的轴 B 转动 α 角度后, 根据旋转变换通式, 最终姿态旋转变换矩阵为

$$\text{Rot}(B, \alpha) = \begin{pmatrix} c\alpha & -c\theta s\alpha & s\theta s\alpha \\ c\theta s\alpha & s^2\theta \text{Vers}\alpha + c\alpha & s\theta c\theta \text{Vers}\alpha \\ -s\theta s\alpha & s\theta c\theta \text{Vers}\alpha & c^2\theta \text{Vers}\alpha + c\alpha \end{pmatrix} \quad (1)$$

其中 $s=\sin$, $c=\cos$, $\text{Vers}\alpha = (1 - \cos\alpha)$ (下同)。

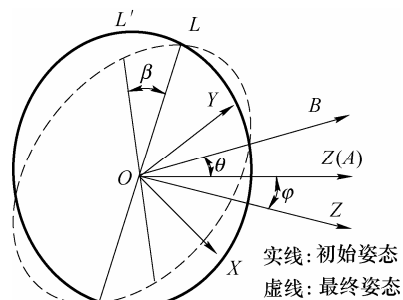


图 2 转动示意图

由文献[3]可知,刚体转动后最终姿态和最初姿态的交线即脊线,能突出反映动平面的方位,是表征方位的特征线,而将此脊线作为旋转轴线时,其有利于揭开刚体绕一轴转动其相对于法线的耦合转角。设动平台最终位置与初始位置的交线 OL 矢量为 $\mathbf{l}=(l_x, l_y, 0)$, 则动平台姿态也可通过先绕该交线转动某一角度 φ , 然后绕动平台法线 Z 再转动某一角度 β 得到^[13], 即动平台最终姿态旋转变换矩阵也可表示为

$$\text{Rot}(L, \varphi) \text{Rot}(Z, \beta) = \begin{pmatrix} l_x^2 \text{Vers} \varphi + c\varphi & l_x l_y \text{Vers} \varphi & l_y s\varphi \\ l_x l_y \text{Vers} \varphi & l_y^2 \text{Vers} \varphi + c\varphi & -l_x s\varphi \\ -l_y s\varphi & l_x s\varphi & c\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c\beta & -s\beta & 0 \\ s\beta & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & l_y s\varphi \\ a_{21} & a_{22} & -l_x s\varphi \\ a_{31} & a_{32} & c\varphi \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= (l_x^2 \text{Vers} \varphi + c\varphi) c\beta + l_x l_y s\beta \text{Vers} \varphi \\ a_{12} &= -(l_x^2 \text{Vers} \varphi + c\varphi) s\beta + l_x l_y c\beta \text{Vers} \varphi \\ a_{21} &= l_x l_y c\beta \text{Vers} \varphi + (l_y^2 \text{Vers} \varphi + c\varphi) s\beta \\ a_{22} &= -l_x l_y s\beta \text{Vers} \varphi + (l_y^2 \text{Vers} \varphi + c\varphi) c\beta \\ a_{31} &= -l_y s\varphi c\beta + l_x s\varphi s\beta \\ a_{32} &= l_y s\varphi s\beta + l_x s\varphi c\beta \end{aligned}$$

式(1)和式(2)均表示动平台转动后的姿态, 故有

$$\text{Rot}(B, \alpha) = \text{Rot}(L, \varphi) \text{Rot}(Z, \beta)$$

比较式(1)、(2), 令其中第三行第三列(3, 3)元素对应相等得

$$c^2 \theta \text{Vers} \alpha + c\alpha = c\varphi$$

解得

$$\varphi = \arccos(c^2 \theta \text{Vers} \alpha + c\alpha) \quad (3)$$

根据式(1)中(2, 1)元素减去(1, 2)元素与式(2)中(2, 1)元素减去(1, 2)元素相等得

$$c\theta s\alpha - (-c\theta s\alpha) = a_{21} - a_{12}$$

将式(3)代入上式, 结合考虑 $l_x^2 + l_y^2 = 1$, 得

$$s\beta = \frac{2c\theta s\alpha}{1 + c^2 \theta + s^2 \theta c\alpha}$$

则

$$\beta = \arcsin\left(\frac{2c\theta s\alpha}{1 + c^2 \theta + s^2 \theta c\alpha}\right) \quad (4)$$

分析式(4), 当 $\theta = 0$ 时, 有 $\beta = \alpha$; 当 $\theta = \pi/2$ 时, 有 $\beta = 0$, 即 1)、2)为 3)的两种特殊情况。

综上可知: 刚体绕与法线成 θ 角度轴线的转动会有绕法线方向的耦合转角, 其解析式可用式(4)表示。因为刚体多次转动后姿态可等效为刚体绕空间某一轴线一次转动的结果, 所以刚体绕自身两相交轴线依次转动后, 必有绕法线的耦合转角, 该耦合转角有利于揭开刚体姿态描述方法的内在关联性。

2 刚体姿态描述规律的探究

不同的刚体姿态描述方式得到的结果复杂程度不同, 造成并联机构后续分析的难易程度也不相同。参照文献[3], 从 12 种不同的欧拉角中选取两种较典型的欧拉角: XYZ 欧拉角和 ZYZ 欧拉角; 结合动平台转动过程中出现的脊线, 并将脊线作为动平台旋转轴线, 定义 KZ 欧拉角。

针对 2UPS/U、2UPS/PU 等并联机构, 其转动轴线相互垂直且位于动平台平面内, 运用三种方法对动平台绕两轴连续转动后的姿态进行描述, 从本质上了解动平台转动过程中耦合转角的意义, 及耦合转角出现的条件, 从而确定并联机构动平台姿态描述方法的内在联系, 进而推广到一般地具有两转动自由度的并联机构。

2.1 刚体姿态描述

2.1.1 XY 欧拉角

假设动平台运动平面为 XY 平面, 法线为 Z 轴, 如图 3 所示。采用 XYZ 欧拉角(α - β -0 型 XY 欧拉角)^[3], 动平台的运动过程为先绕 X_1 轴转动 α 角, 此时, Y_1 轴到达 Y_2 轴的位置, 再绕 Y_2 轴转动 β 角, 则 X_1 轴最终到达 X_3 轴的位置。

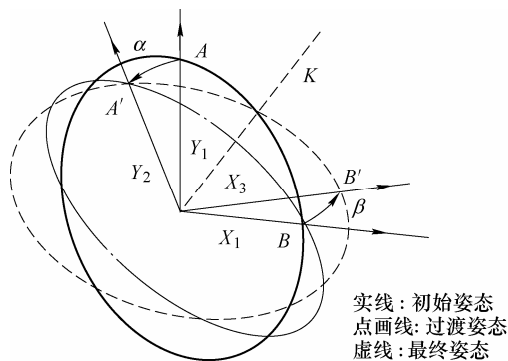


图 3 XY 欧拉角描述

动平台姿态变换矩阵可由 XYZ 欧拉角得到

$$\text{Rot}(X, \alpha) \text{Rot}(Y, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ s\alpha s\beta & c\alpha & -s\alpha c\beta \\ -c\alpha s\beta & s\alpha & c\alpha c\beta \end{pmatrix} \quad (5)$$

2.1.2 KZ 欧拉角

根据刚体绕两轴转角的数学模型可知, 刚体绕动平台内 X 、 Y 两轴线连续转动后, 其最终姿态同样可用另一种描述方法进行描述, 设动平台的最终姿态与初始姿态的交线(图 4 中 K)矢量 $\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0)$ 。KZ 欧拉角为先绕 K 轴旋转 θ 角, 动平台法线 Z_1 到达 Z_2 的位置, 然后绕动平台法线 Z_2 旋转 φ 角, 如图 4 所示。

动平台姿态变换矩阵可用 $\text{Rot}(K, \theta)\text{Rot}(Z, \varphi)$ 来表示, 其中 $\text{Rot}(K, \theta)$ 表示动平台绕交线 K 轴转动角度 θ , $\text{Rot}(Z, \varphi)$ 表示动平台绕轴 Z_2 转动角度 φ 。

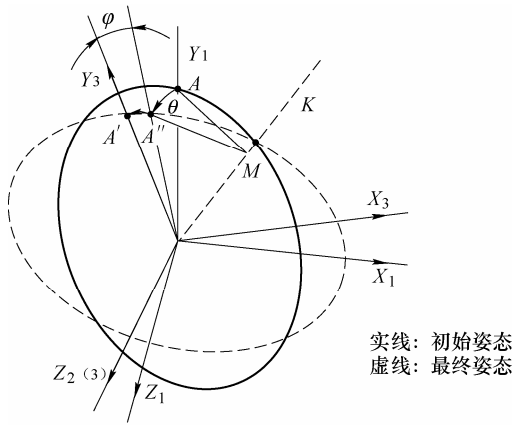


图 4 KZ 转动描述

刚体的姿态变换矩阵为

$$\begin{aligned} & \text{Rot}(k, \theta)\text{Rot}(z, \varphi) = \\ & \begin{pmatrix} k_x^2 \text{Vers}\theta + c\theta & k_x k_y \text{Vers}\theta & k_y s\theta \\ k_x k_y \text{Vers}\theta & k_y^2 \text{Vers}\theta + c\theta & -k_x s\theta \\ -k_y s\theta & k_x s\theta & c\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\varphi & -s\varphi & 0 \\ s\varphi & c\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} (k_x^2 \text{Vers}\theta + c\theta)c\varphi + k_x k_y s\varphi \text{Vers}\theta & -s\varphi(k_x^2 \text{Vers}\theta + c\theta) + k_x k_y c\varphi \text{Vers}\theta & k_y s\theta \\ k_x k_y c\varphi \text{Vers}\theta + (k_y^2 \text{Vers}\theta + c\theta)s\varphi & c\varphi(k_x^2 \text{Vers}\theta + c\theta) - k_x k_y s\varphi \text{Vers}\theta & -k_x s\theta \\ -k_y s\theta c\varphi + k_x s\theta s\varphi & k_y s\theta s\varphi + k_x s\theta c\varphi & c\theta \end{pmatrix} \quad (6) \end{aligned}$$

当动平台的姿态直接用此种方法进行描述时, 只有确定了动平台中 M 点位置, 才能确定 K 轴的位置, 然后再展开围绕 K 轴的旋转运动。

设动平台一点 $P(x, y, z)$, 动平台绕 X 和 Y 轴连续转动后 P 点的坐标可表示为

$$P' = \text{Rot}(X, \theta)\text{Rot}(Y, \varphi)P = (x', y', z') \quad (7)$$

由于动平台的最终姿态与初始姿态相交于 K 轴, 所以可令

$$P' = P \quad (8)$$

结合式(7)和式(8), 可得方程组

$$\begin{cases} z' = 0 \\ x'^2 + y'^2 = R'^2 \end{cases} \quad (9)$$

式中, R 为动平台中选定圆的半径。

求解方程组(9), 即可求得 P 点的坐标。

2.1.3 ZYZ 欧拉角

刚体两转后的姿态还可用 ZYZ 欧拉角进行描述, 选用这种欧拉角的原因在于, 此种方法继承了 KZ 欧拉角的特点, 一定程度上体现了脊线地应用意义。

首先绕动平台法线 Z_1 旋转 φ_1 角, 使点 A 运动到 K 轴上 A'' , 即使 Y_1 轴和前述 K 轴重合; 然后绕 $K(Y_2)$ 轴旋转 θ 角, 最后绕 Z_3 旋转 φ_2 角, 使点 A 到点 A' , 如图 5 所示。

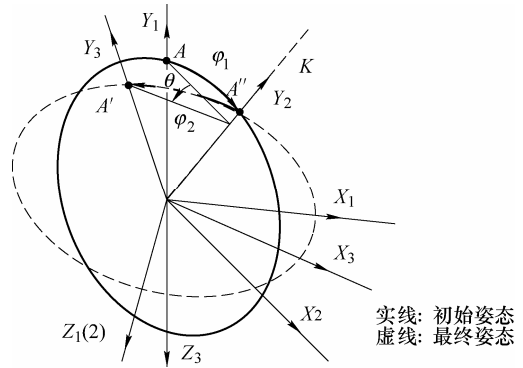


图 5 ZYZ 欧拉角描述

刚体的姿态变换矩阵为

$$\begin{aligned} & \text{Rot}(Z, \varphi_1)\text{Rot}(Y, \theta)\text{Rot}(Z, \varphi_2) = \\ & \begin{pmatrix} c\varphi_1 & -s\varphi_1 & 0 \\ s\varphi_1 & c\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\varphi_2 & -s\varphi_2 & 0 \\ s\varphi_2 & c\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} c\varphi_1 c\theta c\varphi_2 - s\varphi_1 s\varphi_2 & -c\varphi_2 s\varphi_1 - c\varphi_1 c\theta s\varphi_2 & c\varphi_1 s\theta \\ c\varphi_1 s\varphi_2 + c\theta c\varphi_2 s\varphi_1 & c\varphi_1 c\varphi_2 - c\theta s\varphi_1 s\varphi_2 & s\varphi_1 s\theta \\ -c\varphi_2 s\theta & s\theta s\varphi_2 & c\theta \end{pmatrix} \quad (10) \end{aligned}$$

以上三种方法均能实现刚体两连续转动后姿态描述, 且用于表示刚体姿态的旋转变换矩阵应完全一致, 所以不同的姿态描述方法之间必存在一定的内在联系。

2.2 耦合转角确定

由上述可知,描述刚体姿态的三个旋转变换矩阵完全一致,所以式(5)和式(6)均表示动平台转动之后的姿态,故有式(5)等于式(6)。

比较式(5)、式(6),令(3, 3)元素对应相等得

$$c\theta = c\alpha c\beta \quad (11)$$

式(5)中(1, 1)元素加(2, 2)元素之和与式(6)中(1, 1)元素加(2, 2)元素之和相等得

$$c\alpha + c\beta = (k_x^2 \text{Vers}\theta + c\theta)c\varphi + (k_y^2 \text{Vers}\theta + c\theta)c\varphi$$

将式(11)代入上式,结合考虑 $k_x^2 + k_y^2 = 1$, 得

$$c\varphi = \frac{c\beta + c\alpha}{1 + c\alpha c\beta}$$

则

$$\varphi = \arcc\left(\frac{c\beta + c\alpha}{1 + c\alpha c\beta}\right) \quad (12)$$

根据第三种姿态描述方法,式(5)中(1, 1)元素加(2, 2)元素之和与式(10)中(1, 1)元素加(2, 2)元素之和相等容易得到

$$\Delta\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \arcc\left(\frac{c\beta + c\alpha}{1 + c\alpha c\beta}\right) \quad (13)$$

经比对计算式(12)、(13)得

$$\varphi = \Delta\varphi = \arcc\left(\frac{c\beta + c\alpha}{1 + c\alpha c\beta}\right) \quad (14)$$

分析式(14),当 $\alpha\beta = 0$ 时,即动平台只绕 X 轴或 Y 轴转动一次时,得 $\varphi = 0$,这是由于动平台法线 Z 轴与 X 轴、 Y 轴分别垂直,此种情况与第 1 节中第一种情况相同;当 $\alpha\beta \neq 0$ 时,得 $\varphi \neq 0$,此时动平台有绕自身法线的转动。故对于可绕动平台内两连续转轴的并联机构,在经过两次转动后,动平台必然有绕第三轴线的耦合转角。

YZZ 欧拉角和 KZ 欧拉角由脊线紧密联系在一起,所以有式(14)的结论;而 $XYZ(\alpha-\beta-\gamma)$ 型欧拉角绕 Z 轴的转动角度和 KZ 欧拉角绕 Z 轴的转动角度的绝对差值等于耦合转角,所以耦合转角有助于揭开这几种描述方法之间的内在联系。根据上述分析结果可知,当采用 YZZ 欧拉角,其结果更清晰明确、便于了解,且可得到耦合转角出现的条件为:绕法线的两次转动绝对角度的差值不为零。

2.3 刚体姿态描述方法的选取原则

由第 2.2 节得到的耦合转角出现条件,可进一步揭开刚体姿态描述方法的内部联系,从而得到刚体姿态描述方法的选取原则。对于动平台具有绕其平面内两相交轴线连续转动性质的并联机构,或者

可等效为绕动平台内轴线连续转动的并联机构,对其姿态进行描述时可遵循以下规律。

当耦合转角为零时,可采用 YZZ 欧拉角或 KZ 欧拉角,这两种描述方法只需两个参数即可描述刚体的姿态,不同的是转动次数。这两种描述方法使姿态描述更加简单,从而有效地降低了并联机构运动学分析难度。

当耦合转角不为零时,对于末端精度要求高的,例如动平台上安装了刀具、夹钳等工具,要求实时了解末端的实际位姿,可采用 KZ 欧拉角描述方法,结论直观且便于了解,即根据绕法线方向的转角大小,对其精度进行实时补偿;对于 2UPS-U 等仅有两连续转轴且两连续转轴相互垂直的并联机构,建议采用 XY 欧拉角描述方法;对于可用 $XYZ(\alpha-\beta-\gamma)$ 型欧拉角描述的,且对动平台方位有要求的,建议用 YZZ 欧拉角或 KZ 欧拉角,可以较方便地描述刚体的方位;对于末端不要求精度,例如运动模拟平台,可根据具体分析情况选择合适的姿态描述方法。

由于上述的几种描述方法的内在联系,所以需要从机构转轴类型、机构运动特性及所要求实现的目的等方面,来选择合适的描述方法。

3 刚体姿态描述举例分析及试验验证

接下来以直升机主旋翼调姿机构、3-PRS、5-UPS/PRPU 为例,对上述耦合转角出现条件以及基于理论分析所得耦合转角解析式进行分析,确定不同类型的并联机构所适用的姿态描述方法。

3.1 直升机主旋翼调姿机构姿态描述

直升机主旋翼调姿机构为由 5 条支链组成的并联机构 2UPS/RPS/RRS/PS,具有两转动一移动自由度,为典型的 2R1T 并联机构,如图 6 所示。因为此并联机构的 PS 分支限制了动平台平面内的两平移自由度,使其仅有动平台法线方向地移动,而图中 r_1 和 r_2 为位于动平台平面内的两连续转轴,动平台可绕其连续转动,所以此种并联机构完全符合上述理论分析情况,故选择此并联机构进行分析研究更具有代表性和直观性。

为了更好地观察并分析该机构两转后的耦合转角,先使并联机构绕 r_1 轴旋转 α 角,然后绕 r_2 轴旋转 β 角。则动平台连续两转后,其姿态如图 7 所示。

由图 7b 可知,并联机构的第 1 和 3 分支发生偏转,其偏转角为 φ 。由于分支 1 和 3 与动平台用球铰连接,所以这种现象可理解为:动平台转动之

间存在耦合运动造成的。由于耦合转角的出现, 造成图 7a 分支 1 和 3 杆出现偏角 ε , 而这个角度对机构本身的受力情况有一定的影响。

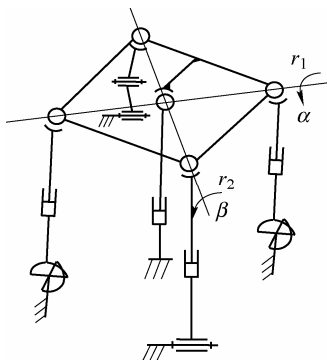


图 6 直升机主旋翼调姿机构

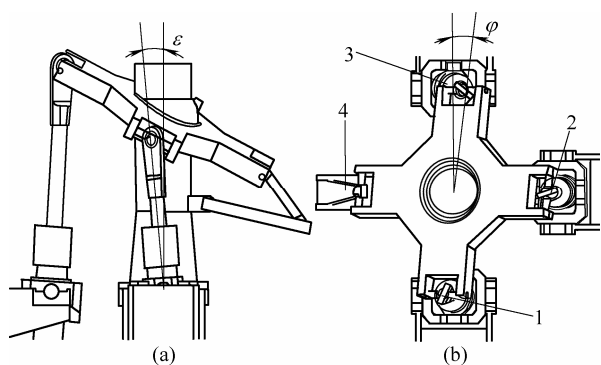


图 7 调姿机构两转后姿态

这符合刚体姿态描述方法选取原则中耦合转角不为零的情况, 由于此种并联机构初始位姿的转轴相互垂直, 所以采用 XY 欧拉角对动平台姿态描述更为直观、更便于理解, 有助于了解机构本身的转轴特性, 降低机构的动力学分析难度。

3.2 3-PRS 并联机构姿态描述

3-PRS 是 [PP]S 类并联机构中较典型的一种, 其动平台具有 3 个自由度, 为一个移动和两个转动自由度, 而且两个转动自由度的轴线位于动平台平面内, 但值得注意的是, 两转动轴线并非连续转轴, 绕垂直于动平台平面轴线的转动运动是不存在。为了分析简单, 设动平台平面为等边三角形, 3 个限制平面呈 120° 布置, 如图 8 所示。

[PP]S 类并联机构当采用 YXZ 欧拉角 (Z 为法线) 进行描述时, 根据机构的结构约束情况, 可得绕 Z 轴的转角 γ , 其 γ 称为绕 Z 轴的伴随运动^[2], 其依赖于另外两个转角 α 和 β , 即

$$\gamma = \arctan\left(\frac{s\beta s\alpha}{c\beta + c\alpha}\right) \quad (15)$$

经对比分析式(14)和式(15), 不难发现

$$\gamma = \varphi \quad (16)$$

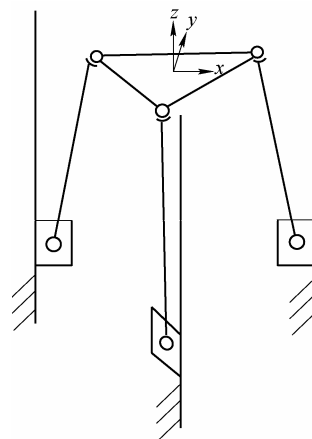


图 8 3-PRS 并联机构示意图

当 3-PRS 并联机构的动平台姿态采用 ZYZ 欧拉角进行描述时, 根据并联机构本身的结构约束, 可以得到 $\Delta\varphi = 0$ 。

由以上分析可知不同姿态描述方法所得结果的难易程度不同, 但本质是相同的, 一定程度上验证了不同描述方法内部关联性的正确性。根据耦合转角出现条件可知, 3-PRS 并联机构的两转动并不会产生耦合转角, 而前述采用 YXZ 欧拉角进行姿态描述时, 得到的伴随运动式(15)并非耦合转角, 其 YXZ 欧拉角描述方法可拆解为 YX 欧拉角和绕动平台法线转动两部分, YX 欧拉角定会出现法线方向的耦合转角, 而第二部分绕动平台法线方向的转动使耦合转角消除, 也就是满足式(16)的关系, 这样 3-PRS 并联机构两转动后的整体效果并不会出现耦合转角。

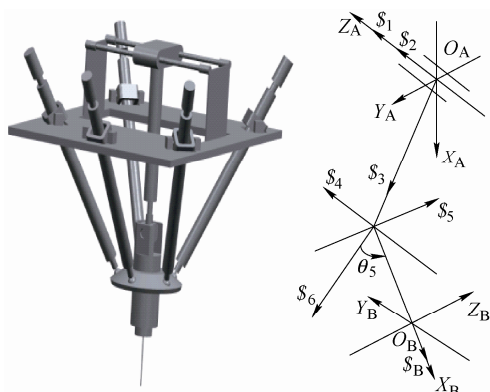
因为 3-PRS 并联机构的两转轴并非动平台内两连续转轴, 其可综合成围绕某一旋转轴的连续转动。由式(14)可知刚体绕其平面内一轴线转动后, 并没有绕法线方向的转动, 故 3-PRS 并联机构的动平台姿态可用方位角和摆角法 (TT 法) 进行描述^[2], 这种描述方法不涉及动平台绕 Z 轴的转动, 这种描述方法和 KZ 欧拉角描述方法类似, 不同的是消除了法线方向的转角, 故不会出现耦合转角, 这符合刚体姿态描述方法选取原则中耦合转角为零的情况。

3.3 5-UPS/PRPU 并联机器人姿态描述

5-UPS/PRPU 5 自由度并联机床^[19]机构如图 9a 所示, 由定平台、动平台以及连接定平台与动平台的分支等组成。定平台通过五个结构完全相同的驱动分支 UPS (虎克铰-移动副-球副) 以及一个约束分支 PRPU (移动副-转动副-移动副-虎克铰) 与动平台相连接。

在动平台运动过程中, PRPU 分支的运动螺旋系, 如图 9b 所示, 为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1 = (000; 001) \\ \mathcal{S}_2 = (001; 000) \\ \mathcal{S}_3 = (000; l_2 \ m_2 \ 0) \\ \mathcal{S}_4 = (001; p_4 \ q_4 \ 0) \\ \mathcal{S}_5 = (l_5 \ m_5 \ 0; p_5 \ q_5 \ r_5) \end{cases} \quad (17)$$



(a) 机构模型

(b) PRPU 分支

图9 5-UPS/PRPU

对式(17)所表示的运动螺旋系求反螺旋, 得出 PRPU 分支的约束螺旋为

$$\mathcal{S}_r = (000; -m_5 \ l_5 \ 0) \quad (18)$$

式(18)中 \mathcal{S}_r 表示沿 U 副中 2 个转动轴线所构成平面法线的约束力偶, 该约束力偶约束的瞬时运动为 $\mathcal{S}_6 = (-m_5 \ l_5 \ 0; p_6 \ q_6 \ r_6)$, 即绕 U 副中两个转动副轴线构成平面法线的转动, 由文献[19]可知, PRPU 分支在机构运动过程中, 始终约束动平台绕自身法线方向的转动。

对于具有两转动自由度并联机床而言, 根据式(14), 当动平台绕 X 轴和 Y 轴依次转动一定角度后, 其必有绕动平台法线耦合角度, 所以此耦合转角并非动平台绕自身法线转动出现的角度, 而是转动过程中对动平台姿态进行描述时所呈现出来的且时刻变化的角度。

动平台先绕与移动副连接 U 副的转动副轴线 \mathcal{S}_4 转动 α 角, 再绕 U 副中另一轴线 \mathcal{S}_5 轴转动 β 角, 根据式(14)得动平台绕自身法线转动角度为 $\theta = \arccos\left(\frac{c\beta + c\alpha}{1 + c\alpha c\beta}\right)$ 。

为直观方便理解, 还可以从并联机构的结构入手, 对并联机构的转动过程进行分析。假设动平台先绕与动平台连接 U 副的转动轴轴线 \mathcal{S}_5 转动 α' 角, 此时 U 平面两轴线与 U 平面法线均保持不动, 只是动平台法线与 U 平面法线不再重合, 动平台再绕 U 副中另一轴线 \mathcal{S}_4 轴转动 β' 角, 此次转动相当于绕与

动平台法线成 $\pi/2 - \alpha'$ 角度轴线的旋转, 故根据式(4)得到动平台绕自身法线转动角度为

$$\theta' = \arcsin\left(\frac{2c\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right)s\beta'}{1 + c^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right) + s^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right)c\beta'}\right) \quad (19)$$

需要注意的是 θ' 与 θ 并不相同。

这符合刚体姿态描述方法选取原则中耦合转角不为零的情况, 由于机床末端刀具精度要求较高, 由于安装误差等因素, 使刀具偏离动平台的中心位置, 所以可采用 KZ 欧拉角描述方法, 根据绕法线方向的转角大小, 对其精度进行补偿。

3.4 5-UPS/PRPU 并联机器人旋转试验验证

利用本课题组研制的 5-UPS/PRPU 并联机床(图 10 左图)对理论计算结果进行试验验证。首先根据预设旋转角度, 计算出脊线的位置, 标记动平台中心原点 O、动平台边缘与脊线的交点 A; 然后借助激光跟踪仪(图 10 右图)测出标记点 A 的坐标; 最后驱动并联机器人动平台分别绕自身 X 轴和 Y 轴依次转过预设旋转角度, 再次测得标记点 A 到达空间 A' 点的空间坐标, 根据试验数据计算出 AOA' 所成角度。



图10 5-UPS/PRPU 并联机床样机

根据式(14)计算出动平台绕法线的耦合转角的理论值。理论计算与试验结果比较如表 1 所示。

表1 并联机床两转后的耦合转角 (°)

序号	绕 X 轴转动角	绕 Y 轴转动角	5-UPS/PRPU 并联机床理论值	5-UPS/PRPU 并联机床试验值	理论转角与试验所测差值
1	5	5	0.218 4	0.225 3	0.006 9
2	10	5	0.437 7	0.448 7	0.011 0
3	10	10	0.877 1	0.889 6	0.012 5
4	15	10	1.319 8	1.336 8	0.017 0
5	15	15	1.985 9	2.013 8	0.027 9
6	20	15	2.659 6	2.601 1	0.058 5
7	20	20	3.561 6	3.621 4	0.059 8

分析表 1, 发现并联机床在动平台绕 X 轴、Y

轴转动后, 动平台有绕法线的耦合转动。具有可绕动平台内两连续转轴转动的并联机构, 其转动过程中必有绕法线转动的耦合转角, 动平台三个转动自由度之间存在着耦合关系。通过试验, 证明了以上分析的正确性, 进一步验证了利用耦合转角揭开描述方法内部关联性的正确性。

4 结论

(1) 对动平台绕自身两相交轴线的转动关系进行了分析, 得出了动平台绕一轴线转动后其相对法线转动角度的统一解析表达式。

(2) 动平台两连续转轴相互垂直的并联机构, 动平台绕 X 轴和 Y 轴依次转动后, 必有绕该平面法线 Z 轴的耦合转角, 并推导出该角度的解析表达式。

(3) 根据具体示例, 研究了具有两转动自由度的并联机构不出现耦合转角的情况, 找出了动平台不同姿态描述方法的内在联系。

(4) 根据耦合转角是否为零的情况, 制定了并联机构姿态描述方法选取原则, 列举了一些具有两转动自由度并联机构动平台姿态描述方法的适用类型。

本文对并联机构动平台姿态描述方法的深入认识和研究具有重要的理论参考意义, 为正确选择合适的姿态描述方法提供理论基础。

参 考 文 献

- [1] LIU Haitao, HUANG Tian, CHETWYND D G. An approach for acceleration analysis of lower mobility parallel manipulators[J]. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 2011, 3(1): 11-13.
- [2] 刘辛军, 吴超, 汪劲松, 等. [PP]S 类并联机器人机构姿态描述方法[J]. *机械工程学报*, 2008, 44(10):19-23. LIU Xinjun, WU Chao, WANG Jinsong, et al. Attitude description method of [PP]S type parallel robotic mechanisms[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2008, 44(10): 19-23.
- [3] 黄真, 李艳文, 高峰. 空间运动构件姿态的欧拉角表示[J]. *燕山大学学报*, 2002, 26(3): 189-192. HUANG Zhen, LI Yanwen, GAO Feng. The expression of the orientation of a spatial moving unit by Euler angle[J]. *Journal of Yanshan University*, 2002, 26(3): 189-192.
- [4] HOU Yulei, HU Xinzhe, ZENG Daxing, et al. Biomimetic shoulder complex based on 3-PSS/S spherical parallel mechanism[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2014: 1-9.
- [5] XIE Fugui, LIU Xinjun, WANG Jinsong. A 3-DOF parallel manufacturing module and its kinematic optimization[J]. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2012, 28(3): 334-343.
- [6] DIEBEL J. Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors[J]. *Matrix*, 2006, 58: 15-16.
- [7] URIZAR M, PETUYA V, AMEZUA E, et al. Characterizing the configuration space of the 3-SPS-S spatial orientation parallel manipulator[J]. *Meccanica*, 2014, 49(5): 1101-1114.
- [8] HUGHES P C. *Spacecraft attitude dynamics*[M]. New York: Courier Dover Publications, 2012: 13-21.
- [9] KONG X. Reconfiguration analysis of a 3-DOF parallel mechanism using Euler parameter quaternions and algebraic geometry method[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2014, 74: 188-201.
- [10] GILITSCHENSKI I, KURZ G, JULIER S J, et al. A new probability distribution for simultaneous representation of uncertain position and orientation[C]// *International Conference on Information Fusion*, July 7-10, 2014, Salamanca, Spain: IEEE, 2014: 1-7.
- [11] WANG Xiangke, YU Changbin, LIN Zhiyun. A dual quaternion solution to attitude and position control for rigid-body coordination[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2012, 28(5): 1162-1170.
- [12] BAYADI R, BANAVAR R N, CHANG D E. Characterizing the reachable set for a spacecraft with two rotors[J]. *Systems & Control Letters*, 2013, 62(6): 453-460.
- [13] PALMIERI G, CALLEGARI M, CARBONARI L, et al. Design and testing of a spherical parallel mini manipulator[C]// *IEEE International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications*, September 10-12, 2014, Senigallia, Ancona, Italy: IEEE, 2014: 1-6.
- [14] 王永, 姚太克, 周峰, 等. 望远镜副镜的三自由度并联支撑构型研究与运动分析[J]. *光学精密工程*, 2013, 21(11): 2860-2869. WANG Yong, YAO Taike, ZHOU Feng, et al. Type synthesis of 3-DOF parallel support system for telescope secondary mirror[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2013, 21(11): 2860-2869.
- [15] BAI S, TEO M Y. Kinematic calibration and pose measurement of a medical parallel manipulator by optical position sensors[J]. *Journal of Robotic Systems*, 2003,

20(4): 201-209.

- [16] CHENG J, LANDRY R, CHEN D, et al. A novel method for target navigation and mapping based on laser ranging and MEMS/GPS navigation[J]. *Journal of Applied Mathematics*, 2014, 2014: 1-10.
- [17] 蔡自兴. 机器人学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009. CAI Zixing. *Robotics*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2009.
- [18] PIOVAN G, BULLO F. On coordinate-free rotation decomposition: Euler angles about arbitrary axes[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2012, 28(3): 728-733.
- [19] 赵永生, 郑魁敬, 李秦川, 等. 5-UPS/PRPU 5 自由度

并联机床运动学分析[J]. *机械工程学报*, 2004, 40(2): 12-16.

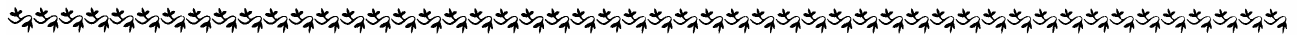
ZHAO Yongsheng, ZHENG Kuijing, LI Qinchuan, et al. Kinematic analysis of 5-UPS/PRPU 5-DOF parallel machine tool[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2004, 40(2): 12-16.

作者简介: 张东胜, 男, 1988 年出生。主要研究方向为并联机器人理论及应用。

E-mail: yszuds@163.com

赵永生(通信作者), 男, 1962 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为并联机器人理论及应用、传感器技术和先进制造技术。

E-mail: yszhao@ysu.edu.cn



(上接第 85 页)

- [18] LIU Jingfang, LI Yanwen, HUANG Zhen. Mobility analysis of altmann overconstrained linkages by modified Grübler-Kutzbach criterion[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2011, 24(4): 638-646.
- [19] 李守忠, 于靖军, 宗光华. 基于旋量理论的并联柔性机构构型综合与主自由度分析[J]. *机械工程学报*, 2010, 46(13): 54-60.
- LI Shouzhong, YU Jingjun, ZONG Guanghua. Type synthesis and principal freedom analysis of parallel flexure mechanisms based on screw theory[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2010, 46(13): 54-60.
- [20] CHEVALLEY C. *Theory of Lie groups*[M]. Princeton: Princeton University Press, 1946.

- [21] HALL B C. *Lie groups, Lie algebras, and representations: An elementary introduction*[M]. New York: Springer-Verlag, 2003.

作者简介: 杨朔飞, 男, 1988 年出生, 博士研究生。主要研究方向为并联机构拓扑综合及运动学分析。

E-mail: yangsf@tju.edu.cn

孙涛(通信作者), 男, 1983 年出生, 博士, 讲师, 硕士研究生导师。主要研究方向为机器人机构学。

E-mail: stao@tju.edu.cn

黄田, 男, 1953 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为制造装备与系统、机器人机构学和机械动力学。

E-mail: tianhuang@tju.edu.cn

戴建生, 男, 1954 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为旋量理论和系统、变胞机构、可重构机构、抓举理论、康复机器人、医疗机器人和包装机器人。

E-mail: jian.dai@kcl.ac.uk