DOI: 10.3901/JME.2015.13.144

2-UPR-RPU 并联机构奇异分析*

柴馨雪 项济南 李秦川

(浙江理工大学机械与自动控制学院 杭州 310018)

摘要: 具有两个转动一个移动(1T2R)的三自由度并联机构是少自由度并联机构中的一个重要分支。1T2R 三自由度并联机构根据两条转轴的几何关系和性质可以分为 P^*U^* 、UP、PU 和 RPR 等四类: 目前对 1T2R 并联机构的奇异研究主要集中于 P^*U^* 类、UP 类, 而对 PU 类和 RPR 类并联机构的奇异研究极少。对一种 RPR 类的 2-UPR-RPU 并联机构进行奇异性分析。运用螺旋理论对 2-UPR-RPU 并联机构进行自由度分析, 推导该机构的运动学反解方程, 进而求出机构的雅可比矩阵。根据雅可比矩阵求出 2-UPR-RPU 机构的三类运动学奇异位形, 分析该机构约束奇异。研究表明, 2-UPR-RPU 并联机构没有运动学反解奇异、运动学正解奇异和约束奇异, 但是有两种混合奇异。

关键词: 并联机构; 运动学; 奇异性

中图分类号: TH112

Singularity Analysis of a 2-UPR-RPU Parallel Mechanism

CHAI Xinxue XIANG Jinan LI Qinchuan

(Faculty of Mechanical Engineering & Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018)

Abstract: The 3-DOF parallel mechanism (PM) with one translational and two rotational (1T2R) DOFs is an important category of the lower-mobility PM. The 1T2R 3-DOF PM can be classified into four categories based on the geometry between the two axes of rotations, P^*U^* -equivalent, UP-equivalent, PU-equivalent, RPR-equivalent PM. The singularity analysis mainly focuses on P^*U^* -equivalent and UP-equivalent PM, while there is few research on the PU-equivalent and PRP-equivalent PM. A singularity investigation of a 2-UPR-RPU PM belonging to the PRP-equivalent PM of 1T2R is presented. The mobility of a 2-UPR-RPU PM is analyzed by using screw theory. Forward and inverse position relations are established. The Jacobian of the 2-UPR-RPU PM is obtained. Based on the analysis of the Jacobian matrix, three kinds of kinematic singularities of the 2-UPR-RPU PM are identified. The constraint singularity of this PM is analyzed. The 2-UPR-RPU PM has no inverse, forward and constraint singularity and has two kind of combined singularities.

Key words: parallel mechanism; kinematics; singularity

0 前言

并联机构由于其封闭运动链的特性, 可以用于要求高速、高刚度、高载荷等性质的场合。近十年, 为了减少制造和控制成本, 少自由度并联机构逐渐成为学术界和工业界的热点, 其中具有一个移动两个转动(1T2R)的三自由度并联机构极具应用价值^[1-5]。

1T2R 并联机构的两条转轴与其运动性能密切相关。如 3-PRRU 并联机构^[6]的两条转轴垂直相交, 交点可以沿着一条直线移动, 因此 3-PRRU 并联机构没有伴随运动。基于 3-RPS 并联机构的 Z3 主轴

头则是一个反例。3-PRS 并联机构的两条转轴是时变的, 即两条瞬时转轴的扭角和最短距离并不是一个常数, 这就导致了伴随运动。

运用 KONG 等^[7]提出的虚链机构法, 可以根据两条转轴的几何特性把 1T2R 并联机构分为四类: UP 类、PU 类、 P^*U^* 类和 RPR 类。在第一种 UP 类并联机构中, 动平台相对于固定坐标系有一条固定转轴, 一条绕此固定转轴旋转的转轴, 且两条转轴垂直相交。KONG 等^[7]提出的 UP 等效并联机构就属于此种分类。

在第二种 PU 类并联机构中, 动平台有两条位置方向随位型变化的转轴, 但两条轴线始终垂直相交。这一类机构被称为 PU 等效并联机构, 是由 LI 等^[6]提出的。

* 国家自然科学基金(51475431)和浙江省自然科学基金(LZ14E050005)资助项目。20150107 收到初稿, 20150522 收到修改稿

在第三种 P^*U^* 类并联机构中, 动平台有两条位置方向随位型变化的转轴, 且这两条转轴的扭转角和最短距离时刻变化。这种分类一个典型的例子就是 HUNT^[1] 提出的 3-PRS 并联机构。

在第四种 RPR 类并联机构中, 动平台有一条固定转轴和一条绕此固定转轴旋转的转轴, 两条转轴相互垂直, 且最短距离随位型变化。如 2-UPR-RPU 并联机构^[8]。

奇异是并联机构的一种本质属性。在奇异位形处, 并联机构失去刚度, 变得不可控, 可能造成人员和设备的损害。因此对并联机构进行奇异分析必不可少。GOSSELIN 等^[9]利用雅可比矩阵将奇异分为三类; HUNT^[10]运用螺旋理论研究了并联机构的奇异; MERLET^[11]提出了基于 Grassman 线几何的奇异分析方法; JOSHI 等^[12]运用螺旋理论的互易原理建立了少自由度并联机构的全雅可比矩阵, 进而基于该矩阵对 3-RPS 机构进行奇异分析; HUANG 等^[13]运用一般线性丛的方法对并联机构的奇异进行了分析; 此外, Grassmann-Cayley^[14-15]代数也被用于少自由度并联机构的奇异分析。ZLATANOV^[16]等定义了少自由度并联机构的约束奇异。

目前, 对 1T2R 并联机构的奇异研究主要集中在 P^*U^* 类、UP 类, 而对 PU 类和 RPR 类并联机构的奇异研究极少。对一种属于 RPR 类并联机构的 2-UPR-RPU 并联机构进行奇异性分析。首先运用螺旋理论对 2-UPR-RPU 并联机构进行自由度分析, 然后推导该机构的运动学反解方程, 进而求出机构的雅可比矩阵。根据雅可比矩阵求出 2-UPR-RPU 机构的三类运动学奇异位形, 最后分析该机构约束奇异。

1 自由度分析

1.1 机构描述

在初始位形下的 2-UPR-RPU 并联机构如图 1 所示, 由动平台、定平台、两条 UPR 分支以及一条 RPU 分支组成。其中, 两条 UPR 分支呈对称分布。UPR 分支中, 虎克铰(U)与定平台相连接, 转动副(R)与动平台相连接, 移动副(P)的轴线通过 U 铰中心点并且与两条转动轴线组成的平面垂直。两个 U 铰中的第一转动轴线共线。两个 R 副的转轴相互平行。

RPU 分支中 R 副与定平台相连接, U 铰与动平台相连接。P 副的轴线经过 U 铰中心点并与 U 铰中的两条转轴组成的平面垂直。U 铰中的第一转轴与 UPR 分支中 R 副轴线平行。

图 1 2-UPR-RPU 并联机构

第 i 分支上与动平台相连接的转动副轴线中心点为 A_i 。第 i 分支上与定平台相连接的转动副轴线中心点为 B_i 。 A_3 是 RPU 分支中 U 铰的中心点, B_1 和 B_2 分别是两个 UPR 分支中 U 铰的中心点。

建立如图 2 所示的定坐标系 $O-xyz$ 和动坐标系 $O'-uvw$ 。原点 O 是 B_1B_2 的中点, x 轴与 B_1B_2 垂直, y 轴与 B_1B_2 共线, z 轴方向向下。原点 O' 是 A_1A_2 的中点, u 轴与 A_1A_2 垂直, v 轴与 A_1A_2 共线, w 轴方向向下。 $\triangle B_1B_2B_3$ 和 $\triangle A_1A_2A_3$ 都是等腰直角三角形, $\angle B_1B_2B_3 = \angle A_1A_2A_3 = 90^\circ$ 。令 $OB_1 = OB_2 = OB_3 = b$, 则 B_1 、 B_2 、 B_3 点的坐标分别为 $(0, -b, 0)$ 、 $(0, b, 0)$ 、 $(b, 0, 0)$ 。 A_1 、 A_2 、 A_3 点的坐标分别为 $(x_{A_1}, y_{A_1}, z_{A_1})$ 、 $(x_{A_2}, y_{A_2}, z_{A_2})$ 、 $(x_{A_3}, y_{A_3}, z_{A_3})$ 。

图 2 2-UPR-RPU 机构简图

1.2 初始位形

在定坐标系 $O-xyz$ 下对 UPR 分支进行分析, UPR 分支的运动螺旋系可以表示为

$$\begin{cases} \mathbf{s}_{11} = (0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 0) \\ \mathbf{s}_{12} = (1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ b) \\ \mathbf{s}_{13} = (0 \ 0 \ 0; 0 \ m_{13} \ n_{13}) \\ \mathbf{s}_{14} = (1 \ 0 \ 0; 0 \ z_{A_1} - y_{A_1}) \end{cases} \quad (1)$$

式中, m_{ij} 、 n_{ij} 表示第 i 分支第 j 个运动副轴线的方向余弦。

式(1)的反螺旋为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{11}^r = (1 & 0 & 0; 0 & 0 & 0) \\ \mathcal{S}_{12}^r = (0 & 0 & 0; 0 & 0 & 1) \end{cases} \quad (2)$$

$\mathcal{S}_{11}^r$ 表示一个经过点 B_1 并且平行于定平台上的坐标轴 x 的约束力。 $\mathcal{S}_{12}^r$ 表示一个垂直于定平台的约束力偶, 如图 2 所示。

相似地, 可得另一 UPR 分支的反螺旋

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{21}^r = (1 & 0 & 0; 0 & 0 & 0) \\ \mathcal{S}_{22}^r = (0 & 0 & 0; 0 & 0 & 1) \end{cases} \quad (3)$$

$\mathcal{S}_{21}^r$ 表示一个经过点 B_2 并且平行于定平台上的坐标轴 x 的约束力。 $\mathcal{S}_{22}^r$ 表示一个垂直于定平台的约束力偶, 如图 2 所示。

第三分支上的运动螺旋系可以表示为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{31} = (0 & 1 & 0; -z_{A_3} & 0 & x_{A_3}) \\ \mathcal{S}_{32} = (1 & 0 & 0; 0 & z_{A_3} & -y_{A_3}) \\ \mathcal{S}_{33} = (0 & 0 & 0; l_{33} & 0 & n_{33}) \\ \mathcal{S}_{34} = (0 & 1 & 0; 0 & 0 & b) \end{cases} \quad (4)$$

式中, l_{ij} 、 n_{ij} 表示第 i 分支第 j 个运动副轴线的方向余弦。

式(4)的反螺旋为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{31}^r = (0 & 1 & 0; -z_{A_3} & 0 & 0) \\ \mathcal{S}_{32}^r = (0 & 0 & 0; 0 & 0 & 1) \end{cases} \quad (5)$$

约束力 $\mathcal{S}_{31}^r$ 与 U 铰的一个转轴重合并且平行于 A_1A_2 , 约束力偶 $\mathcal{S}_{32}^r$ 垂直于动平台, 如图 2 所示。

因此, 机构的约束螺旋系为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{11}^r = (1 & 0 & 0; 0 & 0 & 0) \\ \mathcal{S}_{12}^r = (0 & 0 & 0; 0 & 0 & 1) \\ \mathcal{S}_{21}^r = (1 & 0 & 0; 0 & 0 & 0) \\ \mathcal{S}_{22}^r = (0 & 0 & 0; 0 & 0 & 1) \\ \mathcal{S}_{31}^r = (0 & 1 & 0; -z_{A_3} & 0 & 0) \\ \mathcal{S}_{32}^r = (0 & 0 & 0; 0 & 0 & 1) \end{cases} \quad (6)$$

对式(6)求反螺旋, 可得动平台的运动螺旋系

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1^m = (1 & 0 & 0; 0 & z_{A_3} & 0) \\ \mathcal{S}_2^m = (0 & 1 & 0; 0 & 0 & 0) \\ \mathcal{S}_3^m = (0 & 0 & 0; 0 & 0 & 1) \end{cases} \quad (7)$$

式(7)中的第一个运动螺旋表示动平台有一个绕着动坐标系 u 轴转动的自由度, 第二个运动螺旋表示有一个绕着定坐标系 y 轴转动的自由度, 第三个运动螺旋表示有一个沿着 z 轴方向的移动自

由度。

通常使用修正的 Grübler-Kutzbach(G-K)公式分析并联机构自由度^[17], 即

$$M = d(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i + v \quad (8)$$

式中, M 是机构自由度, $d=6-\lambda$ 表示机构的阶数, λ 表示公共约束, n 表示连杆数目, g 表示运动副的数目, f_i 表示第 i 个运动副的自由度, v 表示并联机构冗余约束。

由于机构三个约束力偶方向相同, 故机构有一个公共约束, 即 $\lambda=1$ 。三个约束力偶共同作用的效果等同于一个在相同方向上的约束力偶, 约束了初始位形下动平台法线方向的转动。所以, 机构的阶 $d=6-\lambda=6-1=5$ 。

三个约束力的共同作用效果等同于两个相互垂直的约束力的作用效果, 其中一个约束力与定平台上的 x 轴重合, 另一个与 y 轴平行并且过第三分支上的 U 铰中心点。注意到其中一个约束力是冗余的, 即 $v=1$ 。

对 2-UPR-RPU 机构应用修正 G-K 公式可得

$$M = 5 \times (8 - 9 - 1) + 12 + 1 = 3 \quad (9)$$

1.3 一般位形

UPR 分支的运动螺旋系可以表示为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{11} = (0 & 1 & 0; 0 & 0 & 0) \\ \mathcal{S}_{12} = (l_{12} & 0 & n_{12}; -bn_{12} & 0 & bl_{12}) \\ \mathcal{S}_{13} = (0 & 0 & 0; n_{12} & m_{13} & -l_{12}) \\ \mathcal{S}_{14} = (l_{12} & 0 & n_{12}; n_{12}y_{A_1} & -n_{12}x_{A_1} & +l_{12}z_{A_1} -l_{12}y_{A_1}) \end{cases} \quad (10)$$

式中, l_{ij} 、 m_{ij} 、 n_{ij} 表示第 i 分支第 j 个运动副轴线的方向余弦。

式(10)的反螺旋为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{11}^r = (l_{12} & 0 & n_{12}; 0 & 0 & 0) \\ \mathcal{S}_{12}^r = (0 & 0 & 0; -n_{12} & 0 & l_{12}) \end{cases} \quad (11)$$

$\mathcal{S}_{11}^r$ 表示一个经过点 O 并且平行于 $\mathcal{S}_{12}$ 的约束力。 $\mathcal{S}_{12}^r$ 表示一个垂直于 y 轴和 $\mathcal{S}_{12}$ 的约束力偶。

相似地, 可得另一 UPR 分支的反螺旋

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{21}^r = (l_{12} & 0 & n_{12}; 0 & 0 & 0) \\ \mathcal{S}_{22}^r = (0 & 0 & 0; -n_{12} & 0 & l_{12}) \end{cases} \quad (12)$$

$\mathcal{S}_{21}^r$ 表示一个经过点 O 并且平行于 $\mathcal{S}_{12}$ 的约束力。 $\mathcal{S}_{22}^r$ 表示一个垂直于 y 轴和 $\mathcal{S}_{12}$ 的约束力偶。

第三分支上的运动螺旋系可以表示为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{31} = (0 \ 1 \ 0; -z_{A_3} \ 0 \ x_{A_3}) \\ \mathcal{S}_{32} = (l_{12} \ 0 \ n_{12}; n_{12}y_{A_3} - n_{12}x_{A_3} + l_{12}z_{A_3} - l_{12}y_{A_3}) \\ \mathcal{S}_{33} = (0 \ 0 \ 0; l_{33} \ 0 \ n_{33}) \\ \mathcal{S}_{34} = (0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ b) \end{cases} \quad (13)$$

式(13)的反螺旋为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{31}^r = (0 \ l_{12} \ 0; n_{12}x_{A_3} - l_{12}z_{A_3} \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{32}^r = (0 \ 0 \ 0; -n_{12} \ 0 \ l_{12}) \end{cases} \quad (14)$$

约束力 $\mathcal{S}_{31}^r$ 与 y 轴平行并且经过 yz 平面上一点, 约束力偶 $\mathcal{S}_{32}^r$ 与 $\mathcal{S}_{12}^r$ 相同。

因此, 机构的约束螺旋系为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{11}^r = (l_{12} \ 0 \ n_{12}; 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{12}^r = (0 \ 0 \ 0; -n_{12} \ 0 \ l_{12}) \\ \mathcal{S}_{21}^r = (l_{12} \ 0 \ n_{12}; 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{22}^r = (0 \ 0 \ 0; -n_{12} \ 0 \ l_{12}) \\ \mathcal{S}_{31}^r = (0 \ l_{12} \ 0; n_{12}x_{A_3} - l_{12}z_{A_3} \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{32}^r = (0 \ 0 \ 0; -n_{12} \ 0 \ l_{12}) \end{cases} \quad (15)$$

对式(15)求反螺旋, 可得动平台的运动螺旋系

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1^m = (l_{12} \ 0 \ n_{12}; 0 \ -x_{A_3}n_{12} + l_{12}z_{A_3} \ 0) \\ \mathcal{S}_2^m = (0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_3^m = (0 \ 0 \ 0; -n_{12} \ 0 \ l_{12}) \end{cases} \quad (16)$$

式(16)中的第一个运动螺旋表示动平台一个绕动坐标系 u 轴转动的自由度, 第二个运动螺旋表示一个绕着定坐标系 y 轴转动的自由度, 第三个运动螺旋表示有一个沿着动坐标系原点与定坐标系原点连线 $O'O$ 方向的移动自由度。

由于机构的三个约束力偶是方向相同的, 所以机构有一个公共约束, 即 $\lambda=1$ 。三个约束力偶共同作用的效果等同于一个在相同方向上的约束力偶的作用效果。它约束了初始位形下动平台垂直方向的转动。所以, 机构的阶 $d=6-\lambda=6-1=5$ 。

三个约束力共同作用效果等同于两个相互垂直的约束力, 其中一个约束力与定平台上的 x 轴重合, 另一个与定平台上的 y 轴平行并且过第三分支上的 U 铰中心点。注意到其中一个约束力是冗余, 即 $\nu=1$ 。

对 2-UPR-RPU 机构应用修正 G-K 公式可得

$$M = 5 \times (8 - 9 - 1) + 12 + 1 = 3 \quad (17)$$

2 位置分析

运动学的位置反解即给定动平台的姿态计算

相关关节变量。在本例中, 求运动学位置反解即是给定位置 z 和动平台的姿态, 求三个分支移动副的位移 q_i 。采用欧拉角 φ 、 θ 、 ψ 分别描述绕 z 、 y 、 x 轴的转动, 则动坐标系相对于定坐标系的旋转矩阵可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = \mathbf{R}_{xyz}(\psi, \theta, \varphi) &= \mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_x(\psi) = \\ &= \begin{bmatrix} c_\varphi c_\theta & c_\varphi s_\theta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\theta c_\psi + s_\varphi s_\psi \\ s_\varphi c_\theta & s_\varphi s_\theta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\theta c_\psi - c_\varphi s_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

式中, c 表示余弦, s 表示正弦。

$\triangle A_1A_2A_3$ 和 $\triangle B_1B_2B_3$ 是相似的等腰直角三角形。令 $OA_1=a$, a_i 、 b_i 、 $q_i(i=1, 2, 3)$ 和 p 分别表示在定坐标系下 A_i 、 B_i 的位置矢量及矢量 B_iA_i 、 OO'

$$\begin{cases} a_1 = \mathbf{R}[0 \ -a \ 0]^T \\ a_2 = \mathbf{R}[0 \ a \ 0]^T \\ a_3 = \mathbf{R}[a \ 0 \ 0]^T \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} b_1 = [0 \ -b \ 0]^T \\ b_2 = [0 \ b \ 0]^T \\ b_3 = [b \ 0 \ 0]^T \end{cases} \quad (20)$$

为了得到约束方程, 令矢量 c_1 、 c_2 、 c_3 分别表示转动副 A_1 、 A_2 、 A_3 轴线的单位矢量

$$\begin{cases} c_1 = \mathbf{R}[1 \ 0 \ 0]^T \\ c_2 = \mathbf{R}[1 \ 0 \ 0]^T \\ c_3 = \mathbf{R}[0 \ 1 \ 0]^T \end{cases} \quad (21)$$

第一个约束条件为 c_i 与 $p-b_i(i=1, 2, 3)$ 垂直。第二个约束条件为矢量 l_3 的 y 坐标值为零, 这是因为第三分支上 U 铰中心点 A_3 总是在平面 OBO' 上

$$l_3 = p + a_3 = [l_{3x}, l_{3y}, l_{3z}]^T \quad (22)$$

根据以上约束条件, 可得三个约束方程

$$\begin{cases} (p-b_1)^T c_1 = 0 \\ (p-b_2)^T c_2 = 0 \\ l_{3y} = 0 \end{cases} \quad (23)$$

化简式(23)可得

$$xc_\varphi c_\theta + (y+b)s_\varphi c_\theta - zs_\theta = 0 \quad (24)$$

$$xc_\varphi c_\theta + (y-b)s_\varphi c_\theta - zs_\theta = 0 \quad (25)$$

$$as_\varphi c_\theta = 0 \quad (26)$$

将式(26)分别代入式(24)和式(25)可得

$$xc_{\varphi}c_{\theta} - zs_{\theta} = 0 \quad (27)$$

由式(26)和式(27)可知, 如果 $c_{\theta}=0$, 则 $z=0$ 。由于 $z=0$ 在实际情况中不可能出现, 所以可推出 $s_{\varphi}=0$ 。所以可得以下两种情况。

(1) 当 $\varphi=0$, $xc_{\varphi}-zs_{\theta}=0$ 时, 约束条件为

$$\begin{cases} x = z \tan \theta \\ y = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases} \quad (28)$$

(2) 当 $\varphi=0$ 时, 约束条件为

$$\begin{cases} x = -z \tan \theta \\ y = 0 \\ \varphi = \pi \end{cases} \quad (29)$$

根据矢量闭链 $\mathbf{p}=\mathbf{b}_i+\mathbf{q}_i-\mathbf{a}_i(i=1, 2, 3)$, 可得两组 $\mathbf{q}_i$ 。例如当 $\varphi=0$ 时, $\mathbf{q}_i$ 为

$$\begin{cases} \mathbf{q}_1 = [zt_{\theta} - as_{\varphi}s_{\psi} \ b - ac_{\psi} \ z - ac_{\theta}s_{\psi}]^T \\ \mathbf{q}_2 = [zt_{\theta} + as_{\varphi}s_{\psi} \ -b + ac_{\psi} \ z + ac_{\theta}s_{\psi}]^T \\ \mathbf{q}_3 = [zt_{\theta} - b + ac_{\theta} \ 0 \ z - as_{\theta}]^T \end{cases} \quad (30)$$

式中, t 表示正切。

因此, 2-UPR-RPU 并联机构的运动学位置反解为

$$\begin{cases} |\mathbf{q}_1| = \sqrt{(zt_{\theta} - as_{\varphi}s_{\psi})^2 + (b - ac_{\psi})^2 + (z - ac_{\theta}s_{\psi})^2} \\ |\mathbf{q}_2| = \sqrt{(zt_{\theta} + as_{\varphi}s_{\psi})^2 + (-b + ac_{\psi})^2 + (z + ac_{\theta}s_{\psi})^2} \\ |\mathbf{q}_3| = \sqrt{(zt_{\theta} - b + ac_{\theta})^2 + (z - as_{\theta})^2} \end{cases} \quad (31)$$

3 速度分析

式(31)等号两边同时对时间 t 求导可得

$$\mathbf{J}_q \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} - \mathbf{G} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = 0 \quad (32)$$

其中矩阵 $\mathbf{J}_q$ 与 $\mathbf{G}$ 分别为

$$\mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} J_{q11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{q22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{q33} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \quad (34)$$

式(33)中 J_{q11} 、 J_{q22} 、 J_{q33} 分别为

$$\begin{cases} J_{q11} = \sqrt{2(B_1^2 + C_1^2 + D^2)} \\ J_{q22} = \sqrt{2(B_2^2 + C_2^2 + D^2)} \\ J_{q33} = \sqrt{2(F^2 + G^2)} \end{cases} \quad (35)$$

式(34)中 G_{ij} 分别为

$$\begin{cases} G_{11} = 2A_1B_1 + 2as_{\psi}s_{\theta}C_1 \\ G_{12} = -2ac_{\psi}s_{\theta}B_1 - 2ac_{\psi}c_{\theta}C_1 + 2as_{\psi}D \\ G_{13} = 2z + 2t_{\theta}B_1 - 2as_{\psi}c_{\theta} \\ G_{21} = 2A_2B_2 - 2as_{\psi}s_{\theta}C_2 \\ G_{22} = 2ac_{\psi}s_{\theta}B_2 + 2ac_{\psi}c_{\theta}C_2 + 2as_{\psi}D \\ G_{23} = 2z + 2t_{\theta}B_2 + 2as_{\psi}c_{\theta} \\ G_{31} = 2EF - 2ac_{\theta}G \\ G_{32} = 0 \\ G_{33} = 2t_{\theta}F + 2G \end{cases} \quad (36)$$

$$A_1 = z(t_{\theta}^2 + 1) - as_{\psi}c_{\theta} \quad A_2 = z(t_{\theta}^2 + 1) + as_{\psi}c_{\theta}$$

$$B_1 = zt_{\theta} - as_{\psi}s_{\theta} \quad B_2 = zt_{\theta} + as_{\psi}s_{\theta}$$

$$C_1 = z - as_{\psi}c_{\theta} \quad C_2 = z + as_{\psi}c_{\theta}$$

$$D = b - ac_{\psi} \quad E = z(t_{\theta}^2 + 1) - as_{\theta}$$

$$F = ac_{\theta} - b + zt_{\theta} \quad G = z - as_{\theta}$$

当矩阵 $\mathbf{G}$ 不为奇异矩阵时可得

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{J}_q \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (37)$$

4 奇异分析

根据矩阵 $\mathbf{J}_q$ 和 $\mathbf{G}$ 的欠秩形式, 可以将奇异分为三类: 运动学反解奇异、运动学正解奇异、混合奇异^[9]。

4.1 反解奇异

第一类奇异为运动学反解奇异, 发生在 $|\mathbf{J}_q|=0$ 、 $|\mathbf{G}| \neq 0$ 时。在发生反解奇异位形时, 可以认为动平台失去一个或者多个自由度。这意味着在该位形下, 当驱动副上没有任何力矩和力的情况下, 动平台可以承受一个或多个力或力偶。反解奇异通常发生在工作空间的边界处。

当 $|\mathbf{J}_q|=0$ 时, 有以下三种可能性。

(1) 当 $J_{q11}=0$, 有 $B_1=0$ 、 $C_1=0$ 、 $D=0$, 即

$$\begin{cases} zt_{\theta} - as_{\psi}s_{\theta} = 0 \\ z - as_{\psi}c_{\theta} = 0 \\ b - ac_{\psi} = 0 \end{cases} \quad (38)$$

由于 $b-ac_\psi=0$, 则有 $c_\psi = \frac{b}{a}$ 。由 $\frac{b}{a} > 1$ 和 $|c_\psi| \leq 1$, 此时, 可以推出 $b-ac_\psi \neq 0$ 。与假设相矛盾, 所以 $J_{q11} \neq 0$ 。

(2) 当 $J_{q22}=0$, 有 $B_2=0$ 、 $C_2=0$ 、 $D=0$, 即

$$\begin{cases} zt_\theta + as_\psi s_\theta = 0 \\ z + as_\psi c_\theta = 0 \\ b - ac_\psi = 0 \end{cases} \quad (39)$$

由 $b-ac_\psi \neq 0$ 可推出 $J_{q22} \neq 0$ 。

(3) 当 $J_{q33}=0$, 有 $F=0$ 、 $G=0$, 即

$$\begin{cases} ac_\theta - b + zt_\theta = 0 \\ z - as_\theta = 0 \end{cases} \quad (40)$$

式(40)的解为

$$\begin{cases} \theta = \arccos\left(\frac{a}{b}\right) \\ z = \frac{a\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \end{cases} \quad (41)$$

或

$$\begin{cases} \theta = -\arccos\left(\frac{a}{b}\right) \\ z = -\frac{a\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \end{cases} \quad (42)$$

式(42)中 $z < 0$, 该情况在实际情况中不可能达到, 所以舍去。

当 $J_{q33}=0$ 时, $|J_q|=0$ 。由于 $F=0$ 、 $G=0$ 、 $G_{31}=G_{33}=0$, 可以推出 $|G|=0$ 。与假设相矛盾, 所以该机构不存在反解奇异。

4.2 正解奇异

第二类奇异为正解奇异, 发生在 $|J_q| \neq 0$ 、 $|G|=0$ 时。在发生正解奇异位形时, 可以认为动平台得到一个或者多个自由度。这意味着在此种情况下, 动平台可以在所有驱动都锁住的情况下在某些方向发生运动。在正解奇异位形下, 当所有驱动都锁住时, 机构动平台不能承受一个或多个力或力偶。

当 $|G|=0$ 时, 有以下两种可能性。

(1) 当 $G_{12}=0$, $G_{22}=0$ 时, 可得 $G_{12}+G_{22}=0$ 和 $G_{12}-G_{22}=0$, 即

$$\begin{cases} 4as_\psi D = 0 \\ -4azc_\psi s_\theta t_\theta - 4azc_\psi c_\theta = 0 \end{cases} \quad (43)$$

化简式(43)得

$$\begin{cases} 4as_\psi D = 0 \\ -4azc_\psi \frac{1}{c_\theta} = 0 \end{cases} \quad (44)$$

当 $D=b-ac_\psi \neq 0$ 时, 可以推出 $\psi=0$, $z=0$ 。由于 $z=0$ 时, 动平台位于定坐标系原点上, 此种情况不可能发生。所以 $G_{12}=0$, $G_{22}=0$ 不可能发生。

(2) 当 $G_{31}=0$, $G_{33}=0$ 时, 可得 $G_{31}+G_{33}=0$ 和 $G_{31}-G_{33}=0$, 即

$$\begin{cases} (2E - 2t_\theta)F + (2 - 2ac_\theta)G = 0 \\ (2E + 2t_\theta)F + (-2 - 2ac_\theta)G = 0 \end{cases} \quad (45)$$

式(45)的解为

$$\begin{cases} F = 0 \\ G = 0 \end{cases} \quad (46)$$

或

$$\begin{cases} E = 0 \\ t_\theta = 0 \\ G = 0 \end{cases} \quad (47)$$

当 $F=0$, $G=0$ 时, 可以推出 $|G|=0$ 和 $|J_q|=0$, 所以此种情况不属于运动学正解奇异。

当 $E=0$, $t_\theta=0$, $G=0$ 时, 意味着 $\theta=0$, $z=0$ 。由于 $z=0$ 时, 动平台位于定坐标系原点上, 此种情况不可能发生。所以 $E=0$, $t_\theta=0$, $G=0$ 不可能发生。

综上, 该机构并不存在正解奇异。

4.3 混合奇异

第三类奇异为混合奇异, 发生在 $|J_q|=0$ 、 $|G|=0$ 时。该奇异位形发生在所有驱动都锁住的情况下分支可以承受一个有限运动, 或者当驱动副发生一个有限运动时而动平台不产生运动。

根据前文分析内容, $|J_q|=|G|=0$ 即 $\theta = \arccos\left(\frac{a}{b}\right)$, $z = \frac{a\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$ 。该机构有两种可能的混合奇异位形。

第一种混合奇异发生在第三分支上的 P 副与第一第二分支形成的约束平面平行时。动平台上中心点的 z 坐标值为 $asin\theta$ 。第三分支上 U 铰的一条轴线和 R 副的轴线重叠。图 3 为当 $\psi=0$ 时情况, 图 4 为当 $\psi \neq 0$ 时情况。

图 3 $\psi=0$ 时第一种混合奇异 图 4 $\psi \neq 0$ 时第一种混合奇异

第二种混合奇异是在另一种反解情况下得到的。图 5 为当 $\psi=0$ 时情况, 图 6 为当 $\psi \neq 0$ 时情况。在这两种奇异位形时, 第三分支上一条 U 铰的轴线与 R 副轴线重合。此时, 2-UPR-RPU 并联机构变为 2-UPR-RPR 并联机构。

图 5 $\psi=0$ 时第二种混合奇异 图 6 $\psi \neq 0$ 时第二种混合奇异

从图 3~6 可见, 这两种混合奇异发生的位型都较为特殊, 可以在设计阶段通过优化杆件尺寸以及轨迹规划进行规避。

4.4 约束奇异

作用在动平台上的约束螺旋线性相关时, 发生约束奇异, 即动平台约束螺旋系的秩减少。当机构位于发生约束奇异的位形时, 该位形下的瞬时自由度要高于机构的自由度^[17]。

一般位形下, 作用于 2-UPR-RPU 机构动平台三个约束螺旋可以组成一个约束雅可比 J_C

$$J_C = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{11}^r \\ \mathbf{s}_{12}^r \\ \mathbf{s}_{31}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{12} & 0 & n_{12}; & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0; & -n_{12} & 0 & l_{12} \\ 0 & l_{12} & 0; & n_{12}x_{A_3} - l_{12}z_{A_3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

对式(48)中矩阵进行行变换

$$J_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{n_{12}}{l_{12}}; & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0; & 0 & 0 & \frac{n_{12}x_{A_3} - l_{12}z_{A_3}}{n_{12}} \\ 0 & 0 & 0; & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

由式(49)可知, 约束雅可比 J_C 的秩始终为 3, 表明该机构的约束在任意位形下不会线性相关, 即该机构不存在约束奇异。

5 结论

(1) 2-UPR-RPU 并联机构不存在运动学反解奇

异、正解奇异和约束奇异。

(2) 2-UPR-RPU 并联机构有两种混合奇异。这两种混合奇异分别发生在两种不同反解情况下第三分支上 U 铰的一条轴线和 R 副的轴线重叠时。

(3) 2-UPR-RPU 并联机构总体而言奇异较少, 具有较好的应用潜力。

参 考 文 献

- [1] HUNT K. Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms[J]. Journal of Mechanical Design, 1983, 105(4): 705-712.
- [2] WAHL J. Articulated tool head: U.S. Patent, 6, 431, 802[P]. 2002-08-13.
- [3] CARRETERO J, NAHON M, GOSSELIN C, et al. Kinematic analysis of a three-dof parallel mechanism for telescope applications[C]// 1997 ASME Design Engineering Technical Conferences September 14-17, Sacramento, California. 1997: Paper DETC97/DAC-3981.
- [4] POULIOT N A C L, GOSSELIN M M. Motion simulation capabilities of three-degree-of-freedom flight simulators[J]. Journal of Aircraft, 1998, 35(1): 9-17.
- [5] YU J, HU Y, BI S, et al. Kinematics feature analysis of a 3-DOF compliant mechanism for micro manipulation[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2004, 17(1): 127-131.
- [6] LI Q, HERVE J M. 1T2R parallel mechanisms without parasitic motion[J]. Robotics, IEEE Transactions on, 2010, 26(3): 401-410.
- [7] KONG X, GOSSELIN C M M. Type synthesis of three-DOF up-equivalent parallel manipulators using a virtual-chain approach[M]// Advances in Robot Kinematics: Springer, 2006: 123-132.
- [8] LI Q, HERVE J M. Type synthesis of 3-DOF RPR-equivalent parallel mechanisms[J]. Robotics, IEEE Transactions on, 2014, 30(6): 1333-1343.
- [9] GOSSELIN C, ANGELES J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains[J]. Robotics and Automation, IEEE Transactions on, 1990, 6(3): 281-290.
- [10] HUNT K H. Kinematic geometry of mechanisms[M]. Clarendon Press Oxford, 1990.
- [11] MERLET J P. Singular configurations of parallel manipulators and Grassmann geometry[J]. The International Journal of Robotics Research, 1989, 8(5): 45-56.
- [12] JOSHI S A, TSAI L W. Jacobian analysis of limited-DOF parallel manipulators[J]. Journal of Mechanical Design, 2002, 124(2): 254-258.
- [13] HUANG Z, ZHAO Y, WANG J, et al. Kinematic principle and geometrical condition of general-linear-complex special configuration of parallel manipulators[J]. Mechanism and Machine Theory, 1999, 34(8): 1171-1186.
- [14] KANAAN D, WENGER P, CHABLAT D. Singularity analysis of limited-DOF parallel manipulators using Grassmann-Cayley algebra[M]// Advances in Robot Kinematics: Analysis and Design, Springer, 2008.
- [15] CARO S, MOROZ G, GAYRAL T, et al. Singularity analysis of a six-dof parallel manipulator using grassmann-cayley algebra and groebner bases[M]// Brain, Body and Machine, Springer, 2010.
- [16] ZLATANOV D, BONEV I A, GOSSELIN C M. Constraint singularities of parallel mechanisms[C]// Proceedings of Robotics and Automation, 2002, ICRA'02, IEEE International Conference on. IEEE, 2002: 496-502.
- [17] HUANG Z, LI Q, DING H. Theory of parallel mechanisms[M]. Springer, 2012.

作者简介: 柴馨雪, 女, 1988 年出生, 博士研究生。主要研究方向为并联机构构型综合。

E-mail: jxcxx88@163.com

项济南, 男, 1990 年出生。主要研究方向为并联机构奇异分析。

E-mail: xjinan@163.com

李秦川(通信作者), 男, 1975 年出生, 博士, 教授。主要从事并联机器人机构学理论和应用技术研究。发表论文 30 余篇。

E-mail: lqchuan@zstu.edu.cn