DOI: 10.3901/JME.2019.13.001

非线性共振及其计算和应用*

侯磊 陈予恕

(哈尔滨工业大学航天学院 哈尔滨 150001)

摘要: 通过总结非线性动力学系统现有部分成果,给出了非线性共振的含义及其计算方法。结合课题组在航空发动机转子系统非线性动力学研究领域的部分研究成果,以滚动轴承转子系统的VC共振、Duffing系统的亚谐波共振、含裂纹、碰摩等故障转子系统的共振以及双转子系统的组合共振为算例,给出了具体工程问题的分析过程,并提出了非线性振动系统工作频率和工作点的优化选择方法,为非线性动力学系统,尤其是复杂非线性转子系统结构参数的优化设计和故障诊断提供了具体路径。

关键词: 非线性共振; 航空发动机转子; 滚动轴承; VC共振; 组合共振; 故障共振

中图分类号: V231

Nonlinear Resonance and Its Calculations and Applications

HOU Lei CHEN Yushu

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001)

Abstract: The definition of nonlinear resonance and its calculation methods is presented through summarizing some of the current research findings for nonlinear dynamic systems. Based on the research findings in the field of nonlinear dynamics on aero-engine's rotor system, the investigation process for resolving specific engineering problems is given through practical calculation examples such as the VC resonance of a ball bearing-rotor system, the sub-harmonic resonance of Duffing system, the resonances of rotor systems with crack fault or rub-impact, and the combination resonances of a dual-rotor system. Finally, the selection method for optimizing the operating frequency or operating point of nonlinear vibration systems is proposed. The approach provides specific path for the design of structure parameters and fault diagnosis of nonlinear dynamic systems, particularly for the complex nonlinear rotor systems.

Key words: nonlinear resonance; aero-engine's rotor system; rolling bearing; VC resonance; combination resonance; vibrational fault induced resonance

0 前言

振动现象是自然界、工程技术领域存在的一种十分普遍的物理现象。振动系统在相等的时间间隔内围绕平衡点作往复运动,称为周期振动,其中简谐振动是周期振动的典型代表。在振动理论中,采用振幅、频率和相位等三要素表征振动现象^[1-2]。

振动系统的组成主要包括:惯性元件、阻尼元件、刚度元件和外激励。振动系统有自己的固有频率 ω_0 ,它可能产生自由振动或受迫振动,多数情况下,自由振动将衰减掉,而受迫振动由于外激励 Ω 的不可避免而与之共存,尤其在 $\Omega = \omega_0$ 的情况下因共振产生很大的振动,为避免造成危害,人们不断

对之研究并设法控制^[3-4]。

为了描述和分析振动系统的振动规律,可基于牛顿第二定律 $F = ma = m\ddot{x}$ 建立系统的振动方程,即惯性力与阻尼力、弹性恢复力、激励力相平衡,其中, x 为振动位移, $\dot{x}$ 为振动速度, $\ddot{x}$ 为振动加速度,满足

$$m\ddot{x} + f_1(\dot{x}) + f_2(x) = A \sin \Omega t \quad (1)$$

式中,若 $f_1(\dot{x})$ 为 $\dot{x}$ 的线性函数, $f_2(x)$ 为 x 的线性函数,则系统(a)为线性振动系统,否则为非线性系统。若 x 为单变量,则系统(a)为单自由度系统,若 x 为矢量,则式(1)为多自由度系统。线性单自由度单频激励系统有一个共振点,而线性 n 自由度系统有 n 个共振点,其数值由模态分析确定。如果 n 自由度线性振动系统受到两个不同频率的激励力作用,则有 $2n$ 个共振点。若式(1)为非线性振动系统,除 n 个与线性共振点对应的主共振点以外,还可能有亚谐共

* 国家重点基础研究发展计划(973计划, 2015CB057400)、国家自然科学基金(11602070)和中国博士后科学基金(2018T110282)资助项目。
20180815收到初稿,20190415收到修改稿

振点、超谐共振点、组合共振点、故障共振点等。

本文基于在航空发动机转子系统非线性动力学研究领域的部分研究成果,总结并提出非线性共振的定义及其计算方法,通过对滚动轴承转子系统的 VC 共振^[5]、Duffing 系统的亚谐共振^[6]、含裂纹^[7]、碰摩^[8]等故障转子系统的共振以及双转子系统的组合共振^[9]等算例的计算分析,介绍具体工程问题的分析过程和操作步骤,为非线性振动系统工作频率和工作点的优化选择提供理论方法。

1 非线性共振(点或域)的定义

非线性振动系统的非线性共振是对照于线性振动系统的线性共振提出的概念,不仅包括非线性振动系统中与线性振动系统中线性共振相对应的主共振(外激励的频率接近系统固有频率时发生的共振),还包括外激励的分频接近系统固有频率时引起的亚谐共振、外激励的倍频接近系统固有频率时引起的超谐共振、多激励的组合频率接近系统固有频率时引起的组合共振、参数激励以及其分频或倍频接近系统固有频率时引起的参激共振、系统某些振动故障引起的故障共振,以及多自由度系统的内共振等。线性共振是在幅频响应曲线(共振曲线)上 $\Omega = \omega_0$ 极狭窄范围内有较大振幅值的现象,而非线性共振是在相关共振频率邻域上(可能是一个共振区)有较大振幅值的现象。通常情况下,系统在主共振下存在多解及分岔现象,这些复杂非线性现象及其产生的动力学机理是非线性振动的重点研究内容。除主共振以外,其他的非线性共振问题也是非线性振动的重点研究内容。

非线性共振是非线性振动研究的主要关注点。对工程中的非线性振动问题,一般可按下列步骤进行研究:建立力学模型(根据工程结构的工作原理、工艺参数、所需解决的主要问题,抓主要矛盾),写出振动方程,进行理论分析、试验验证。理论分析的结果用来改进设计、指导维修或排除故障。

根据工程中提出的非线性振动问题,主要按以下步骤进行研究。

(1) 要进行现场调研,以便了解振动故障的现象、造成的危害,工程结构的动力学工作原理,现场安装调试的工艺参数等,初步分析对需要解决的问题来说,应建立一个什么样的力学模型,以及什么是主要结构参数,然后根据动力学原理建立问题的力学模型。

(2) 对力学模型进行理论分析,找到系统的动力学行为(系统解的结构)与结构参数之间的联系,

重点关注系统可能产生的非线性共振现象,通过理论研究阐释其机理。这一步往往是一个应用、发展理论或建立新理论的过程。如果说建立的力学模型过于复杂和庞大,目前已有的理论无法对之进行分析,需要探讨新的理论方法,或进行数值计算和动力学相似的模型试验,以便找到解的结构和系统结构参数之间的某些联系,并发现某些新的动力学现象。数值计算和模型试验,是解决工程应用问题的。

(3) 已经得到的理论分析结果,需要进行试验验证。

(4) 正确的理论分析结果应结合所研究的对象,给出合理设计结构参数和排除故障的指南。

2 非线性共振计算举例

2.1 算例 1: 滚动轴承转子系统的 VC 共振

滚动轴承因含有分数指数型 Hertz 接触力、间隙以及滚动体周期性通过受载区引起的变刚度激励(参数激励),在一定的参数条件和载荷条件下,当参激频率接近转子系统某阶固有频率时,可能引起共振,这种共振称为接触共振(VC 共振),VC 共振本质上属于参激共振。

20 世纪 70 年代,HARRIS 等基于经典的 Hertzian 接触理论提出了滚动轴承 VC 振动的理论模型^[10],随后,在单球 Hertzian 接触系统中得到试验证实^[11-12]。特别地,RIGAUD 等^[13-14]基于单球 Hertzian 接触系统研究了 Hertzian 接触引起的接触共振问题,表明系统的共振曲线具有软弹簧特征(软特性),该结果得到试验验证。类似地,SANKARAVELU 等^[15]也发现滚动轴承在 Hertzian 接触引起的接触共振中表现出软特性。近年来,陈予恕课题组尝试对滚动轴承的 VC 共振问题进行深入的机理研究,通过理论研究揭示出:在垂直加载的滚动轴承转子系统中,发生 VC 共振时,垂直方向上的共振曲线表现为软特性,而水平方向的共振曲线具有软硬特性共存的特征^[16-18]。随后通过试验研究证实了上述 VC 共振特征^[19]。此外,还进一步分析了轴承滚动体数目以及转子不平衡量对滚动轴承转子系统 VC 共振的影响规律^[20],并从动力学角度讨论了如何利用 VC 共振特性辅助进行轴承故障诊断^[21-22]。下面以试验系统为例简要介绍滚动轴承转子系统 VC 共振的计算步骤和主要研究结果。

(1) 针对图 1a 所示的试验系统进行动力学建模,理论模型如图 1b 所示。假设转轴与轴承内圈、轴承外圈与轴承座之间均是过盈配合,与轴承外圈固连的轴承座是刚性支承;轴承内部滚动体做纯滚动、无故障,并忽略滚动体惯性以及滚动体与保持

架相互作用对系统动力学特性的影响。根据 Newton 第二定律建立滚动轴承刚性转子系统的运动微分方程

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + \sum_{j=1}^{N_b} C_b (\delta_j G(\delta_j))^{1.5} \sin \theta_j &= 0 \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + \sum_{j=1}^{N_b} C_b (\delta_j G(\delta_j))^{1.5} \cos \theta_j &= mg + F \end{aligned} \quad (2)$$

(a) 试验系统

(b) 理论模型

(c) 滚动轴承示意图

图 1 滚动轴承转子系统模型

(2) 对式(1)描述的动力学模型进行理论分析, 重点关注 VC 共振区附近系统的动力学行为。该模型侧重试验研究结果, 理论研究部分采用数值积分方法。如若侧重分析系统周期解的稳定性及分岔机理的研究可采用改进的谐波平衡法等解析或半解析方法, 可参考文献[16-18]。

(3) 对理论计算结果进行试验验证。选取两组

式中, $\theta_j = 2\pi(j-1)/N_b + \omega t / (r_i + r_o)$ 与 $\delta_j = x \cos \theta_j + y \sin \theta_j - \delta_0$ 分别为第 j 个滚动体的角位置和接触变形, $G(\cdot)$ 为 Heaviside 函数, m 、 c 、 C_b 分别为质量、阻尼和接触刚度, ω 为转速, N_b 、 r_i 、 r_o 分别为轴承的滚动体数目、内圈半径和外圈半径, F 为外载荷。

试验测试结果与理论计算结果进行对比, 如图 2 和图 3 所示。其中, 图 2 为外载荷 230 N 时系统垂直方向的幅频响应曲线, 表现为软特性, 试验结果与理论结果一致。图 3 为外载荷 5 040 N 时系统水平方向的幅频响应曲线, 理论结果表现出明显的软硬特性共存现象, 从试验结果上看升速与降速曲线出现交叉, 也反映出软硬特性共存现象。

(a) 理论计算结果

(b) 试验测试结果

图 2 外载荷为 230 N 时系统垂直方向的幅频响应曲线

(a) 理论计算结果

(b) 试验测试结果

图 3 外载荷为 5040 N 时系统水平方向的幅频响应曲线

软特性潜在降低了系统的临界转速,并使系统更易于发生振动跳跃现象,而软硬共存现象扩大了 VC 共振对应的转速区间,因此,外载荷的增加使得滚动轴承转子系统的不稳定区和振动跳跃区随之扩大。可见,滚动轴承的动力学稳定性对转子系统的安全稳定运行起到至关重要的作用,因而在选择转子系统的工作转速时应做必要的控制。

2.2 算例 2: Duffing 系统的亚谐共振

亚谐共振及超谐共振是非线性系统中常见的非线性共振现象。在 C-L(陈予恕-LONGFORD)方法创立之时,就是为了求解 Mathieu-Duffing 系统的亚谐共振解,并揭示解的拓扑结构与系统参数间的联系^[23]。此后,众多学者就 Duffing 系统以及其他各类振动系统的亚谐共振问题展开了研究。XU 等^[24]采用谐波平衡法求解了 Duffing 系统的 1/3 亚谐共振解,并分析了解的稳定性。KHANG 等^[25]采用平均法研究了含位移分数阶导数项的 Duffing 系统的 1/3 亚谐共振问题,讨论了分数阶参数对共振条件的影响。在研究强非线性 Duffing 系统的 1/3 亚谐共振时,TANG^[26]提出了改进的 Lindstedt-Poincaré 摄动法,LIU 等^[27]基于 Melnikov 函数提出了同伦分析方法。YANG 等^[28]研究了同时含高、低频简谐激励的 Duffing 系统的亚谐共振及超谐共振问题,分析了多频激励对系统共振特性的重要影响。YANG^[29]采用多尺度法对含立方非线性多自由度系统的亚谐共振及超谐共振响应进行了解析求解。此外,各类工程系统的亚谐共振问题也被广泛研究,例如,两自由度分段线性系统^[30],含位移分数阶导数项的 van der Pol 系统^[31],周期激励悬索系统^[32],含平方非线性的时滞系统^[33],复合材料层合圆柱壳^[34],多啮合齿轮传动系统^[35],转动惯量和刚度不对称的非线性旋转轴^[36],含间隙非线性扭转振动系统^[37],转子-密封系统^[38],等。特别地,在综合含有分数指数型 Hertzian 接触力和径向间隙的滚动轴承-转子系统中,BAI 等^[39]通过试验证实了亚谐共振的存在。HOU 等^[40]研究了常数激励与简谐激励联合作用下非线性转子系统的亚谐共振问题,给出了 Duffing 型转子系统发生 1/2 亚谐共振的参数条件,并讨论了常数激励在滚动轴承-转子系统中发生亚谐共振的重要作用^[41]。下面以 Duffing 系统的 1/3 亚谐共振为例介绍亚谐共振解的求解计算过程。

研究如下无阻尼 Duffing 系统的 1/3 亚谐共振

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F \cos \omega t - \varepsilon \beta \omega_0^2 x^3 \quad (3)$$

令

$$\omega_0^2 x = \left(\frac{\omega}{3}\right)^2 + \varepsilon \sigma \quad (4)$$

式(3)变为

$$\ddot{x} + \left(\frac{\omega}{3}\right)^2 x = F \cos \omega t - \varepsilon (\beta \omega_0^2 x^3 + \sigma x) \quad (5)$$

由于外激励幅值 $F = O(1)$, 对式(5)做变换

$$x = y - \frac{9}{8} \frac{F}{\omega^2} \cos \omega t, \text{ 得}$$

$$\ddot{y} + \left(\frac{\omega}{3}\right)^2 y = -\varepsilon \left(\beta \omega_0^2 \left(y - \frac{9}{8} \frac{F}{\omega^2} \cos \omega t \right)^3 + \sigma \left(y - \frac{9}{8} \frac{F}{\omega^2} \cos \omega t \right) \right) \quad (6)$$

对式(6)用 KBM 法^[2]求解, 设解为

$$y = a \cos \left(\frac{1}{3} \omega t + \theta \right) + \varepsilon x_1 \left(a, \omega t, \frac{1}{3} \omega t + \theta \right) + \cdots \quad (7)$$

其中 a 和 θ 由下式决定

$$\dot{a} = \varepsilon a_1(a, \theta) + \varepsilon^2 a_2(a, \theta) + \cdots \quad (8)$$

$$\dot{\theta} = \varepsilon \omega_1(a, \theta) + \varepsilon^2 \omega_2(a, \theta) + \cdots \quad (9)$$

将式(7)~(9)代入式(6), 得一次渐近方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \left(\frac{\omega}{3}\right)^2 x_1 = & f(x_0, \dot{x}_0, \omega t) + \\ & \frac{2}{3} \omega a_1 \sin \left(\frac{1}{3} \omega t + \theta \right) + \\ & \frac{2}{3} a \omega \omega_1 \cos \left(\frac{1}{3} \omega t + \theta \right) - a \sigma \cos \left(\frac{1}{3} \omega t + \theta \right) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} f(x_0, \dot{x}_0, \omega t) = & -\beta \omega_0^2 \left(a \cos \left(\frac{1}{3} \omega t + \theta \right) - \frac{9}{8} \frac{F}{\omega^2} \cos \omega t \right)^3 + \\ & \sigma \left(a \cos \left(\frac{1}{3} \omega t + \theta \right) - \frac{9}{8} \frac{F}{\omega^2} \cos \omega t \right) \end{aligned} \quad (11)$$

将式(11)代入式(10), 整理得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \left(\frac{\omega}{3}\right)^2 x_1 = & \left(-\frac{3}{4} \beta \omega_0^2 a^3 + \frac{27}{32 \omega^2} \beta \omega_0^2 F a^2 \cos 3\theta - \right. \\ & \left. \frac{243}{128 \omega^4} \beta \omega_0^2 F^2 a + \frac{2}{3} a \omega \omega_1 - a \sigma \right) \cos \left(\frac{1}{3} \omega t + \theta \right) + \\ & \left(\frac{27}{32 \omega^2} \beta \omega_0^2 F a^2 \sin 3\theta + \frac{2}{3} \omega a_1 \right) \sin \left(\frac{1}{3} \omega t + \theta \right) + \cdots \end{aligned} \quad (12)$$

为使 x_1 为周期解, 上式中 $\sin \left(\frac{1}{3} \omega t + \theta \right)$ 与 $\cos \left(\frac{1}{3} \omega t + \theta \right)$ 的系数为零, 可得

$$a_1 = \frac{81}{64\omega^3} \beta \omega_0^2 F a^2 \sin 3\theta \quad (13)$$

$$\omega_1 = \frac{3}{2\omega} \left(\frac{3}{4} \beta \omega_0^2 a^2 - \frac{27}{32\omega^2} \beta \omega_0^2 F a \cos 3\theta + \frac{243}{128\omega^4} \beta \omega_0^2 F^2 + \sigma \right) \quad (14)$$

在满足式(13)、(14)的条件下, 原方程有一次近似解

$$x = a \cos \left(\frac{1}{3} \omega t + \theta \right) - \frac{9}{8} \frac{F}{\omega^2} \cos \omega t \quad (15)$$

其中 a 和 θ 由以下微分方程决定

$$\dot{a} = \frac{81}{64\omega^3} \varepsilon \beta \omega_0^2 F a^2 \sin 3\theta \quad (16)$$

$$\dot{\theta} = \frac{3}{2\omega} \left(\frac{3}{4} \varepsilon \beta \omega_0^2 a^2 - \frac{27}{32\omega^2} \varepsilon \beta \omega_0^2 F a \cos 3\theta + \frac{243}{128\omega^4} \varepsilon \beta \omega_0^2 F^2 + \omega_0^2 x - \left(\frac{\omega}{3} \right)^2 \right) \quad (17)$$

若考虑稳态振动, 令式(16)、(17)的右端为零, 解得

$$\theta = 0 \quad (18)$$

$$a^2 - \frac{9F}{8\omega^2} a + 2 \left(\frac{9F}{8\omega^2} a \right)^2 + \frac{4}{3\varepsilon\beta} \left[1 - \left(\frac{\omega}{3\omega_0} \right)^2 \right] = 0 \quad (19)$$

由式(19)解出亚谐波响应振幅的两个根

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{9F}{8\omega^2} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{9F}{8\omega^2} \right)^2 - 8 \left(\frac{9F}{8\omega^2} \right)^2 - \frac{16}{3\varepsilon\beta} \left[1 - \left(\frac{\omega}{3\omega_0} \right)^2 \right]} \quad (20)$$

因为 a 必须为实根, 根据上式, 产生频率为 $\frac{1}{3}\omega$ 次谐波振动的条件为

$$-7 \left(\frac{9F}{8\omega^2} \right)^2 - \frac{16}{3\varepsilon\beta} \left[1 - \left(\frac{\omega}{3\omega_0} \right)^2 \right] \geq 0 \quad (21)$$

对于 $\varepsilon\beta > 0$, 有

$$\omega^2 \geq (3\omega_0)^2 \left[1 + \frac{21}{16} \varepsilon\beta \left(\frac{9F}{8\omega^2} \right)^2 \right] \quad (22)$$

上式表明, 对于硬特性非线性系统, 激振频率满足条件式(22), 即必须超过 3 倍 ω_0 以上才能产生 $\frac{1}{3}\omega$ 次谐波。

亚谐共振是非线性系统特有的现象, 其原因是非线性自由振动包含很多高次谐波项, 若外激励频率 $\omega = 3\omega_0$ (如本例) 则除激起同频率的主谐波响应外, 系统固有频率 ω_0 的自由振动也将被激发, 这就是亚谐共振。显然, 只有在阻尼较小的情况下亚谐共振才会发生。

系统可能出现的亚谐共振阶次与微分方程中非线性函数形式有关。本例中第一次近似的亚谐共振阶数与方程非线性幂次相同。在文献[40]中, 由于存在常数激励, 使得立方非线性系统在一定参数条件下能够发生 1/2 亚谐共振, 这是由于常数激励与立方非线性的耦合作用相当于引入了平方非线性因素, 如果采用平移变换则可以从方程上看起来。

2.3 算例 3: 含裂纹、碰摩等故障转子系统的共振

在转子系统中, 当转轴产生裂纹时, 随着转轴的旋转, 裂纹的开闭状态不断变化, 从而使含裂纹转轴的刚度发生周期性变化, 形成参数激励。在一定条件下, 参数激励能够引发转子系统的亚谐共振或超谐共振, 可称为参激亚谐共振和参激超谐共振, 其计算分析方法与上例中亚谐共振的分析方法类似, 但由于参数激励多以简谐形式出现, 并且研究对象往往是多自由度系统, 因此参激共振的求解分析通常采用谐波平衡法。

MATVEEV 等^[42]研究了常开裂轴模型的参激亚谐共振问题, 讨论了亚谐共振响应对裂纹深度的依赖关系。AL-SHUDEIFAT 等^[43]采用谐波平衡法求解了含呼吸裂纹转子-轴承-轮盘系统的亚谐波响应, 并与试验进行了对比。HOU 等^[44-46]针对含常数激励裂纹转子系统的超谐共振现象(以 2 阶和 3 阶超谐共振为主)开展了深入的机理分析, 揭示了超谐共振的发生机制^[44]和分岔机理^[45], 结果表明常数激励对超谐共振的发生起到决定性作用, 而转子不平衡量对超谐共振的影响很小。在含裂纹故障的滚动轴承转子系统中也存在类似的超谐共振现象, 但系统的非线性动力学行为更为复杂, 随着裂纹深度增大时, 系统容易进入混沌运动^[46]。SPAGNO 等^[47]通过改进裂纹模型研究转子不平衡量对裂纹转子系统超谐共振响应的影响, 表明当不平衡量较大并且其方向与裂纹方向成 180° 时能够造成超谐共振响应的消失。LU 等^[48]研究了双转子系统高压转子空心轴上产生裂纹时的非线性动力学响应, 表明整个系统高低压转子上都能产生 2 阶、3 阶甚至 4 阶超谐共振响应。SINOUE^[49]提出了利用 2 阶和 3 阶超谐波响应进行裂纹故障诊断的思想。SEMPERLOTTI 等^[50]提出了利用超谐波响应进行转子系统裂纹故障定位的方法。VARNEY 等^[51]利用 2 阶超谐波响应进行裂纹故障诊断的实验测试。SINGH 等^[52]提出了通过主动控制增强裂纹转子系统的超谐共振响应从而进行裂纹故障诊断的方法。

以文献[44]为例, 裂纹转子系统的振动方程如下

$$\begin{aligned} & m\ddot{y} + c\dot{y} + ky - \\ & \frac{\Delta k}{2}(1 + \cos(\omega t + \alpha - \varphi))(y \cos^2 \omega t + z \sin \omega t \cos \omega t) = \\ & me\omega^2 \cos(\omega t + \beta) + Gmg \cos \varphi \end{aligned} \quad (23a)$$

$$\begin{aligned} & m\ddot{z} + c\dot{z} + kz - \\ & \frac{\Delta k}{2}(1 + \cos(\omega t + \alpha - \varphi))(y \sin \omega t \cos \omega t + z \sin^2 \omega t) = \\ & me\omega^2 \sin(\omega t + \beta) + Gmg \sin \varphi \end{aligned} \quad (23b)$$

式中, y 和 z 分别为转子在垂直方向和水平方向上的位移, m 、 c 、 k 分别为转子系统的质量、阻尼和刚度, Δk 为裂纹造成的转轴刚度损失的最大值, α 为裂纹的初始角位置, e 为转子偏心距, ω 为转速, β 为不平衡质量的初始角位置, G 为量纲一常数激励, 其大小代表重力的倍数, φ 代表常数激励的作用方向。其中, 常数激励可通过将转子系统安置在一个旋转的平台上产生离心力实现, 或通过电磁力等方式实现。

上述方程对应的量纲一形式如下

$$\begin{aligned} & Y'' + 2\xi Y' + \frac{1}{s^2} Y - \\ & \frac{K}{2s^2}(1 + \cos(\tau + \alpha - \varphi))(Y \cos^2 \tau + Z \sin \tau \cos \tau) = \\ & E \cos(\tau + \beta) + \frac{G}{s^2} \cos \varphi \end{aligned} \quad (24a)$$

$$\begin{aligned} & Z'' + 2\xi Z' + \frac{1}{s^2} Z - \\ & \frac{K}{2s^2}(1 + \cos(\tau + \alpha - \varphi))(Y \sin \tau \cos \tau + Z \sin^2 \tau) = \end{aligned}$$

$$E \sin(\tau + \beta) + \frac{G}{s^2} \sin \varphi \quad (24b)$$

其中, $Y=y/\delta$, $Z=z/\delta$, $\tau=\omega t$, $s=\omega/\omega_{c0}$, $K=\Delta k/k$, $E=e/\delta$, $\delta=mg/k$, $\omega_{c0}=\sqrt{k/m}$ 。

采用谐波平衡法对上式求解, 设谐波解为

$$\begin{aligned} Y = & A_0 + A_1 \cos(\tau) + B_1 \sin(\tau) + A_2 \cos(2\tau) + \\ & B_2 \sin(2\tau) + A_3 \cos(3\tau) + B_3 \sin(3\tau) + \\ & A_4 \cos(4\tau) + B_4 \sin(4\tau) \end{aligned} \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} Z = & C_0 + C_1 \cos(\tau) + D_1 \sin(\tau) + C_2 \cos(2\tau) + \\ & D_2 \sin(2\tau) + C_3 \cos(3\tau) + D_3 \sin(3\tau) + \\ & C_4 \cos(4\tau) + D_4 \sin(4\tau) \end{aligned} \quad (25b)$$

代入量纲一振动方程进行谐波平衡, 平衡方程为关于谐波系数的代数方程组, 求解方程组得到谐波系数, 从而获得裂纹转子系统的振动响应。图 4 所示为裂纹转子系统典型的幅频响应曲线, 其中主共振峰在 $\omega=870$ rad/s 附近, 当裂纹产生时, 幅频响应曲线上在 $\omega=435$ rad/s 和 $\omega=290$ rad/s 附近产生 2 阶和 3 阶超谐共振峰, 共振频率分别为主共振频率的 1/2 和 1/3, 并且随着裂纹损失刚度即裂纹深度的增大, 超谐共振峰值增大。显然, 超谐共振响应与主共振响应相比而言量级较小, 故在实际转子系统中超谐波响应信号不容易获取, 使得裂纹故障诊断成为难题。但图 4b 表明, 随着常数激励的增大, 超谐共振峰值也显著增大, 因而可在一定转速范围内通过对转子系统外加激励产生超谐共振响应的放大效果, 从而提高裂纹故障诊断能力。这也是文献[52]通过主动控制增强裂纹转子系统的超谐共振响应从而进行裂纹故障诊断的基本原理。

图 4 裂纹转子系统的典型幅频响应曲线

转静件碰摩也是转子系统中的常见故障。当转子振动幅度超过转静间隙时即发生碰摩, 因此在转子通过临界转速时最容易发生碰摩故障。当转子与静子碰摩时, 静子对转子的作用相当于附加刚度, 从而有可能造成转子系统的幅频响应曲线产生硬特性形式的弯曲变形, 转子升降速时可能表现出振动突跳和双稳态现象。

张华彪等开展了全周碰摩转子系统的分岔分析, 给出了参数平面上对应不同分岔模式的区域划分, 明确了决定幅频曲线弯曲形态的参数影响机制^[53]。TAI 等采用谐波平衡法求解了碰摩转子系统的稳态解, 分析了间隙等参数对跳跃现象的影响^[54]。ZILLI 等也研究了碰摩转子系统的双稳态和振动突跳现象^[55]。当转子系统发生碰摩时往往伴随着振动响应中倍频及分频成分的出现^[56-57], 这些频率特征被用于碰摩故障诊断的研究^[58]。同时, 碰摩转子系统的擦边分岔^[59]、环面分岔^[60]、倍周期分岔^[61]、Hopf 分岔^[62]等复杂分岔行为也被广泛关注, 各类转子系统发生碰摩时产生的倍周期、概周期、混沌运动等复杂非线性动力学行为也被广泛研究^[63-67]。

PELETAN 等^[68]建立了求解碰摩转子系统概周期响应的谐波平衡法。HOU 等^[69]研究了机动飞行环境下转子系统亚谐共振导致的碰摩问题。YANG 等^[70]分析了刚度和激励的不确定性对碰摩转子系统非线性动力学特性的影响。SUN 等^[71-72]研究了含碰摩故障双转子系统的非线性动力学特性, 得到了组合频率特征。

以文献[71]为例, 考虑的双转子模型如图 5 所示, 高低压转子反向旋转, 支承均假设为线性弹性支承, 考虑高压转子与静子碰摩的情况, 建立的振动方程为 8 自由度, 其中碰摩力模型为分段线性模型。采用改进的谐波平衡法求解方程, 其中碰摩力通过离散傅里叶变换构造数值解处理。得到的含碰摩故障双转子系统典型的幅频响应曲线如图 6 所示, 共振峰向右弯曲, 产生了双稳态区间, 当转子升速或降速时将发生振动突跳现象。对振动响应进行频率分解分析, 如图 7 所示, 发现在共振区间存在 2 倍高压减低压和 2 倍低压减高压的组合频率成分。共振曲线的几何特征及振动响应的频率特征为双转子系统的碰摩故障诊断提供依据。

图 5 含碰摩故障双转子系统简图

图 6 含碰摩故障双转子系统的典型幅频响应曲线

图 7 按照频率成分分解的幅频响应曲线

2.4 算例 4: 双转子系统的组合共振

双转子系统由于含有来自高低压转子的双频不平衡激励力, 当系统包含非线性因素时, 在某些参数条件下可能引起组合共振。仍以图 5 所示的双转

子系统为例, 假设不发生碰摩故障, 但考虑中介轴承的非线性接触力以及在各支承处安装挤压油膜阻尼器, 当高低压转子同向旋转时, 建立双转子-中介轴承系统的振动方程^[9]如下

$$\begin{cases}
 m_1 \ddot{x}_1 + c_1 (\dot{x}_1 + l_1 \dot{\theta}_y) + c_2 (\dot{x}_1 - l_2 \dot{\theta}_y) + k_1 (x_1 + l_1 \theta_y) + k_2 (x_1 - l_2 \theta_y) + F_{bx} + F_{lx} = m_1 \delta_1 \omega_1^2 \cos \omega_1 t \\
 m_1 \ddot{y}_1 + c_1 (\dot{y}_1 - l_1 \dot{\theta}_x) + c_2 (\dot{y}_1 + l_2 \dot{\theta}_x) + k_1 (y_1 - l_1 \theta_x) + k_2 (y_1 + l_2 \theta_x) + F_{by} + F_{ly} = m_1 \delta_1 \omega_1^2 \sin \omega_1 t - m_1 g \\
 J_{d1} \ddot{\theta}_x + J_{p1} \omega_1 \dot{\theta}_y - c_1 l_1 (\dot{y}_1 - l_1 \dot{\theta}_x) + c_2 l_2 (\dot{y}_1 + l_2 \dot{\theta}_x) - k_1 l_1 (y_1 - l_1 \theta_x) + k_2 l_2 (y_1 + l_2 \theta_x) + F_{by} l_5 + M_{lx} = 0 \\
 J_{d1} \ddot{\theta}_y - J_{p1} \omega_1 \dot{\theta}_x + c_1 l_1 (\dot{x}_1 + l_1 \dot{\theta}_y) - c_2 l_2 (\dot{x}_1 - l_2 \dot{\theta}_y) + k_1 l_1 (x_1 + l_1 \theta_y) - k_2 l_2 (x_1 - l_2 \theta_y) - F_{bx} l_5 + M_{ly} = 0 \\
 m_2 \ddot{x}_2 + c_3 (\dot{x}_2 + l_3 \dot{\phi}_y) + k_3 (x_2 + l_3 \phi_y) - F_{bx} + F_{2x} = m_2 \delta_2 \omega_2^2 \cos \omega_2 t \\
 m_2 \ddot{y}_2 + c_3 (\dot{y}_2 - l_3 \dot{\phi}_x) + k_3 (y_2 - l_3 \phi_x) - F_{by} + F_{2y} = m_2 \delta_2 \omega_2^2 \sin \omega_2 t - m_2 g \\
 J_{d2} \ddot{\phi}_x + J_{p2} \omega_2 \dot{\phi}_y - c_3 l_3 (\dot{y}_2 - l_3 \dot{\phi}_x) - k_3 l_3 (y_2 - l_3 \phi_x) - F_{by} l_4 + M_{2x} = 0 \\
 J_{d2} \ddot{\phi}_y - J_{p2} \omega_2 \dot{\phi}_x + c_3 l_3 (\dot{x}_2 + l_3 \dot{\phi}_y) + k_3 l_3 (x_2 + l_3 \phi_y) + F_{bx} l_4 + M_{2y} = 0
 \end{cases} \quad (26)$$

式中, 下标 1 表示低压转子, 下标 2 表示高压转子; x 和 y 分别表示盘心在水平方向和垂直方向上的位移; J_p 和 J_d 分别表示转盘的极转动惯量和直径转动惯量; δ 表示转盘的偏心距; ω 表示转子的转速; θ_x 和 θ_y 分别为低压转盘绕 x 轴和绕 y 轴的转动角度; ϕ_x 和 ϕ_y 分别为高压转盘绕 x 轴和绕 y 轴的转动角度; c_i 为阻尼系数, $i=1 \sim 3$; F_b 为中介轴承传递力; F_1 和 F_2 分别为低压转子和高压转子的油膜力; M_1 和 M_2 分别为低压转子和高压转子油膜力产生的力矩。

中介轴承的非线性传递力可表示为

$$F_{lx} = \phi_1 F_{c1x} + \phi_2 F_{c2x} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
 \delta_i = & (x_1 - l_5 \theta_y - x_2 + l_4 \phi_y) \cos \gamma_i + \\
 & (y_1 + l_5 \theta_x - y_2 + l_4 \phi_x) \sin \gamma_i - \delta_0
 \end{aligned} \quad (28)$$

$$F_{lx} = \phi_1 F_{c1x} + \phi_2 F_{c2x} \quad (29)$$

$$F_{ly} = \phi_1 F_{c1y} + \phi_2 F_{c2y} \quad (30)$$

式中, ω_1 和 ω_2 分别为轴承内外圈的角速度, r_i 和 r_o

分别表示轴承内圈和外圈的半径, N_b 为滚子数量, $i=1 \sim N_b$, 函数 $F_{lx} = \phi_1 F_{c1x} + \phi_2 F_{c2x}$ 。建模的详细过程及油膜力模型见文献[9]。

采用 Runge-Kutta 方法对式(26)进行积分求解, 获得系统的振动响应, 不同中介轴承游隙下双转子系统水平方向幅频响应曲线如图 8 所示, 可见高低压转子运动幅频响应具有一致性, 分别在 $\omega_1=291$ rad/s、 $\omega_1=381$ rad/s 处, 以及 $\omega_1=453$ rad/s、 $\omega_1=600$ rad/s 处出现共振峰值, 其中 $\omega_1=291$ rad/s 时, $\omega_2=378.3$ rad/s, 对应于系统一阶固有频率, 为高压转频激发一阶共振, $\omega_1=381$ rad/s 时, 为低压转频激发一阶共振。同理, $\omega_1=453$ rad/s、 $\omega_1=600$ rad/s 的情况分别对应高、低压转频先后激发二阶共振。随着中介轴承游隙的增大, 各共振峰向低频方向移动, 但幅度相对不大, 注意到 $\omega_1=546$ rad/s 处, 随着游隙增大, 出现明显的共振峰, 其频率成分如图 9 所示, 除主激励频率 ω_1 、 ω_2 之外, 还含有明显的 $2\omega_1 - \omega_2$ 的组合频率成分 ($\omega=382.2$ rad/s), 且该组合频率成分等于系统一阶固有频率, 说明系统在此处发生了组合共振。

图8 不同中介轴承游隙下双转子系统水平方向幅频响应曲线

图9 $\omega_1=546$ rad/s 时双转子系统组合共振下的频谱

3 结论及工程应用

本文提出了非线性共振的概念和算法,结合课题组在相关方面的部分研究成果,以滚动轴承转子系统的VC共振、Duffing系统的亚谐共振、含裂纹、碰摩等故障转子系统的共振以及双转子系统的组合共振为算例,给出了具体工程问题的分析过程,最终提出非线性振动系统工作频率和工作点的优化选择方法:根据转子系统的具体结构情况,首先计算其线性化系统的固有频率,在其基础上计算各种非线性因素影响下的主共振、亚谐共振、超谐共振、组合共振、参激共振、故障共振等全部共振点,并将其对应的幅频响应曲线统一绘制在幅频平面上,为转子系统工作转速和工作点的选择提供全面参考。

参考文献

- [1] 郑兆昌. 机械振动[M]. 北京:机械工业出版社, 1980.
ZHENG Zhaochang. Mechanical vibration [M]. Beijing: China Machine Press, 1980.
- [2] 陈予恕. 非线性振动[M]. 北京:高等教育出版社, 2002.
CHEN Yushu. Nonlinear vibrations [M]. Beijing: Higher Education Press, 2002.
- [3] 陈予恕. 非线性振动系统的分叉与混沌理论[M]. 北京:高等教育出版社, 1993.

CHEN Yushu. Bifurcation and chaos theory of nonlinear vibration system [M]. Beijing: Higher Education Press, 1993.

- [4] 陈予恕, 唐云. 非线性动力学中的现代分析方法[M]. 北京:科学出版社, 2000.

CHEN Yushu, TANG Yun. The modern analysis method in nonlinear dynamics [M]. Beijing: Science Publishing Company, 2000.

- [5] 张智勇. 球轴承-转子系统变柔度振动的分岔与滞后行为[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2015.

ZHANG Zhiyong. Bifurcations and hysteresis of varying compliance vibrations of a ball bearing-rotor system [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2015.

- [6] 侯磊. 机动飞行环境下转子系统的非线性动力学行为研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2015.

HOU Lei. Research on nonlinear dynamics of rotor systems in maneuvering flight environment [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2015.

- [7] 路振勇. 航空发动机转子系统的动力学建模及非线性振动研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2017.

LU Zhenyong. Dynamical modeling and nonlinear vibration study of aero-engine rotor system [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2017.

- [8] 孙传宗. 航空发动机双转子系统高精度动力学建模与碰摩响应研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2017.

SUN Chuanzong. Accurate dynamical modelling for dual-rotor aero-engine system and its responses induced

- by rub impact [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2017.
- [9] 陈会征. 挤压油膜阻尼器-滚动轴承-转子系统非线性动力学研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2017.
- CHEN Huizheng. Study on nonlinear dynamics of squeeze film damper-rolling bearing-rotor systems [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2017.
- [10] HARRIS T A, MINDEL M H. Rolling element bearing dynamics [J]. *Wear*, 1973, 23(3): 311-337.
- [11] NAYAK R. Contact vibrations [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1972, 22(3): 297-322.
- [12] HESS D, SOOM A. Normal vibrations and friction under harmonic loads—part 1: Hertzian contact [J]. *ASME Journal of Tribology*, 1991, 113(1): 80-86.
- [13] RIGAUD E, PERRET-LIAUDET J. Experiments and numerical results on non-linear vibrations of an impacting Hertzian contact—part 1: Harmonic excitation [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 265(2): 289-307.
- [14] PERRET-LIAUDET J, RIGAUD E. Response of an impacting Hertzian contact to an order-2 subharmonic excitation: Theory and experiments [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 296(1): 319-333.
- [15] SANKARAVELU A, NOAH S T, BURGER C P. Bifurcation and chaos in ball bearings [J]. *ASME Applied Mechanics Division*, 1994, 192: 313-325.
- [16] ZHANG Zhiyong, CHEN Yushu. Harmonic balance method with alternating frequency/time domain technique for nonlinear dynamical system with fractional exponential [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, 35(4): 423-436.
- [17] ZHANG Zhiyong, CHEN Yushu, LI Zhonggang. Influencing factors of the dynamic hysteresis in varying compliance vibrations of a ball bearing [J]. *Science China Technological Sciences*, 2015, 58(5): 775-782.
- [18] ZHANG Zhiyong, CHEN Yushu, CAO Qingjie. Bifurcations and hysteresis of varying compliance vibrations in the primary parametric resonance for a ball bearing [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 350: 171-184.
- [19] JIN Yulin, YANG Rui, HOU Lei, et al. Experiments and numerical results for varying compliance vibrations in a rigid-rotor ball bearing system [J]. *ASME Journal of Tribology*, 2017, 139(4): 041103.
- [20] YANG Rui, HOU Lei, JIN Yulin, et al. The VC resonance in a ball bearing rotor system affected by different ball numbers and rotor eccentricities [J]. *Journal of Tribology*, 2018, 140(5): 051101.
- [21] YANG Rui, JIN Yulin, HOU Lei, et al. Study for ball bearing outer race characteristic defect frequency based on nonlinear dynamics analysis [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 90(2): 781-796.
- [22] YANG Rui, JIN Yulin, HOU Lei, et al. Super-harmonic resonance characteristic of a rigid-rotor ball bearing system caused by a single local defect in outer raceway [J]. *Science China Technological Sciences*, 2018, 61(8): 1184-1196.
- [23] 陈予恕, LONGFORD W F. 非线性马休方程的亚谱分叉解及欧拉动弯曲问题[J]. *力学学报*, 1988, 20(6): 522-532.
- CHEN Yushu, LONGFORD W F. The subharmonic bifurcation solution of nonlinear Mathieu's equation and Euler dynamically buckling problems [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1988, 20(6): 522-532.
- [24] XU Yuxiu, HU Haiyan, WEN Bangchun. 1/3 pure sub-harmonic solution and fractal characteristic of transient process for Duffing's equation [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, 27(9): 1171-1176.
- [25] KHANG N V, CHIEN T Q. Subharmonic resonance of Duffing oscillator with fractional-order derivative [J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2016, 11(5): 1-8.
- [26] TANG Jiashi. The MLP method for subharmonic and ultraharmonic resonance solutions of strongly nonlinear systems [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2000, 21(10): 1153-1160.
- [27] LIU Yanbin, CHEN Yushu, CAO Qingjie. Analysis method of chaos and sub-harmonic resonance of nonlinear system without small parameters [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, 32(1): 1-10.
- [28] YANG J H, SANJUÁN M A F, LIU H G. Vibrational subharmonic and superharmonic resonances [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2016, 30(1-3): 362-372.
- [29] YANG Caijin. Approximate super- and sub-harmonic response of a multi-DOFs system with local cubic nonlinearities under resonance [J]. *Journal of Applied Mathematics*, 2012, 531480: 1-22.
- [30] CHEN Yushu, JIN Zhisheng. Subharmonic solution of a piecewise linear oscillator with tow degrees of freedom [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1986, 7(3): 223-232.
- [31] SHEN Yongjun, WEI Peng, SUI Chuanyi, et al. Subharmonic resonance of van der Pol oscillator with fractional-order derivative [J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, 738087: 1-17.
- [32] KLOSTER N, KNUDSEN C. Bifurcations near 1:2 subharmonic resonance in a structural dynamics model [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 1999, 5(1): 55-66.

- [33] JI Jinchen, ZHOU Jin. Coexistence of two families of sub-harmonic resonances in a time-delayed nonlinear system at different forcing frequencies [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2017, 93: 151-163.
- [34] LI Fengming, YAO Guo. 1/3 Subharmonic resonance of a nonlinear composite laminated cylindrical shell in subsonic air flow [J]. *Composite Structures*, 2013, 100: 249-256.
- [35] AL-SHYAB A, KAHRAMAN A. Non-linear dynamic analysis of a multi-meshgear train using multi-term harmonic balance method: Sub-harmonic motions [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 279: 417-451.
- [36] SHAHGHOLI M, KHADEM S E. Internal, combinational and sub-harmonic resonances of a nonlinear asymmetrical rotating shaft [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 79(1): 173-184.
- [37] KIM T C, ROOK T E, SINGH R. Super- and sub-harmonic response calculations for a torsional system with clearance nonlinearity using the harmonic balance method [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 281: 965-993.
- [38] LI Zhonggang, CHEN Yushu. Research on 1:2 subharmonic resonance and bifurcation of nonlinear rotor-seal system [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, 33(4): 499-510.
- [39] BAI Changqing, ZHANG Hongyan, XU Qingyu. Subharmonic resonance of a symmetric ball bearing-rotor system [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2013, 50(1): 1-10.
- [40] HOU Lei, CHEN Yushu. Analysis of 1/2 sub-harmonic resonance in a maneuvering rotor system [J]. *Science China Technological Sciences*, 2014, 57(1): 203-209.
- [41] HOU Lei, CHEN Yushu, CAO Qingjie, et al. Turning maneuver caused response in an aircraft rotor-ball bearing system [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 79(1): 229-240.
- [42] MATVEEV V V, BOGINICH O E. Approximate determination of vibrodiagnostic parameter of nonlinearity for an elastic body due to the presence of a breathing crack at a subharmonic resonance [J]. *Strength of Materials*, 2012, 44(3): 250-258.
- [43] AL-SHUDEIFAT M A, BUTCHER E A, STERN C R. General harmonic balance solution of a cracked rotor-bearing-disk system for harmonic and sub-harmonic analysis: Analytical and experimental approach [J]. *International Journal of Engineering Science*, 2010, 48(10): 921-935.
- [44] HOU Lei, CHEN Yushu, LI Zhonggang. Super-harmonic responses analysis for a cracked rotor system considering inertial excitation [J]. *Science China Technological Sciences*, 2015, 58(11): 1924-1934.
- [45] HOU Lei, CHEN Yushu, LU Zhenyong, et al. Bifurcation analysis for 2:1 and 3:1 super-harmonic resonances of an aircraft cracked rotor system due to maneuver load [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 81(1): 531-547.
- [46] HOU Lei, CHEN Yushu, CAO Qingjie, et al. Nonlinear vibration analysis of a cracked rotor-ball bearing system during flight maneuvers [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2016, 105: 515-528.
- [47] SPAGNOL J P, WU H, XIAO Keqin. Dynamic response of a cracked rotor with an unbalance influenced breathing mechanism [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2018, 32(1): 57-68.
- [48] LU Zhenyong, HOU Lei, CHEN Yushu, et al. Nonlinear response analysis for a dual-rotor system with a breathing transverse crack in the hollow shaft [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 83(1): 169-185.
- [49] SINOUE J J. Detection of cracks in rotor based on the $2\times$ and $3\times$ super-harmonic frequency components and the crack-unbalance interactions [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2008, 13(9): 2024-2040.
- [50] SEMPERLOTTI F, WANG K W, SMITH E C. Localization of a breathing crack using super-harmonic signals due to system nonlinearity [J]. *AIAA Journal*, 2012, 47(9): 2076-2086.
- [51] VARNEY P, GREEN I. Crack detection in a rotor dynamic system by vibration monitoring-Part II: extended analysis and experimental results [J]. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2012, 134(11), 112501: 1-11.
- [52] SINGH S, TIWARI R. Model based identification of crack and bearing dynamic parameters in flexible rotor systems supported with an auxiliary active magnetic bearing [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2018, 122: 292-307.
- [53] ZHANG Huabiao, CHEN Yushu. Bifurcation analysis on full annular rub of a nonlinear rotor system [J]. *Science China Technological Sciences*, 2011, 54(8): 1977-1985.
- [54] TAI Xingyu, MA Hui, LIU Fuhao, et al. Stability and steady-state response analysis of a single rub-impact rotor system [J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2015, 85(1): 133-148.
- [55] ZILLI A, WILLIAMS R J, EWINS D J. Non-linear dynamics of a simplified model of an overhung rotor subjected to intermittent annular rubs [J]. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2015, 137(6): 065001.
- [56] CHU Fulei, LU Wenxiu. Experimental observation of

- nonlinear vibrations in a rub-impact rotor system [J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 283(3-5): 621-643.
- [57] HU Aijun, HOU Lanlan, XIANG Ling. Dynamic simulation and experimental study of an asymmetric double-disk rotor-bearing system with rub-impact and oil-film instability [J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 84(2): 1-19.
- [58] YAO Hongliang, HAN Qingkai, LI Lingxuan, et al. Detection of rubbing location in rotor system by super-harmonic responses [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2012, 26(8): 2431-2437.
- [59] QIN Weiyang, SU Hao, YANG Yongfeng. Grazing bifurcation and chaos in response of rubbing rotor [J]. Chaos Solitons and Fractals, 2008, 37(1): 166-174.
- [60] QIN Weiyang, CHEN Guanrong, MENG Guang. Nonlinear responses of a rub-impact overhung rotor [J]. Chaos Solitons and Fractals, 2004, 19(5): 1161-1172.
- [61] JENG J, KANG Y, CHANG Y. An alternative Poincaré section for high-order harmonic and chaotic responses of a rubbing rotor [J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 328(1): 191-202.
- [62] REN Zhaohui, ZHOU Shihua, LI Chaofeng, et al. Dynamic characteristics of multi-degrees of freedom system rotor-bearing system with coupling faults of rub-impact and crack [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2014, 27(4): 785-792.
- [63] ZHANG Wenming, MENG Guang, CHEN Di, et al. Nonlinear dynamics of a rub-impact micro-rotor system with scale-dependent friction model [J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 309(3-5): 756-777.
- [64] LIU Lun, CAO Dengqing, SUN Shupeng. Dynamic characteristics of a disk-drum-shaft rotor system with rub-impact [J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 80(1-2): 1017-1038.
- [65] HUA Chunli, RAO Zhushi, TA Na, et al. Nonlinear dynamics of rub-impact on a rotor-rubber bearing system with the Stribeck friction model [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2015, 29(8): 3109-3119.
- [66] HU Liang, LIU Yibing, ZHAO Li, et al. Nonlinear dynamic response of a rub-impact rod fastening rotor considering nonlinear contact characteristic [J]. Archive of Applied Mechanics, 2016, 86(11): 1869-1886.
- [67] YANG Yang, CAO Dengqing, WANG Deyou, et al. Response analysis of a dual-disc rotor system with multi-unbalances-multi-fixed-point rubbing faults [J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 87(1): 1-17.
- [68] PELETAN L, BAGUET S, TORKHANI M, et al. Quasi-periodic harmonic balance method for rubbing self-induced vibrations in rotor-stator dynamics [J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 78(4): 2501-2515.
- [69] HOU Lei, CHEN Yushu, CAO Qingjie. Nonlinear vibration phenomenon of an aircraft rub-impact rotor system due to hovering flight [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014, 19(1): 286-297.
- [70] YANG Yongfeng, WANG Yanlin, GAO Zhe. Nonlinear analysis of a rub-impact rotor with random stiffness under random excitation [J]. Advances in Mechanical Engineering, 2016, 8(9): 1-12.
- [71] SUN Chuanzong, CHEN Yushu, HOU Lei. Steady-state response characteristics of a dual-rotor system induced by rub-impact [J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 86(1): 91-105.
- [72] WANG Nanfei, JIANG Dongxiang, BEHDINAN K. Vibration response analysis of rubbing faults on a dual-rotor bearing system [J]. Archive of Applied Mechanics, 2017, 87: 1891-1907.

作者简介: 侯磊, 男, 博士, 副教授, 硕士研究生导师。主要研究方向为航空发动机转子系统非线性动力学。

E-mail: houlei@hit.edu.cn

陈予恕(通信作者), 男, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为工程非线性动力学理论及其在工程中的应用。

E-mail: yschen@hit.edu.cn