

DOI: 10.3901/JME.2015.18.108

多公差耦合装配结合面误差建模与公差优化设计*

吕程 刘子建 艾彦迪 余治民

(湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室 长沙 410082)

摘要: 以装配结合平面为研究对象,分析多种公差耦合情况下零件间装配结合面误差建模和公差优化设计问题。采用小位移旋量(Small displacement torsor, SDT)描述公差,针对不同类型公差建立零件平面误差模型,通过蒙特卡洛模拟法获得装配平面误差变动分量的实际变动区间带宽,通过响应面法建立误差变动分量实际变动区间带宽与公差间的显式函数关系;建立包含零件加工误差与装配过程误差的装配结合面综合误差模型。将该方法扩展应用于复杂装配体的装配误差建模中,实现了在设计阶段对装配精度的预测。以加工成本为目标,装配精度可靠度为约束,进行零件公差的优化设计。以一典型产品精度设计为例,验证了用该方法预测装配精度和优化零件公差设计的可行性与实用性。

关键词: 结合面误差; 装配体误差; 蒙特卡洛模拟法; 响应面法; 可靠性分析; 公差优化设计

中图分类号: TH115

Assembly Joint Surface Error Modeling and Tolerance Optimization in the Case of Coupled Tolerance

LÜ Cheng LIU Zijian AI Yandi YU Zhimin

(State Key Laboratory of Advanced Design and Manufacture for Vehicle Body,
Hunan University, Changsha 410082)

Abstract: Taking plane assembly joint surface as the research object, the problems of assembly joint surface error modeling and tolerance optimization in the case of coupled tolerance are analyzed. Describing the tolerance by small displacement torsors theory(SDT), part plane error model is built according different tolerance design conditions, the actual change interval of assembly plane error variation bandwidth is obtained by Monte Carlo Simulation method, and the function relationship between error alteration component actual change interval bandwidth and tolerance is established by response surface method. Assembly joint surface comprehensive error model is built according to the part machining error and assembly process error. The method is expanded applied in assembly error modeling of complex assembly, and assembly accuracy prediction in the design phase is achieved. Aiming at the processing cost, and regard assembly accuracy reliability as constraint, the tolerance value of parts is optimized. At the end of the paper, the feasibility and practicability of this method in predicting the assembly precision and guiding precision design is verified by a typical engineering example.

Key words: joint surface error; assembly error; Monte Carlo simulation; response surface method; reliability analysis; tolerance optimization design

0 前言

零件组成部件直至产品的过程须通过装配工艺来完成。零件的加工误差,伴随着装配过程中由于连接方式等引起的装配误差不断累积,最后反映在产品的精度性能上,成为影响产品质量的重要

原因。

国内外学者针对产品装配精度与零件公差之间的关系进行了大量的研究,获得了相应的成果。NGOI 等^[1]根据设计约束与装配要求构建线性方程组,基于零部件之间的关联模型,确定装配件的最优公差设计方案;WU 等^[2]采用改进的 Monte Carlo 方法研究了装配件非线性约束的公差分配方法;唐水龙等^[3]通过构建虚拟配合面进行了装配平面的尺寸公差与平面度公差的耦合分析;谢存禧等^[4]以机

* 国家自然科学基金资助项目(51175161, 51475152, 51305132)。
20140924 收到初稿, 20150608 收到修改稿

器人夹持误差和装配件定位误差为研究对象, 分析了装配过程的精度状态, 并建立了装配精度模型; 刘玉生等^[5-7]基于新一代产品几何技术规范 (Geometrical product specifications, GPS) 标准, 运用小位移旋量 (Small displacement torsor, SDT) 理论研究了平面公差的数学表达方法。

上述研究主要针对某一类公差进行误差建模和讨论, 如对于装配误差的研究多以尺寸误差的传递分析为主, 缺乏从装配结合面的角度对装配综合误差的形成机理进行系统的研究。鉴于零件加工误差和装配过程误差均会通过装配结合面传递、累积, 因此, 结合面是传递误差的媒介, 也是装配过程中各种误差耦合作用的关键点。本文从装配结合面入手, 详细分析结合面误差形成的机理, 研究多种公差耦合的零件误差、实际装配产生的过程误差等在结合面处发生的误差耦合作用, 提出平面装配结合面的综合误差建模方法。在对产品最终装配精度性能做出预测基础上, 确定参与装配零件的各类公差优化设计的方法, 用于指导多公差耦合情况下装配精度最佳意义上的精度优化设计。

1 零件装配平面的误差分析

零件的装配平面是形成装配结合平面(以下简称结合面)的要素, 其误差是结合面误差的主要组成部分。本文以矩形平面为例进行误差分析, 不规则平面可近似为矩形平面。

零件的平面可同时具有尺寸公差、位置公差和形状公差, 它们从不同角度限制了实际加工平面的变动量, 以相互耦合的方式作用于指定平面。本文讨论在独立原则下的公差耦合情况, 并假设位置公差的基准为理想几何要素。公差之间的关系遵循尺寸公差大于位置公差, 位置公差大于形状公差, 即 $T_D > T_P > T_S$ 的设计规则。本文采用小位移旋量 SDT 以理想平面为参考, 描述各类公差。由于加工所得实际平面的变动发生在尺寸公差域内, 为便于叙述, 暂不考虑上下偏差的具体值, 以尺寸公差域的中心平面为理想平面进行公差域描述和公差耦合分析, 即假设 $T_{DL} + T_{DU} = 0$, 且 $|T_{DL}| = T_{DU} = T_D/2$ 。其中 T_{DL} 、 T_{DU} 分别为尺寸公差的下偏差和上偏差。

1.1 理想形状的 SDT 描述

SDT 是带有六个运动分量的刚体产生小位移所构成的矢量, 由 BOURDET 等^[8]在 1996 年引入公差研究领域, 它适用于表示理想形状特征(或几何元素)的偏离量^[9]。小位移旋量 $D = (\alpha, \beta, \delta, u, v, w)$, 其中 α 、 β 、 δ 表示绕 x 、 y 、 z 轴旋转的微小变动量,

u 、 v 、 w 表示沿 x 、 y 、 z 轴平动的微小变动量。

1.2 平面尺寸公差与形状公差耦合约束方程

如图 1 所示, 设以矩形中心为原点, 以理想平面为 Oxy 平面建立坐标系。形状公差用于控制实际平面形貌的变动量, 可以用相距为 t_s 的两平行平面底面和顶面界定其公差域, 而图 1 中 $T_S = t_s / (\cos \alpha \cdot \cos \beta)$, 因转角 α, β 都非常小, 近似地有 $T_S = t_s$ 。底面与顶面的方程为

$$\begin{cases} z_b = x\beta_b + y\alpha_b + w_b \\ z_t = x\beta_t + y\alpha_t + w_t \end{cases} \quad (1)$$

SDT 分量的变动范围不等式为

$$\begin{cases} -\frac{T_D + T_S}{2b} \leq \alpha_b \leq \frac{T_D + T_S}{2b} \\ -\frac{T_D + T_S}{2a} \leq \beta_b \leq \frac{T_D + T_S}{2a} \\ T_{DL} - T_S \leq w_b \leq T_{DU} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \alpha_t = \alpha_b \\ \beta_t = \beta_b \\ w_t = w_b + T_S \end{cases} \quad (3)$$

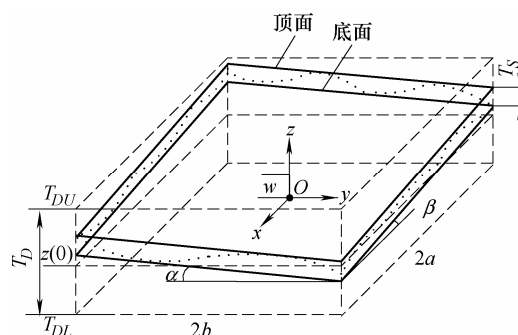


图 1 平面尺寸公差与形状公差的耦合公差域

以底面为例(下同), 其变动约束方程如式(4)、(5)所示, 同理也可获得顶面约束方程

$$T_{DL} - T_S \leq x\beta_b + y\alpha_b \leq T_{DU} \quad (4)$$

$$T_{DL} - T_S \leq x\beta_b + y\alpha_b + w_b \leq T_{DU} \quad (5)$$

为了确定实际表面形貌变动的具体情况, 采用二元线性回归法求解表面变动的 SDT 分量值。首先在理想平面中均布 $m \times n$ 个取样点, 在底面和顶面限制的范围内通过随机取样确定各点 z 值, 根据 $q(q = m \times n)$ 个模拟点值, 采用二元线性回归法计算平面变动 SDT 分量值

$$\alpha = \frac{\left(\sum_{i=1}^q X_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^q Y_i Z_i \right) - \left(\sum_{i=1}^q X_i Y_i \right) \left(\sum_{i=1}^q X_i Z_i \right)}{\sum_{i=1}^q X_i^2 \sum_{i=1}^q Y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^q X_i Y_i \right)^2} \quad (6)$$

$$\beta = \frac{\left(\sum_{i=1}^q X_i Z_i \right) \left(\sum_{i=1}^q Y_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^q X_i Y_i \right) \left(\sum_{i=1}^q Y_i Z_i \right)}{\sum_{i=1}^q X_i^2 \sum_{i=1}^q Y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^q X_i Y_i \right)^2} \quad (7)$$

$$w = \bar{z} - \alpha \bar{y} - \beta \bar{x} \quad (8)$$

式中, $\bar{x} = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q x_i$, $X_i = x_i - \bar{x}$ (Y 、 Z 同理)。

1.3 平面多公差耦合约束方程

当平面同时存在尺寸公差、位置公差和形状公差要求时, 限定平面实际变动的耦合公差域如图 2 所示。

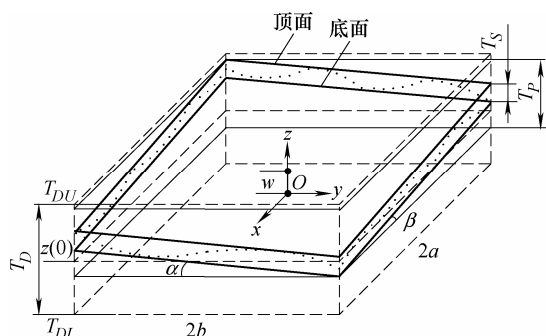


图 2 多公差耦合的公差域

此时底面 SDT 分量的变动范围不等式为

$$\begin{cases} -\frac{T_p + T_s}{2b} \leq \alpha_b \leq \frac{T_p + T_s}{2b} \\ -\frac{T_p + T_s}{2a} \leq \beta_b \leq \frac{T_p + T_s}{2a} \\ T_{DL} - T_s \leq w_b \leq T_{DU} \end{cases} \quad (9)$$

底面平面变动约束方程如式(10)、(11)所示

$$T_{DL} - T_s \leq x\beta_b + y\alpha_b \leq T_{DU} \quad (10)$$

$$T_{DL} - T_s \leq x\beta_b + y\alpha_b + w_b \leq T_{DU} \quad (11)$$

2 实际平面变动误差与公差的关系

因为零件装配平面存在多种公差要求, 实际平面相对理想平面的各 SDT 分量变动受到多重约束, 难以同时达到各自的极值, 研究多公差耦合情况下公差的优化设计, 首先要确定各误差变动分量的实际变动区间。

2.1 基于蒙特卡洛模拟的误差变动分析

蒙特卡洛模拟法可以进行各种随机变量的模拟计算, 常被用于公差分析领域^[10]。由于多种因素的影响, 加工获得的实际表面的误差具有随机性, 对应的 SDT 分量也具有随机性, 需要针对给定公差

确定的 SDT 分量集合进行变动参数模拟抽样试验, 才能确定各分量的实际变动区间。零件大批量生产时, 其加工误差在公差范围内呈正态分布^[11], 故假设 SDT 分量在公差域内呈正态分布。然而, 由于不同的 SDT 分量变动顺序对应着分量的不同变动范围, 故需要对 SDT 分量的各变动顺序分别进行模拟试验, 根据各分量的变动顺序依次选择变动范围不等式和约束方程进行计算, 判定样本参数是否在要求的精度范围内, 并保留满足条件的 SDT 分量随机数, 直至获取足够多满足条件的样本, 然后进行样本分析, 求出相关 SDT 分量的实际变动区间带宽值。具体的模拟求解步骤如下。

(1) 首先, 明确装配平面的公差要求。在此讨论同时存在尺寸公差、位置公差和形状公差的情况。

(2) 设旋量参数的变动符合正态分布, 即满足

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad x = \alpha, \beta, w$$

由底面变动不等式(9)得 α_b 、 β_b 、 w_b 理想分布的均值与标准差分别为 $(0, (T_p + T_s)/6b)$ 、 $(0, (T_p + T_s)/6a)$ 、 $(-T_s/2, (T_D + T_s)/6)$ 。

(3) 因底面的三个 SDT 分量共存在 6 种可能的变动顺序, 以 α_b 、 β_b 、 w_b 变动顺序为例, 获取误差分量实际变动区间带宽的模拟流程如图 3 所示。

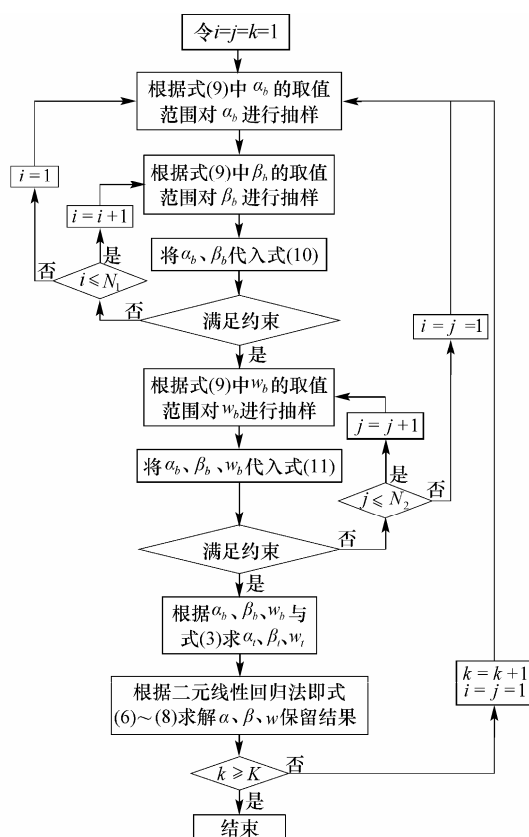


图 3 平面误差分量值抽样流程

图 3 中 N_1 、 N_2 是用来分别限制 β_b 、 w_b 在 α_b 确定的情况下, 为满足约束不等式而抽样取值的循环次数, 以防止前面分量取值不合理导致后面无法取到满足约束条件的分量值, 而使得抽样过程陷入死循环。故当超出循环次数后, 需要对前面的分量重新抽样取值。 K 为合格样本的数量, 样本数量越多, 模拟精度越高, 为保证模拟过程同时具有较高的精度与效率, 取 $K=10\ 000$ 。按照 SDT 分量不同的变动顺序进行取样后, 各分量均获得 $6K$ 个实际变动量样本值。

(4) 根据合格的 SDT 分量样本值, 采用极大似然估计法求各分量分布的均值和方差, 具体如下

$$\hat{\mu} = \frac{1}{6K} \sum_{i=1}^{6K} \psi_i \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{6K} \sum_{i=1}^{6K} (\psi_i - \bar{\psi})^2$$

式中, $\psi = (\alpha, \beta, w)$, $\bar{\psi}$ 表示 ψ 的平均值。

(5) 由于 SDT 分量的变动范围不等式与约束方程具有对称性, 故各分量实际分布的均值近似等于理想分布的均值。根据函数分布类型和由步骤(4)求得的分量分布函数的实际参数值, 查表可得各分量实际变动区间带宽为

$$W_\psi = 6\hat{\sigma}_\psi \quad \psi = \alpha, \beta, w \quad (12)$$

各分量的实际变动区间为

$$-\frac{W_\alpha}{2} < \alpha < \frac{W_\alpha}{2} \quad -\frac{W_\beta}{2} < \beta < \frac{W_\beta}{2} \quad -\frac{W_w}{2} < w < \frac{W_w}{2}$$

2.2 误差分量实际变动区间带宽与公差的关系

由第 2.1 节获得了各 SDT 分量的实际变动区间带宽, 但还需要确定各实际变动区间带宽与公差之间的显式函数关系。为此, 本文引入响应面方法。响应面方法(Response surface method, RSM)是一种数学与统计相结合的建模方法。该方法用多项式函数拟合隐式功能函数, 用试验确定多项式的待定系数, 通过选取合理的试验点和迭代策略, 来保证多项式函数在概率意义上收敛于真实的隐式功能函数^[12]。采用响应面法建立 SDT 分量实际变动区间带宽与公差之间函数关系的步骤如下。

(1) 根据零件平面的设计要求, 确定各公差的变动范围 $[T_{D\min}, T_{D\max}]$ 、 $[T_{P\min}, T_{P\max}]$ 、 $[T_{S\min}, T_{S\max}]$ 。在各公差范围内分别等间距取 n_D 、 n_P 、 n_S 个值, 得到 n ($n = n_D \times n_P \times n_S$) 组 (T_{iD}, T_{iP}, T_{iS}) ($i=1, 2, \dots, n$) 值。为保证各公差取值点符合公差设计规则, 对上述取值点进行筛选, 保留满足 $T_{iD} > T_{iP} > T_{iS}$ 条件的 m 组试验点。

(2) 以 (T_{iD}, T_{iP}, T_{iS}) ($i=1, 2, \dots, m$) 作为平面的尺寸公差、位置公差和形状公差。采用蒙特卡洛法,

求解 SDT 分量 α 、 β 、 w 的实际变动区间带宽值 $W_{i\alpha}$ 、 $W_{i\beta}$ 、 W_{iw} ($i=1, 2, \dots, m$)。

(3) 根据获取的样本 $(W_{i\psi}, T_{iD}, T_{iP}, T_{iS})$ ($i=1, 2, \dots, m; \psi = \alpha, \beta, w$), 采用不含交叉项的二次多项式构造 SDT 分量变动区间带宽值 \hat{W}_ψ 与 T_D 、 T_P 、 T_S 之间的显式函数关系为

$$\hat{W}_\psi = c_1 + c_2 T_D + c_3 T_P + c_4 T_S + c_5 T_D^2 + c_6 T_P^2 + c_7 T_S^2 \quad (13)$$

式中, $c_1 \sim c_7$ 为待定系数。通过最小二乘法求解系数 $C = (c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \ c_6 \ c_7)^T$ 的无偏估计量 $\hat{C} = (\hat{c}_1 \ \hat{c}_2 \ \hat{c}_3 \ \hat{c}_4 \ \hat{c}_5 \ \hat{c}_6 \ \hat{c}_7)^T$ 。具体有

$$\hat{C} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & T_{1D} & T_{1P} & T_{1S} & T_{1D}^2 & T_{1P}^2 & T_{1S}^2 \\ 1 & T_{2D} & T_{2P} & T_{2S} & T_{2D}^2 & T_{2P}^2 & T_{2S}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & T_{mD} & T_{mP} & T_{mS} & T_{mD}^2 & T_{mP}^2 & T_{mS}^2 \end{pmatrix}$$

$$Y = (W_{1\psi} \ W_{2\psi} \ \dots \ W_{m\psi})^T$$

(4) 求得响应面函数后, 采用复相关系数 R^2 验证模型的精度

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (\hat{W}_{i\psi} - \bar{W}_\psi)^2}{\sum_{i=1}^m (W_{i\psi} - \bar{W}_\psi)^2} \quad \psi = \alpha, \beta, w$$

式中, $\hat{W}_{i\psi}$ 、 $W_{i\psi}$ 、 \bar{W}_ψ 分别表示第 i 个试验点通过步骤(3)中的 \hat{W}_ψ 表达式算得的响应面值、通过步骤(2)获得的试验值、试验值的平均值。 R^2 在 $0 \sim 1$ 之间, 代表响应面预测值与真实值之间的差异, R^2 值越大, 差异越小, 函数近似精度越高。

3 结合面综合误差建模

结合面由零件平面通过装配连接相互贴合形成, 理想结合面中两零件的理想平面是重合的。由于零件平面误差和装配过程误差的存在, 实际结合面处汇聚了零件多公差耦合误差, 致使两零件的理想平面不能重合, 是装配误差产生的内在原因。

3.1 实际结合面的误差关系

结合面的装配连接可分为固定与非固定两种, 按照装配顺序, 设先装配的零件平面为基准装配面 A , 并假设 A 面固定, 则结合面的装配关系如图 4 所示。

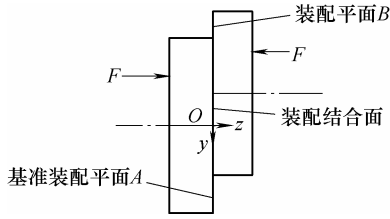


图4 装配结合面示意图

若为固定连接，则两零件平面主要在法向连接力的作用下贴合成结合面，平面 B 在平面 A 的坐标系中的误差可描述为 $D_a = (\alpha_a, \beta_a, \delta_a, u_a, v_a, w_a)$ ， $\alpha_a = \beta_a = w_a = 0$ ；若为非固定连接，两零件平面主要在重力或其他装配约束下贴合成结合面，亦有 $\alpha_a = \beta_a = w_a = 0$ 。由于在运动方向上装配精度不受误差的影响，对应的SDT分量为0，例如结合面的两平面间存在 y 轴方向的平动，则 $v_a = 0$ ，其他分量的误差与平面 B 运动所在的位置相关，本文不进行讨论。

3.2 结合面误差建模

本文通过描述参与装配两零件理想平面之间的位姿变动建立结合面误差关系模型。如图5所示，由于零件平面误差与装配过程误差的存在，两理想平面的实际装配位姿发生了偏离，可描述为理想装配平面 B 相对于理想基准装配平面 A 的位姿变动。

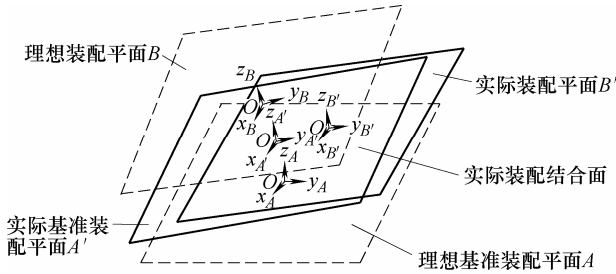


图5 装配结合面综合误差

因此，理想基准平面 A 到理想平面 B 的误差传递关系可以描述为 $A \rightarrow A' \rightarrow B' \rightarrow B$ ，结合面综合误差形成机理如图6所示。

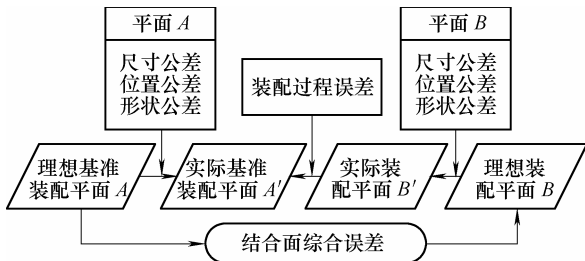


图6 结合面综合误差的形成机理

考虑到零件装配位姿和误差传递的方向性，以理想平面 A 为基准描述结合面综合误差，须对平面 B 的误差变动SDT分量进行变换，方法是在平面 B 的坐标系中，首先使 z 轴反向，即绕 x 轴旋转 180° ，

再根据装配位姿的需要绕 z 轴旋转一个 θ 角，至零件 B 的正确装配位姿，变换矩阵

$$M_{c-x} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & -\cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可求得从平面 B' 至平面 B 的误差变动矩阵

$$M_{B'B} = M_{c-x}^{-1} \cdot M_{P-BB'}^{-1} \cdot M_{c-x}$$

因 M_{c-x} 为正交矩阵，有 $M_{c-x} = M_{c-x}^{-1}$ 。式中 $M_{P-BB'}$ 是在零件误差分析中从平面 B 到平面 B' 的误差变动矩阵，可以利用多体运动学原理求取

$$M_{P-BB'} = \begin{pmatrix} 1 & -\delta_{BB'} & \beta_{BB'} & u_{BB'} \\ \delta_{BB'} & 1 & -\alpha_{BB'} & v_{BB'} \\ -\beta_{BB'} & \alpha_{BB'} & 1 & w_{BB'} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

根据线性代数可求得 $M_{P-BB'}^{-1}$ 。

结合面综合误差变动矩阵

$$M_{AB} = M_{AA'} \cdot M_{A'B'} \cdot M_{B'B} = M_{AA'} \cdot M_{A'B'} (M_{c-x}^{-1} \cdot M_{P-BB'}^{-1} \cdot M_{c-x})$$

式中， $M_{AA'}$ 为平面 A 到平面 A' 的误差变动矩阵； $M_{A'B'}$ 为平面 A' 到平面 B' 的误差变动矩阵； $M_{AA'}$ 与 $M_{A'B'}$ 的矩阵表达式形式与式(14)相同。

忽略高阶小项以及结合面处为0的误差分量，可得装配结合面综合误差变动矩阵为

$$M_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & -\delta_{AB} & \beta_{AB} & u_{AB} \\ \delta_{AB} & 1 & -\alpha_{AB} & v_{AB} \\ -\beta_{AB} & \alpha_{AB} & 1 & w_{AB} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \alpha_{AB} = \alpha_{AA'} + \beta_{BB'} \sin\theta - \alpha_{BB'} \cos\theta \\ \beta_{AB} = \beta_{AA'} + \beta_{BB'} \cos\theta + \alpha_{BB'} \sin\theta \\ \delta_{AB} = \delta_{AA'} + \delta_{A'B'} + \delta_{BB'} \\ u_{AB} = u_{AA'} + u_{A'B'} - u_{BB'} \cos\theta + v_{BB'} \sin\theta \\ v_{AB} = v_{AA'} + v_{A'B'} + u_{BB'} \sin\theta + v_{BB'} \cos\theta \\ w_{AB} = w_{AA'} + w_{BB'} \end{cases} \quad (16)$$

4 结合面误差模型在装配体精度分析中的应用

结合面是装配误差传递的媒介，装配体通过多个结合面形成了装配体误差累积传递的精度链。当装配体包含有多个零件时，某一零件可能有多个表面与其他零件的表面形成装配结合面，不同结合面之间的关联尺寸公差会直接影响结合面的误差变动

范围, 进而影响装配体精度。例如, 零件的两结合平面之间的尺寸关联关系如图 7 所示。

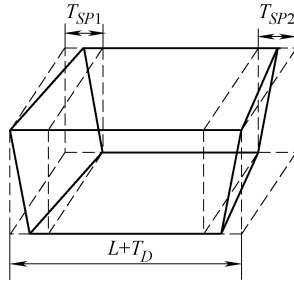


图 7 零件装配面的尺寸关联关系

图 7 中 T_D 表示尺寸误差, T_{SP1} 和 T_{SP2} 分别表示两平面的综合形位误差变动范围。 T_D 限制了 T_{SP1} 与 T_{SP2} 的变动。

首先, 按照前文所述方法建立装配体各结合面的综合误差模型, 然后依据装配顺序, 将参与装配的零件视为低序体, 采用多体运动学理论, 建立从基准装配零件到最终装配零件的误差传递模型。装配体误差传递关系如图 8 所示。

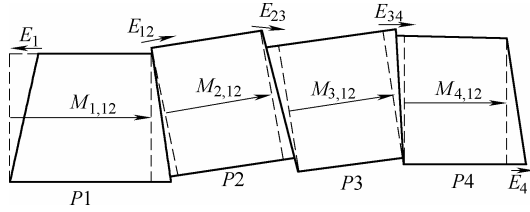


图 8 装配体误差传递示意图

图 8 中装配体的精度输出平面相对于基准装配平面的位姿变换矩阵如下

$$\mathbf{M}_a = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{M}_{1,12} \cdot \mathbf{E}_{12} \cdot \mathbf{M}_{2,12} \cdot \mathbf{E}_{23} \cdot \mathbf{M}_{3,12} \cdot \mathbf{E}_{34} \cdot \mathbf{M}_{4,12} \cdot \mathbf{E}_4$$

式中, \mathbf{E}_1 、 \mathbf{E}_{12} 、 \mathbf{E}_{23} 、 \mathbf{E}_{34} 、 \mathbf{E}_4 分别表示实际基准平面到理想基准平面的误差变动矩阵、零件 1 与零件 2、零件 2 与零件 3、零件 3 与零件 4 的结合面误差变动矩阵、精度输出平面的误差变动矩阵; $\mathbf{M}_{1,12}$ 、 $\mathbf{M}_{2,12}$ 、 $\mathbf{M}_{3,12}$ 、 $\mathbf{M}_{4,12}$ 分别表示从零件 1 到零件 4 的装配方向上, 零件 1、2、3、4 内部从先装配理想平面到后装配理想平面的位姿变换矩阵。

装配体的整体误差变动矩阵

$$\mathbf{E}_a = \mathbf{E} + \mathbf{M}_a - \mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} 1 & -\delta_a & \beta_a & u_a \\ \delta_a & 1 & -\alpha_a & v_a \\ -\beta_a & \alpha_a & 1 & w_a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_{1,12} \cdot \mathbf{M}_{2,12} \cdot \mathbf{M}_{3,12} \cdot \mathbf{M}_{4,12}$$

式中, \mathbf{M}_0 为理想情况下, 精度输出平面相对于基准装配平面的位姿变换矩阵。由式(16)可推知 \mathbf{E}_a 矩阵中的各误差分量均为各装配结合面误差分量的

函数。

5 装配体精度的可靠性分析

装配体模型包含了参与装配的所有零件平面的加工误差以及装配过程误差, 不仅可以用来在装配环节预测产品的装配精度, 还可以在设计环节指导产品的精度分配, 优化产品的精度设计。

5.1 装配体精度要求的描述

装配体在不同的方向上往往有不同的精度要求, 或只对某个特定的精度有较高的要求等, 因此, 需要分别进行讨论。下面将装配体的精度要求划分为如下几种常见的形式, 即装配精度输出平面的法向平动精度要求、切向平动精度要求、法向转动精度要求, 假设装配精度输出平面中心为坐标原点, 精度输出平面在 Oxy 坐标平面内, 各精度要求的误差变动量分别表示为 D_N 、 D_T 、 D_R

$$D_N = \frac{a_4}{2} \beta_a + \frac{b_4}{2} \alpha_a + w_a \quad (18)$$

$$D_T = \sqrt{u_a^2 + v_a^2} \quad (19)$$

$$D_R = \delta_a \quad (20)$$

式中, a_4 、 b_4 分别表示精度输出平面在 x 、 y 轴方向的边长; α_a 、 β_a 、 δ_a 、 u_a 、 v_a 、 w_a 为式(17)装配误差变动矩阵表达式中对应的误差变动分量。

5.2 装配体精度的可靠性分析

机械产品可靠性分析是根据产品基本变量存在的随机分散特性, 应用概率论和数理统计方法, 分析计算机械产品满足规定功能要求的概率^[13-15]。机械零部件的加工误差以及装配过程中的装配过程误差均为随机量, 因此装配体误差也是随机量。装配体误差的可靠性是指装配体在指定方向上的误差落在装配允许的最大误差范围内的概率。

本文以可靠度作为评价装配体精度性能的依据, 并假设随机量 SDT 各分量具有独立性, 且满足正态分布。下面采用验算点法(First order reliability method, FORM)求解装配精度的可靠度。

5.2.1 装配精度极限状态函数

假设装配体有法向平动精度要求(切向平动精度和法向转动精度也可以进行类似的讨论), 创建极限状态函数为

$$g(\mathbf{X}) = I - D_N \quad (21)$$

式中, $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3) = (\alpha_a, \beta_a, w_a)$; I 为装配体法向允许的最大误差; $g(\mathbf{X})$ 为装配精度的状态函数, 可通过判断 $g(\mathbf{X})$ 的值是否大于 0 来确定装配精度

的可靠性。当 $g(\mathbf{X}) > 0$ 表示精度处于可靠状态； $g(\mathbf{X}) < 0$ 表示精度处于失效状态； $g(\mathbf{X}) = 0$ 表示精度处于临界极限状态，称 $g(\mathbf{X}) = 0$ 为极限状态方程。

β 是最早用来度量可靠性的指标之一，式(21)的可靠性可通过 $g(\mathbf{X})$ 状态变量的均值 μ_g 和方差 σ_g 的比值来表示^[16]

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{E[g(\mathbf{X})]}{\sqrt{\text{Var}[g(\mathbf{X})]}} \quad (22)$$

由于使用 β 值衡量可靠性不够直观，故引入可靠度的概念。可靠度 R 是极限状态函数在可靠状态下具体可靠性程度的衡量。 R 在 $0 \sim 1$ 取值，通过数值积分法可求得可靠度的具体值^[14]。在工程应用中常常根据基本随机变量服从正态分布的特点，避免过于复杂的数学计算，将可靠度表示为

$$R = \Phi(\beta)$$

式中， Φ 为标准正态分布函数， R 可根据 β 值查表获取。

5.2.2 基于验算点法(FORM)计算可靠度

采用验算点法计算可靠度的流程如图 9 所示。

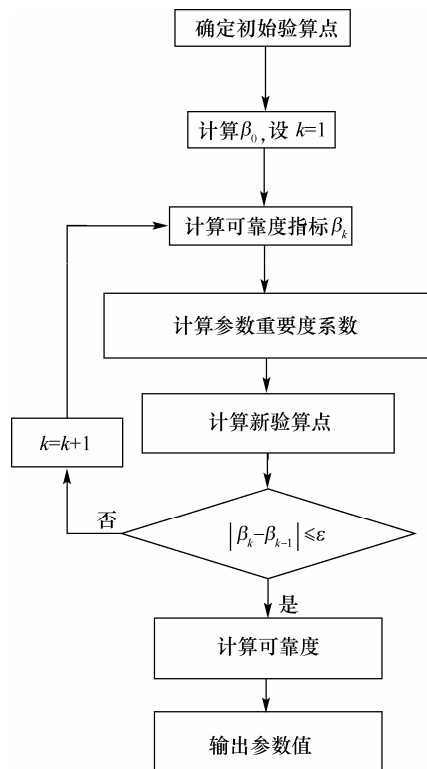


图 9 验算点法计算可靠度流程

验算点法求解可靠度的具体步骤如下。

(1) 确定初始验算点，一般取各参数均值点。

$$\mathbf{X}^{*(0)} = (x_1^{*(0)}, x_2^{*(0)}, \dots, x_n^{*(0)}) = (\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n})$$

式中， n 为极限状态方程中参数的个数，第 k 次迭

代的验算点值 $\mathbf{X}^{*(k)} = (x_1^{*(k)}, x_2^{*(k)}, \dots, x_n^{*(k)})$ 。

(2) 由式(18)~(20)可知，极限状态函数 $g(\mathbf{X})$ 为 SDT 分量的可导函数。由式(22)计算可靠度指标

$$\beta_k = \frac{g(\mathbf{X}^{*(k)}) + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial g}{\partial x_i} \right]_{\mathbf{X}^{*(k)}} (\mu_{x_i} - x_i^{*(k)})}{\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{X}^{*(k)}}^2 \sigma_{x_i}^2 \right]^{1/2}} \quad (23)$$

(3) 计算各参数的重要度系数。

$$\alpha_i = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x_i} \big|_{\mathbf{X}^{*(k)}} \sigma_{x_i}}{\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{X}^{*(k)}}^2 \sigma_{x_i}^2 \right]^{1/2}}$$

(4) 计算新的验算点

$$x_i^{*(k+1)} = \mu_{x_i} + \beta_k \sigma_{x_i} \alpha_i \quad i=1, 2, \dots, n$$

(5) 判断 β 是否收敛，即 $|\beta_k - \beta_{k-1}| \leq \varepsilon$ 是否满足 (ε 为收敛精度，根据求解 R 所查询的标准正态分布数值表，本文取 $\varepsilon = 0.01$)，若满足则继续步骤(6)，不满足则执行步骤(2)，直至收敛为止。

(6) 根据 β_k 查表获取 R 值，同时输出 β_k 。

6 基于装配精度的公差优化设计

工程实际中，加工成本是进行公差设计需要考虑的主要因素。而精度要求是公差设计必须满足的前提条件。公差优化的目的是在满足精度要求的前提下，使公差加工成本最低(装配过程误差的控制成本相对加工成本较低，且不作为优化的目标，故本文不讨论装配过程误差控制的成本)。因此，本文以零件平面的加工成本为目标，装配体精度可靠度为约束，进行零件的公差优化设计。

遗传算法是一种源于自然遗传进化机制的搜索优化算法，已经广泛应用于公差优化研究中^[17]。由第 5 节及式(12)可知，极限状态方程确定后，可靠度是误差分量带宽的函数。由式(13)可知，误差分量带宽是公差的函数，所以可靠度亦为公差的函数，可用 $R(\mathbf{T})$ ($\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_n)$) 表示，其中 n 为装配体精度相关的公差项总数。本文以加工成本为目标，以装配精度可靠度为约束条件，建立装配体的公差优化模型

$$\begin{aligned} \min \quad & C_F(\mathbf{T}) \\ \text{s.t.} \quad & s - R(\mathbf{T}) \leq 0 \quad \mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_n) \\ & T_{jS} - T_{jP} \leq 0 \\ & T_{jP} - T_{jD} \leq 0 \quad j=1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

式中, $C_F(\mathbf{T})$ 为加工成本函数; s 为装配精度需要满足的可靠度值; n 为装配体精度相关的公差项总数; m 为装配精度相关的零件平面的总数。

本文采用遗传算法对公差优化模型进行优化。首先采用动态罚函数法进行适应度函数设计^[18], 通过惩罚函数 $\Phi(\mathbf{T})$ 将上述问题转化为非约束问题

$$\Phi(\mathbf{T}) = C_F(\mathbf{T}) + P(\mathbf{T})$$

式中, $\Phi(\mathbf{T})$ 即为适应度函数, $P(\mathbf{T})$ 为惩罚项。

$$P(\mathbf{T}) = (ct)^b \sum_{i=1}^k r_i g_i^a(\mathbf{T})$$

式中, t 为进化代数; c 、 b 、 a 为调节系数, 通常取 $c=0.5$ 、 $b=a=2$; $g_i(\mathbf{T})$ 为约束条件; k 为约束不等式的总数; $r_i (i=1, 2, \dots, k)$ 为约束不等式的惩罚因子, 随着进化代数的增加, 对不可行个体的惩罚压力迅速增长。惩罚因子 r_i 取得过小时, 可能造成整个罚函数极小解不是原目标函数的整体最小值, 而当惩罚因子取得过大, 有可能在可行域外造成多个局部极值点, 给搜索过程增加困难。遗传算法公差优化流程如图 10 所示。

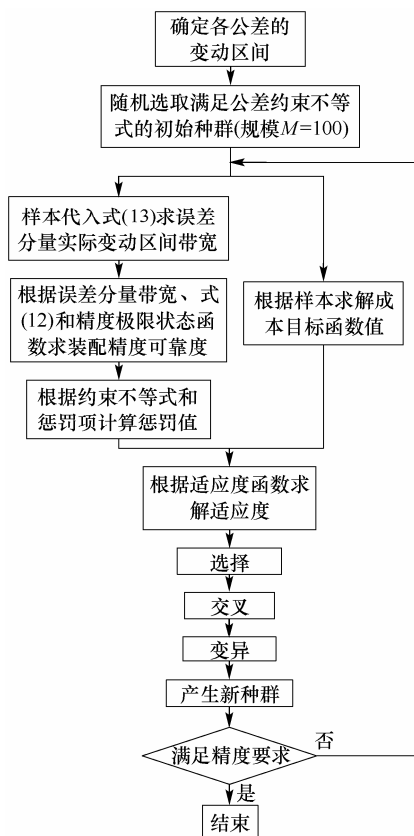


图 10 遗传算法公差优化流程

7 实例分析

图 11 为齿轮液压泵装配体, 其零件精度设计如

图 12 所示。为保证齿轮轴的装配精度, 要求以右端盖的右侧平面切向误差在 0.03 mm 范围内的可靠度不小于 97% 为前提, 以加工成本最低为目标, 进行公差优化设计。以图 12a 中右平面为装配基准, 假设无装配过程误差。

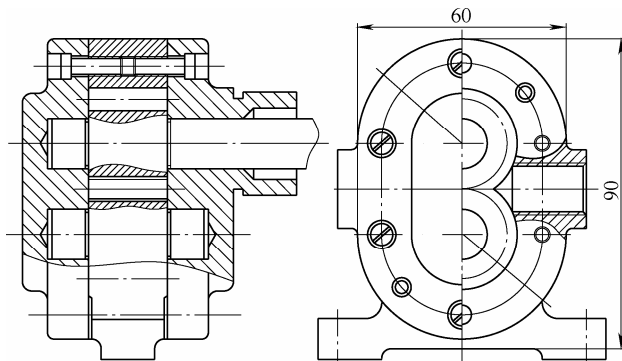


图 11 齿轮液压泵装配体

由问题描述可知, 该泵体以图 12a 中平面 1 为装配基准, 图 12b 中右侧面为精度输出面, 通过平面 1 与平面 2、平面 3 与平面 4 两组结合面形成误差传递累积的装配体。根据第 5.1 节, 装配精度要求可表达为

$$S = \sqrt{u_A^2 + v_A^2}$$

式中, u_A 、 v_A 分别为装配体在 x 、 y 轴方向的平均误差。

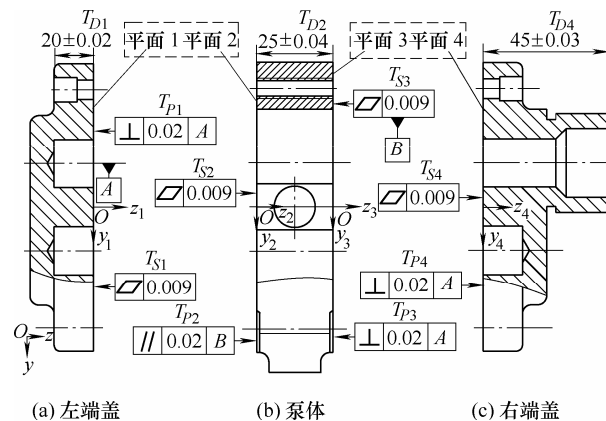


图 12 左端盖、泵体、右端盖的精度设计

装配体公差优化的主要步骤如下。

(1) 根据图 12 中零件平面公差设计和第 1、2 节所述方法, 求得各平面误差分量的实际变动区间, 及区间带宽与公差之间的函数关系。

(2) 根据第 3 节建立两组结合面的误差模型。

(3) 根据第 4 节建立从图 12a 中平面 1 至图 12c 中右端面的装配体误差模型。通过装配误差模型可得 u_A 、 v_A 与各平面误差分量的函数关系。

(4) 根据第 5 节进行所求切向误差的可靠性分

析。通过 Matlab 编程计算, 得可靠度为 97.38%。

(5) 根据现有的公差加工成本模型研究成果, 建立装配体公差优化模型。通过文献[19-20]给出的公差加工成本模型可知以下几点。

1) 平面尺寸公差与形状公差的成本函数为

$$C_{DS}(T) = 5.0261 \exp(-15.8903T) + \frac{T}{0.3927T + 0.1176}$$

2) 平面位置公差的成本函数为

$$C_P(T) = \begin{cases} 8.2369 \exp(-35.8049T) + 1.3071 \exp\left(\frac{0.0063}{T}\right) & T \leq 0.13 \\ 1.23036 & T > 0.13 \end{cases}$$

式中, C_{DS} 、 C_P 分别表示零件平面尺寸公差与形状公差、位置公差的加工成本; T 表示公差。零件平面加工的总成本为

$$C_{\Sigma}(T) = \sum_{i=1}^n C(T_i) = \sum_{d=1}^{n_1} C_{DS}(T_d) + \sum_{p=1}^{n_2} C_P(T_p)$$

式中, n 为当前平面的公差总数。

图 12 中包括两组结合面, 则装配体公差加工成本

$$C_A(T) = \sum_{k=1}^2 C_{F_k}(T) = \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 C_{j\Sigma}(T) \quad (24)$$

式中, k 为结合面数量; j 为组成某结合面的零件平面号; $C_{j\Sigma}(T)$ 为平面 j 的公差加工成本。可得装配体初始公差加工成本为 48.26 元。

本例共 11 项公差。以加工成本最低为目标的装配体公差优化模型为

$$\begin{aligned} \min \quad & C_A(T) = \sum_{k=1}^2 C_{F_k}(T) = \sum_{d=1}^7 C_{DS}(T_d) + \sum_{p=1}^4 C_P(T_p) \\ \text{s.t.} \quad & 0.97 - R(T) \leq 0 \quad T = (T_1, T_2, \dots, T_{11}) \\ & T_{Sj} - T_{Pj} \leq 0 \quad j = 1, 2, 3, 4 \\ & T_{Pk} - T_{Dk} \leq 0 \quad k = 1, 4 \\ & T_{P2} + T_{P3} - T_{D2} \leq 0 \end{aligned}$$

式中, d 、 P 为装配体中尺寸公差与形状公差代号、位置公差代号; 0.97 为装配精度可靠度目标; j 、 k 为图 12 中参与装配的平面代号。

(6) 采用遗传算法求解公差优化模型。遗传算法控制参数设定: 种群规模 $M=100$, 交叉概率 $P_c=0.8$, 变异概率 $P_m=0.05$, 精度要求 $\varepsilon \leq 0.005$ 。根据图 10 所示的优化流程, 采用 Matlab 软件编写优化程序。公差优化结果如表 1 所示。

表 1 公差优化结果数据表

序号	优化公差项	原公差值/mm	优化后公差值/mm
1	T_{D1}	0.040	0.039
2	T_{P1}	0.020	0.029
3	T_{S1}	0.009	0.006
4	T_{D2}	0.080	0.078
5	T_{P2}	0.020	0.032
6	T_{S2}	0.009	0.006
7	T_{P3}	0.020	0.030
8	T_{S3}	0.009	0.006
9	T_{D4}	0.060	0.057
10	T_{P4}	0.020	0.032
11	T_{S4}	0.009	0.007

根据式(24)可得优化后的加工成本为 43.22 元, 加工成本下降比率为 10.45%。装配精度可靠度为 97.19%。由优化结果可知, 本文采用的基于遗传算法的公差优化方法, 可在保证不降低装配精度可靠度的前提下, 较大幅度降低了公差加工成本。

8 结论

(1) 本文采用小位移旋量理论进行公差的数学描述, 建立了多公差耦合情况下零件平面误差变动的数学模型, 为误差分析奠定了基础。

(2) 采用蒙特卡洛模拟加工过程中误差的随机变动, 通过响应面法建立了误差分量实际变动区间带宽与公差间的函数关系。以结合面为装配误差节点, 根据零件加工误差与装配过程误差建立了装配结合面综合误差模型。

(3) 将结合面误差研究方法应用到装配体的误差研究中, 结合多体运动学理论建立了装配体综合误差模型。并根据装配精度要求, 提出了衡量装配精度的可靠度求解方法。

(4) 提出了以装配精度可靠度为约束条件, 以加工成本为目标, 进行零件公差优化设计的详细流程与方法。在保证装配精度要求的同时降低了加工成本。并通过工程实例验证了该方法在指导公差设计方面的可行性与实用性。

参 考 文 献

- [1] NGOI B K A, MIN O J. Optimum tolerance allocation in assembly[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 1999, 15(9): 660-665.
- [2] WU F, DANTAN J Y, ETIENNE A, et al. Improved algorithm for tolerance allocation based on Monte Carlo simulation and discrete optimization[J]. Computers & Industrial Engineering, 2009, 56(4): 1402-1413.

- [3] 唐水龙, 余剑锋, 李原, 等. 基于虚拟配合面的带平面度零件装配容差分析[J]. 计算机集成制造系统, 2011, 17(4): 711-715.
TANG Shuilong, YU Jianfeng, LI Yuan, et al. Assembly tolerance analysis for parts with flatness based on virtual mating plane[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2011, 17(4): 711-715.
- [4] 谢存禧, 汤祥州, 邵明. 机器人装配系统的误差分析和精度建模[J]. 中国机械工程, 1998, 9(9): 8-11.
XIE Cunxi, TANG Xiangzhou, SHAO Ming. Error analysis and accuracy modeling of robot assembly system[J]. China Mechanical Engineering, 1998, 9(9): 8-11.
- [5] 刘玉生, 吴昭同, 杨将新, 等. 基于数学定义的平面尺寸公差数学模型[J]. 机械工程学报, 2001, 37(9): 12-17.
LIU Yusheng, WU Zhaotong, YANG Jiangxin, et al. Mathematical model of size tolerance for plane based on mathematical definition[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2001, 37(9): 12-17.
- [6] 茅健. 基于数学定义的公差建模与误差评定技术的研究 [D]. 杭州: 浙江大学, 2007.
MAO Jian. Tolerance modeling and error evaluation technology research based on the mathematical definition[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2007.
- [7] 王移风, 曹衍龙, 徐旭松, 等. 基于 SDT 的三维公差域建模方法研究[J]. 中国机械工程, 2012, 23(7): 844-846.
WANG Yifeng, CAO Yanlong, XU Xusong, et al. Mathematical model of tolerance based on small displacement torsor[J]. China Mechanical Engineering, 2012, 23(7): 844-846.
- [8] BOURDET P, MATHIEU L, LARTIGUE C, et al. The concept of small displacement torsor in metrology[J]. Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, 1996, 40: 110-122.
- [9] 吴兆强. 基于小位移旋量的公差模拟建模及公差分析[J]. 机械设计与制造, 2010, 1(1): 205-207.
WU Zhaoqiang. Stimulated tolerances modeling based on small displacement torsors and tolerances analysis[J]. Machinery Design & Manufacture, 2010, 1(1): 205-207.
- [10] 袁贵星, 王平. 蒙特卡洛模拟及其在公差设计中的应用[J]. 天津科技大学学报, 2008, 23(2): 60-64.
YUAN Guixing, WANG Ping. Monte Carlo simulation and its application in tolerance design[J]. Journal of Tianjin University of Science & Technology, 2008, 23(2): 60-64.
- [11] 卢强, 张友良. 用蒙特卡洛法进行 6 腿并联机床精度综合[J]. 中国机械工程, 2002, 13(6): 464-467.
LU Qiang, ZHANG Youliang. Accuracy synthesis of a hexapod machine tool based on Monte Carlo method[J]. China Mechanical Engineering, 2002, 13(6): 464-467.
- [12] 王新彦, 戈余丽, 桂天, 等. 基于响应面法的液压平板车车架结构优化[J]. 中国机械工程, 2013, 24(16): 2261-2265.
WANG Xinyan, GE Yuli, GUI Tian, et al. Research on optimum design of hydraulic flat transporter frame based on response surface method[J]. China Mechanical Engineering, 2013, 24(16): 2261-2265.
- [13] 张建国, 苏多, 刘英卫. 机械产品可靠性分析与优化[M]. 北京: 电子工业出版社, 2008.
ZHANG Jianguo, SU Duo, LIU Yingwei. Mechanical product reliability analysis and optimization[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2008.
- [14] 何正嘉, 曹宏瑞, 瞿艳阳, 等. 机械设备运行可靠性评估的发展与思考[J]. 机械工程学报, 2014, 50(2): 171-186.
HE Zhengjia, CAO Hongrui, ZI Yanyang, et al. Developments and thoughts on operational reliability assessment of mechanical equipment[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(2): 171-186.
- [15] 杨兆军, 陈传海, 陈菲, 等. 数控机床可靠性技术的研究进展[J]. 机械工程学报, 2013, 49(20): 130-139.
YANG Zhaojun, CHEN Chuanhai, CHEN Fei, et al. Progress in the research of reliability technology of machine tools[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(20): 130-139.
- [16] 余治民, 刘子建, 艾彦迪, 等. 大型数控龙门导轨磨床几何误差建模与基于可靠性理论的精度分配[J]. 机械工程学报, 2013, 49(17): 142-151.
YU Zhimin, LIU Zijian, AI Yandi, et al. Geometric error model and precision distribution based on reliability theory for large CNC gantry guideway grinder[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(17): 142-151.
- [17] 匡兵. 基于并行遗传算法的公差优化设计[C/CD]//中国仪器仪表学会第九届青年学术会议论文集, 2007.
KUANG Bing. Tolerance optimization design based on parallel genetic algorithm[CCD]//The 9th Youth Academic Conference Proceedings of China Instrument and Control Society, 2007.
- [18] 陈伦军. 机械优化设计遗传算法[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005.
CHEN Lunjun. Mechanical optimization design genetic

algorithm[M]. Beijing: China Machine Press, 2005.

- [19] 胡江敏. 基于数字样机的产品装配公差分析技术研究[D]. 上海: 同济大学, 2007.

HU Jiangmin. Product assembly tolerance analysis technology research based on digital prototype[D]. Shanghai: Tongji University, 2007.

- [20] 陈灿. 基于实际工况的数字样机公差影响研究[D]. 上海: 同济大学, 2009.

CHEN Can. The influence research of digital prototype tolerance based on the actual working condition[D]. Shanghai: Tongji University, 2009.

作者简介: 吕程, 女, 1988 年出生, 博士研究生。主要研究方向为机械产品公差设计理论及装配精度分析与控制。

E-mail: lvcheng0424@126.com

刘子建(通信作者), 男, 1953 年出生, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为机械精度链理论、车身刚度链理论、产品信息模型理论。

E-mail: zijianliu@hnu.edu.cn