DOI: 10.3901/JME.2019.01.032

并联机构驱动力优化配置方法及应用研究*

王向阳 郭 盛 曲海波 赵福群

(北京交通大学机械与电子控制工程学院 北京 100044)

摘要: 驱动冗余作为机构驱动力优化配置的一种有效手段, 它的输入力大小以及冗余方式会对并联机构主驱动力有较大的影响。基于虚功原理建立了驱动冗余情形下的动力学方程, 采用最小二范数解作为冗余驱动的输入。并以 Z3 并联动力头为例, 理论推导和计算了其在单冗余驱动与多冗余驱动下主驱动力的大小, 分析了不同冗余方式对主驱动力配置的影响。最后, 将理论解算得到的冗余驱动力作用在仿真计算环境中进行仿真验证, 结果证明该方法对主驱动力优化配置的有效性和可靠性。

关键词: 3-PRS 并联机构; 动力学; 驱动冗余; 优化配置

中图分类号: TH112

Optimal Allocation Method of Parallel Mechanism and Its Application

WANG Xiangyang GUO Sheng QU Haibo ZHAO Fuqun

(School of Mechanical, Electronic and Control Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044)

Abstract: Actuation redundancy is an effective way for optimal allocation of driving forces. The way of redundancy and input force intensity have significant influence on basic driving forces of parallel mechanism. Based on the principle of virtual work, the dynamic equation under actuation redundancy is established, and least square solutions are used as the inputs of redundant actuators. The Z3 parallel power head is used as an example where the basic driving forces under single actuator redundancy and multi-actuator redundancy are theoretically derived and calculated. Influence under different redundancy mode is analysed. Besides, a simulation prototype is built with the theoretical solutions serving as redundant driving force. The results verify the reliability and validity of optimal allocation of basic driving force based on the proposed method.

Key words: 3-PRS parallel mechanism; dynamics; actuation redundancy; allocation optimization

0 前言

并联机构相比于串联机构, 具有刚度高、精度高、承载能力强等优点, 被广泛用于制造业。但是较大的刚度, 在某些时候也带来了一些问题: 高刚度导致并联机床刀具接触工件时产生的巨大冲击力直接传递给电动机, 较少能因机构变形而耗散或得以缓冲, 导致短时间内电动机的瞬时电流过大, 功率激增, 造成电动机的毁坏。

因此如何降低电动机的瞬时驱动力和功率是一个重要问题。近些年, 学界对这一问题进行了有益的研究, 其中利用驱动冗余的思路使冲击力分散和优化配置是较为可行的方法之一。学界一般将驱动冗余分为三类^[1]: 一是在并联机器人支链上的被动关节上加驱动器, 可称为关节型冗余驱动(Type1);

二是在保证并联机器人自由度不变的前提下, 增加一个或多个相同的驱动支链, 超过机构运动所需的最少驱动支链数, 可称为支链式冗余驱动(Type2); 三是以上两种方式的结合, 即增加并联机器人驱动支链数目的同时也在非驱动关节上增加驱动器数目, 可称为混合型冗余驱动(Type3)。这三类驱动冗余对优化驱动力配置都可以产生一定的作用。

针对驱动力优化配置的研究, 近些年来有部分学者进行过各种尝试。卿建喜^[2]采用冗余支链的方式, 基于拉格朗日动力学方程对驱动冗余三自由度 Tricept 并联机构主动关节之间驱动力分配进行计算, 提出了最大瞬时功率和驱动力的优化方法。LI 等^[3]提出局部驱动力传递指标和全局驱动力传递指标用于指导冗余驱动的优化和分析。LIU 等^[4]在对平面两自由度并联机构增加冗余支链并建立动力学模型基础上, 运用 PID 控制器完成轨迹规划, GE 等^[5]在此基础上改进了控制方法, 采用了被动扭矩算法指导冗余驱动器的输入。YUKIO 等^[6]对并联

* 国家自然科学基金资助项目(51475035, 51505023)。20171115 收到初稿, 20180411 收到修改稿

Stewart 机构的支链移动副驱动采用高精度电动机和普通电动机串联驱动，通过精调和粗调的搭配提高驱动精度，这是驱动冗余提高精度的一种应用。ZHAO 等^[7]在 2011 年提出基于能量守恒的驱动冗余逆动力学求解的新方法，采用最小范数求解驱动动力。KIM 等^[8]研制了 Eclipse 冗余并联机床，它有八个驱动关节和六个自由度，可以克服奇异位形。YAO 等^[9]对五自由度 5-PUS 并联机床添加 PRPU 支链来实现驱动冗余，利用拉格朗日动力学方程解算、ADAMS 仿真结果和实验数据共同验证 Type2 型驱动冗余对减少主驱动瞬时功率的作用。FIRMANI 等^[10]在 2005 年对驱动冗余的 3-RRR 平面并联机构，采用旋量理论进行静力学推导，发现被动关节驱动冗余后动平台的最大力/力偶负载增加 80%。牛雪梅等^[11-12]在 2014 年对被动关节驱动冗余的三自由度并联机构进行了动力学的解算，并用神经网络简化了动力学模型。董成林等^[13]分析对比了冗余驱动支链 4-UPS&UP 并联机构和 3-UPS&UP 的运动学性能，发现前者具有更好的动、静态性能。周昌春等^[14]将驱动冗余用到了飞行模拟器上以达到大功率运动的目的。LI 等^[15]综合出带有驱动冗余的支链消除了某些并联机构的奇异性。SHAO 等^[16]对 4 自由度驱动冗余并联机床的驱动力和能耗进行了优化。ABEDINNASAB 等^[17]的研究表明，驱动冗余可以增加并联机构的有效载荷和加速度，并且优化载荷分布和减少每个电动机的功率消耗。YI^[18]的研究表明冗余驱动可以改善机器人的动力学性能。除此之外，一些驱动冗余的机构被研制了出来，比如装三个电动机的平面二自由度机构^[19]，空间的八腿机构，机械手^[20]等。上述研究部分解决了常见的并联机构驱动冗余问题。

从以上研究成果来看，学者对于 Type2 型冗余驱动的驱动力优化配置的研究是较丰富和深入的，也从静力学和动力学层面对冗余输入的大小进行了计算，此外还有一些较实用的驱动冗余方式被提出，在精度改进和增大驱动力方面取得了不错的效果。而对于 Type1 型的冗余方式，冗余输入的计算还只限于具体的机构，对于冗余输入的个数如何影响机构的主驱动力，目前只有文献[11]在静力学层面进行了推导，尚未在动力学层面进行深入系统的研究。

本文提出一种基于虚功原理驱动冗余动力学的一般模型，运用该模型对一般六自由度及少自由度冗余并联机构的动力学进行推导。并结合工业生产中运用较多的 Z3 并联动力头，以其为例对冗余驱动后机构的动态性能进行研究。建立了具体的动力学方程并进行逆动力学解算，从而研究单冗余驱动和多冗余驱

动对主驱动输入的影响。最后在仿真环节进行了数值验证和虚拟样机仿真，对所得结果进行验证。

1 驱动冗余动力学模型

动力学是进行机构动态特性分析的基础。比较常用的动力学建模方法包括拉格朗日方程、牛顿欧拉迭代法、凯恩方程、虚功原理等。其中，虚功原理建模方法在执行效率和算法上较为出色，适合应用这一方法对机构进行实时控制。这里采用虚功原理来进行驱动冗余并联机构的动力学建模。

作用在杆件 i 质心的合外力和合外力偶 $\hat{F}_i$ (包括惯性力/力偶及重力)，可表示成六维力

$$\hat{F}_i = [\hat{f}_i \quad \hat{n}_i]^T \quad (1)$$

杆件 i 的速度和角速度表述成六维速度

$$\hat{x}_i = [\hat{v}_i \quad \hat{w}_i]^T \quad (2)$$

作用在动平台质心的六维力为

$$\hat{F}_p = [\hat{f}_p \quad \hat{n}_p]^T \quad (3)$$

根据达朗贝尔原理，动力学方程为

$$\delta q^T \tau + \delta x_p^T \hat{F}_p + \sum_{i=1} \delta x_i^T \hat{F}_i = 0 \quad (4)$$

式中， δq 为驱动作用的速度， δx_p 和 δx_i 为动平台和杆件 i 质心的六维速度。求和公式中的 i 包括支链中的所有构件。

驱动输入速度与动平台输出速度有如下关系

$$\delta q = J_p \delta x \quad (5)$$

式中， J_p 为速度雅可比矩阵。机构中各杆件与动平台六维速度 δx_p 存在如下映射关系

$$\delta x_i = J_i \delta x_p \quad (6)$$

J_i 为支链雅可比矩阵。式(5)、(6)代入式(4)得

$$\delta x_p^T (J_p^T \tau + \hat{F}_p + \sum_i J_i^T \hat{F}_i) = 0 \quad (7)$$

对于动平台，六维力 $\hat{F}_p$ 为输出力 $\hat{F}$ 、惯性力和重力的合力

$$\hat{F}_p = \begin{bmatrix} \hat{f}_p \\ \hat{n}_p \end{bmatrix} = \hat{F} + \begin{bmatrix} m_p \mathbf{g} - m_p \dot{\mathbf{v}}_p \\ -I_p \dot{\mathbf{w}}_p - \mathbf{w}_p \times (I_p \mathbf{w}_p) \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中， I_p 为动平台在 $\{A\}$ 系下惯性张量。

对支链 i 中的第 j 个杆件，只受重力和惯性力作用时其六维力为

$$\hat{F}_{ij} = \begin{bmatrix} m_{ij} \mathbf{g} - m_{ij} \mathbf{a}_{ij} \\ -I_{ij} \dot{\mathbf{w}}_{ij} - \mathbf{w}_{ij} \times (I_{ij} \mathbf{w}_{ij}) \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中, I_{ij} 为杆在 $\{A\}$ 系的惯性张量。若受到冗余的输入力或力矩, 则其六维力为

$$\hat{F}_{ij} = \begin{bmatrix} m_{ij}g - m_{ij}a_{ij} + f_R \\ -I_{ij}\dot{w}_{ij} - w_{ij} \times (I_{ij}w_{ij}) + n_R \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中, f_R 与 n_R 为冗余力和冗余力偶, 对于作用在转动副上的冗余驱动, f_R 为 $\theta^{3 \times 1}$ 。对于冗余移动副驱动, n_R 为 $\theta^{3 \times 1}$ 。

并联机构广义坐标确定后, 并联机构的运动已经确定。此时冗余的驱动不会影响机构的运动特性, 但是它的引入会对主驱动力产生影响。

对于六自由度对称并联机构, 式(7)为一个标量方程, 含六个主驱动力和 N 个冗余输入共 $(6+N)$ 个未知量。因为对任意 δx_p , 式(7)均成立, 有

$$J_p^T \tau + \hat{F}_p + \sum_i J_i^T \hat{F}_i = 0 \quad (11)$$

式(11)为六个线性无关的方程构成的方程组, 写为矩阵方程

$$A[\tau \ n]^T = B \quad (12)$$

式中, $\tau = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3 \ \tau_4 \ \tau_5 \ \tau_6]^T$ 为各主驱动力/力偶, $n = [n_1 \ n_2 \ \dots \ n_N]^T$ 为冗余驱动力/力偶。

理论上 $[\tau \ n]^T$ 有无穷组解。采用最小二范数解, 所取得的解为几何意义上的“最短解”, 可被用来作为降低主驱动力峰值的方法^[21]。

对自由度为 λ ($\lambda < 6$) 的对称并联机构, 动平台六维速度 δx_p 之间普遍存在伴随关系^[22]。选择动平台 δx_p 中的 λ 个独立参量, 构成 λ 维速度矢量 δq_λ 进行轨迹规划, 并求得速度 δq_λ 与 δx_p 的映射关系 J_t 来建立动力学方程。 J_t 称为动平台雅可比矩阵。

式(7)动力学方程改写为

$$\delta q_\lambda^T J_t^T (J_p^T \tau + \hat{F}_p + \sum_i J_i^T \hat{F}_i) = 0 \quad (13)$$

对任意 δq_λ , 该方程均成立, 可得

$$J_t^T (J_p^T \tau + \hat{F}_p + \sum_i J_i^T \hat{F}_i) = 0 \quad (14)$$

式(14)含 λ 个线性无关的方程, 对于 λ 个主驱动力和 N 个冗余驱动力, 式(14)可表示为

$$A[\tau \ n]^T = B \quad (15)$$

式中, $\tau = [\tau_1 \ \tau_2 \ \dots \ \tau_\lambda]^T$ 为各关节主动力/力偶, $n = [n_1 \ n_2 \ \dots \ n_N]^T$ 为冗余驱动力/力偶。采用伪逆法求 $[\tau \ n]^T$, 得到的解为最小二范数解。

接下来, 本文以 Z3 并联动力头为例, 建立其少自由度并联机构驱动冗余情形下的动力学模型, 并进行具体的动力学建模和数值解算。

2 冗余驱动的 Z3 并联动力头

图 1 所示为一款 Z3 并联动力头^[23], 其本质为一种 3-PRS 并联机构, 具有两个转动和一个平移自由度。该机构由动平台, 定平台和三条等间距对称分布的支链组成。每一条支链从定平台到动平台依次由移动副 P, 转动副 R 和球副 S 连接各杆件组成。该并联机构具有较好的结构和装备工艺性, 多应用为并联机床和微操作手的机械本体。

图 1 Z3 并联动力头模型

加工过程中, 该动力头夹持刀具接触工件加工时, 产生的刚性接触造成极大的反作用力。由于并联机构高刚度特性, 这个反作用力造成的弹性变形较弱, 反作用力的耗散较少, 大部分力直接传递到支链驱动电动机, 造成较大的负载, 导致电动机电流瞬时激增进而损坏。在此背景下本文将应用驱动冗余来优化主驱动力的配置。

图 2 中, 各支链作用在移动副上的驱动为主驱

动，驱动力大小为 τ_1, τ_2, τ_3 。作用在被动关节 1、2 和 3 的驱动为冗余驱动，产生的冗余力偶大小分别为 n_1, n_2, n_3 。在动平台轨迹给定后，除主驱动上有输入，当 1、2 或 3 中有且只有一个被动关节有输入时，称之为单驱动冗余，任意两个关节有输入，以及三个关节均有冗余输入的情况，称为多驱动冗余。本节将基于冗余驱动动力学模型，推导单驱动冗余及多驱动冗余方式下主驱动力和冗余驱动力大小。

在建立动力学方程之前，首先解算 3-PRS 并联机构的位置反解。

2.1 运动学逆解分析

建立如图 2 所示坐标系， $\{B\}$ 系相对于 $\{A\}$ 系的旋转矩阵为 ${}^B_A \mathbf{R}$ ， $\{M_i\}$ 系相对于 $\{A\}$ 系的旋转矩阵为 ${}^{M_i}_A \mathbf{R}$ 。

建立支链 $i(i=1,2,3)$ 的封闭矢量方程

$$\mathbf{OP} + \mathbf{PB}_i = \mathbf{OA}_i + \mathbf{A}_i \mathbf{D}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{C}_i + \mathbf{C}_i \mathbf{B}_i \quad (16)$$

根据式(16)有

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} + {}^B_A \mathbf{R} \begin{bmatrix} b_{ix} \\ b_{iy} \\ b_{iz} \end{bmatrix} = \mathbf{OA}_i + {}^{M_i}_A \mathbf{R} \begin{bmatrix} h + c \times \cos \theta_i \\ 0 \\ d_i + c \times \sin \theta_i \end{bmatrix} \quad (17)$$

由矢量方程式(17)，求得机构的运动学反解，全局坐标系 $\{A\}$ 下，取该机构动平台绕 x 轴转角为 γ 、 y 轴转角 β 和沿 z 轴位移 p_z 这三个独立参数描述动平台位姿，则给定 $[\gamma \ \beta \ p_z]^T$ 后该并联机构位置反解 $[d_1 \ d_2 \ d_3]^T$ 和 $[\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$ 也随之确定。

2.2 雅可比和支链雅可比的求解

对矢量闭合方程式(16)求导得到输入速度 $\dot{d}_1$ 、 $\dot{d}_2$ 、 $\dot{d}_3$ 与动平台输出速度的雅可比映射关系

$$\mathbf{J}_p = \mathbf{J}_q^{-1} \mathbf{J}_x \quad (18)$$

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T & (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{c}_1)^T \\ \mathbf{c}_2^T & (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{c}_2)^T \\ \mathbf{c}_3^T & (\mathbf{b}_3 \times \mathbf{c}_3)^T \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} s_1 \mathbf{c}_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 \mathbf{c}_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \mathbf{c}_3 \end{bmatrix} \quad (20)$$

考虑到机构的约束，有约束关系

$$\begin{cases} q_{1y} = 0 \\ q_{2y} = -\sqrt{3}q_{2x} \\ q_{3y} = \sqrt{3}q_{3x} \end{cases} \quad (21)$$

式(21)可得到动平台六个自由度之间的耦合关系

$$\begin{cases} p_x = f(\gamma, \beta, p_z) \\ p_y = f(\gamma, \beta, p_z) \\ \alpha = f(\gamma, \beta, p_z) \end{cases} \quad (22)$$

式(22)对 3 个独立参量 $\delta\beta$ ， $\delta\gamma$ 和 v_z 求偏微分可以得到映射关系如下

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \delta\gamma \\ \delta\beta \\ \delta\alpha \end{bmatrix} = \mathbf{J}_t \begin{bmatrix} \delta\gamma \\ \delta\beta \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial \gamma} & \frac{\partial p_x}{\partial \beta} & \frac{\partial p_x}{\partial p_z} \\ \frac{\partial p_y}{\partial \gamma} & \frac{\partial p_y}{\partial \beta} & \frac{\partial p_y}{\partial p_z} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} & \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} & \frac{\partial \alpha}{\partial p_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\gamma \\ \delta\beta \\ v_z \end{bmatrix} \quad (23)$$

该映射描述了动平台六维速度与独立参量之间映射关系，称 $\mathbf{J}_t$ 为动平台雅可比。

对于支链雅可比的求解，需要求出各杆件质心速度及角速度。由式(16)得

$$\mathbf{v}_p + \mathbf{w}_p \times \mathbf{b}_i = \dot{d}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{w}_{ci} \times \mathbf{c}_i \quad (24)$$

由式(24)左侧求得 B_i 点的速度

$$\mathbf{v}_{bi} = \mathbf{v}_p + \mathbf{w}_p \times \mathbf{b}_i = \mathbf{J}_{bi} \delta \mathbf{x}_p \quad (25)$$

$$\mathbf{J}_{bi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b_{iz} & -b_{iy} \\ 0 & 1 & 0 & -b_{iz} & 0 & b_{ix} \\ 0 & 0 & 1 & b_{iy} & -b_{ix} & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

由式(24)右侧式可得

$$\mathbf{v}_{bi} = \dot{d}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{w}_{ci} \times \mathbf{c}_i \quad (27)$$

式中， $\mathbf{w}_{ci}$ 为杆件 $C_i B_i$ 的角速度。

由式(25)、(27)得驱动的输入速度

$$\dot{d}_i = \frac{\mathbf{v}_{bi} \cdot \mathbf{c}_i}{\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{c}_i} = \left(\frac{\mathbf{c}_i}{\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{c}_i} \right)^T \mathbf{J}_{bi} \delta \mathbf{x}_p \quad i=1 \ 2 \ 3 \quad (28)$$

将式(28)对 3 条支链列出，得到速度雅可比矩阵 $\mathbf{J}_p$

$$\begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_p \delta \mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} \left(\frac{\mathbf{c}_1}{\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{c}_1} \right)^T \mathbf{J}_{b1} \\ \left(\frac{\mathbf{c}_2}{\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{c}_2} \right)^T \mathbf{J}_{b2} \\ \left(\frac{\mathbf{c}_3}{\mathbf{s}_3 \cdot \mathbf{c}_3} \right)^T \mathbf{J}_{b3} \end{bmatrix} \delta \mathbf{x}_p \quad (29)$$

由式(27)、(28)求得杆件 $C_i B_i$ 的角速度

$$\mathbf{w}_{ci} = \frac{\mathbf{J}_{ci} \mathbf{J}_{bi} + (\mathbf{s}_i \times \mathbf{c}_i) \left(\frac{\mathbf{c}_i}{\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{c}_i} \right)^T \mathbf{J}_{bi}}{c^2} \delta \mathbf{x}_p \quad i=1, 2, 3 \quad (30)$$

式中， c 为矢量 $\mathbf{c}_i$ 模长，且

$$\mathbf{J}_{ci} = \begin{bmatrix} 0 & -c_{iz} & c_{iy} \\ c_{iz} & 0 & -c_{ix} \\ c_{iy} & -c_{ix} & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

将式(30)对三条支链列出写为矩阵形式, 可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_{c1} \\ \mathbf{w}_{c2} \\ \mathbf{w}_{c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{wc1} \\ \mathbf{J}_{wc2} \\ \mathbf{J}_{wc3} \end{bmatrix} \delta \mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{J}_{c1} \mathbf{J}_{b1} + (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{c}_1) \left(\frac{\mathbf{c}_1}{\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{c}_1} \right)^T \mathbf{J}_{b1}}{c^2} \\ \frac{\mathbf{J}_{c2} \mathbf{J}_{b2} + (\mathbf{s}_2 \times \mathbf{c}_2) \left(\frac{\mathbf{c}_2}{\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{c}_2} \right)^T \mathbf{J}_{b2}}{c^2} \\ \frac{\mathbf{J}_{c3} \mathbf{J}_{b3} + (\mathbf{s}_3 \times \mathbf{c}_3) \left(\frac{\mathbf{c}_3}{\mathbf{s}_3 \cdot \mathbf{c}_3} \right)^T \mathbf{J}_{b3}}{c^2} \end{bmatrix} \delta \mathbf{x}_p \quad (32)$$

$$\mathbf{J}_{wc} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{wc1} \\ \mathbf{J}_{wc2} \\ \mathbf{J}_{wc3} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{9 \times 6} \quad (33)$$

求得的 $\mathbf{J}_{wc}$ 称为支链角速度雅可比。

杆 $C_i B_i$ 质心速度由下式求得

$$\mathbf{v}_{ci} = \dot{d}_i \mathbf{s}_i + \frac{e_i}{c} \mathbf{w}_{ci} \times \mathbf{c}_i \quad (34)$$

式中, e_i 为杆件质心距点 C 的距离, 结合式(28)、(30)得

$$\mathbf{v}_{ci} = \left(\mathbf{s}_i \cdot \left(\frac{\mathbf{c}_i}{\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{c}_i} \right)^T \mathbf{J}_{bi} - \frac{e_i}{c} \mathbf{J}_{ci} \mathbf{J}_{wci} \right) \delta \mathbf{x}_p \quad i=1,2,3 \quad (35)$$

将式(35)所有支链方程列出写为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{c1} \\ \mathbf{v}_{c2} \\ \mathbf{v}_{c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{vc1} \\ \mathbf{J}_{vc2} \\ \mathbf{J}_{vc3} \end{bmatrix} \delta \mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \left(\frac{\mathbf{c}_1}{\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{c}_1} \right)^T \mathbf{J}_{b1} - \frac{e_1}{c} \mathbf{J}_{c1} \mathbf{J}_{wc1} \\ \mathbf{s}_2 \left(\frac{\mathbf{c}_2}{\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{c}_2} \right)^T \mathbf{J}_{b2} - \frac{e_2}{c} \mathbf{J}_{c2} \mathbf{J}_{wc2} \\ \mathbf{s}_3 \left(\frac{\mathbf{c}_3}{\mathbf{s}_3 \cdot \mathbf{c}_3} \right)^T \mathbf{J}_{b3} - \frac{e_3}{c} \mathbf{J}_{c3} \mathbf{J}_{wc3} \end{bmatrix} \delta \mathbf{x}_p \quad (36)$$

$$\mathbf{J}_{vc} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{vc1} \\ \mathbf{J}_{vc2} \\ \mathbf{J}_{vc3} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{9 \times 6} \quad (37)$$

求得的 $\mathbf{J}_{vc}$ 称为支链速度雅可比。

由式(33)、(37)求得动平台速度 $\delta \mathbf{x}_p$ 与第 i 条支链 $C_i B_i$ 杆映射关系如下, 将式(38)称为支链雅可比矩阵。

$$\mathbf{J}_{si} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{wci} \\ \mathbf{J}_{vci} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{6 \times 6} \quad i=1,2,3 \quad (38)$$

2.3 各杆件加速度

由式(25)、(27)求得 B_i 点加速度

$$\dot{\mathbf{v}}_{bi} = \dot{\mathbf{v}}_p + \dot{\mathbf{w}}_p \times \mathbf{b}_i + \mathbf{w}_p \times (\mathbf{w}_p \times \mathbf{b}_i) =$$

$$\mathbf{J}_{bi} \delta \ddot{\mathbf{x}}_p + \mathbf{w}_p \times (\mathbf{w}_p \times \mathbf{b}_i) \quad (39)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{bi} = \ddot{d}_i \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{w}}_{ci} \times \mathbf{c}_i + \mathbf{w}_{ci} \times (\mathbf{w}_{ci} \times \mathbf{c}_i) \quad (40)$$

由式(40)求得驱动输入的加速度

$$\ddot{d}_i = \frac{\dot{\mathbf{v}}_{bi} \cdot \mathbf{c}_i - \mathbf{w}_{ci} \cdot (\mathbf{c}_i (\mathbf{w}_{ci} \cdot \mathbf{c}_i) - c^2 \mathbf{w}_{ci})}{\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{c}_i} \quad (41)$$

式(41)可进一步推导杆 $C_i B_i$ 的角加速度和质心加速度

$$\dot{\mathbf{w}}_{ci} = \frac{\ddot{d}_i \mathbf{s}_i \times \mathbf{c}_i - \dot{\mathbf{v}}_{bi} \times \mathbf{c}_i}{c^2} \quad (42)$$

$$\mathbf{a}_{ci} = \ddot{d}_i \mathbf{s}_i + e_i \dot{\mathbf{w}}_{ci} \times \frac{\mathbf{c}_i}{c} + e_i \mathbf{w}_{ci} \times \left(\mathbf{w}_{ci} \times \frac{\mathbf{c}_i}{c} \right) \quad (43)$$

2.4 动力学方程建立与求解

对于动平台和被驱动的滑块, 其六维力已由式(8)和式(9)给出。杆 $C_i D_i$ 受到冗余力矩, 其六维力由式(10)给出。

将式(8)、(9)、(10)、(23)、(29)、(38)代入式(13)得到动力学方程

$$\delta \mathbf{q}_k^T \mathbf{J}_t^T [\mathbf{J}_p^T (\mathbf{f} + \boldsymbol{\tau}) + \hat{\mathbf{F}}_p + \sum_{i=1}^3 \mathbf{J}_{si}^T \hat{\mathbf{F}}_{il}] = 0 \quad (44)$$

式中, $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$ 为 3 个滑块所受的重力及惯性力, 它们只在 z 方向有值, 因此可与驱动力一块计算。 $\hat{\mathbf{F}}_{il}$ 为第 i 条支链的杆件 $C_i B_i$ 所受的合外力和合外力偶(包括惯性力/力偶及重力)。

式(44)对任意 $\delta \mathbf{q}_k = [\delta \gamma \ \delta \beta \ v_z]^T$, 式(44)均成立, 因此有

$$\mathbf{J}_t^T [\mathbf{J}_p^T (\mathbf{f} + \boldsymbol{\tau}) + \hat{\mathbf{F}}_p + \sum_{i=1}^3 \mathbf{J}_{si}^T \hat{\mathbf{F}}_{il}] = 0 \quad (45)$$

对该三自由度并联机构, 当无冗余驱动时主驱动力可由下式解得

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3]^T = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (46)$$

当被动关节共有 N 个冗余驱动时, 主驱动力和冗余驱动力的最小二范数解由伪逆法求得

$$[\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3 \ n_1 \ \cdots n_N]^T = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{B} \quad (47)$$

3 理论计算

对于该并联动力头, 无驱动冗余时其结构参数设定为 $a = 0.4 \text{ m}$, $b = 0.2 \text{ m}$, $c = 0.64 \text{ m}$, $h = 0.04 \text{ m}$, $m_{11} = m_{21} = m_{31} = 0.5 \text{ kg}$, $e_1 = e_2 = e_3 = 0.32 \text{ m}$, $m_p = 3.7 \text{ kg}$, $m_{c1} = m_{c2} = m_{c3} = 0.7 \text{ kg}$ 。

驱动冗余会在滑块处安装电动机, 由于其与滑块均在导轨上移动而无转动, 因而可视为滑块质量的增加。安装电动机后滑块与电动机的总质量为

$$m_{11} = m_{21} = m_{31} = 1.8 \text{ kg}$$

连杆 $C_i B_i$ 和动平台的惯性张量根据几何特性和

质量分布计算。

输出力为

$$\hat{F} = [0 \ 0 \ -400\text{N} \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

假设 3-PRS 并联机构动平台质心运动轨迹为

$$\begin{cases} \gamma = 0.8 \cos 4t \\ \beta = 0.8 \sin 4t \\ p_z = 0.8 - 0.15 \cos 4t \end{cases}$$

式中, 角度单位为 rad, 长度单位为 m。

在 Matlab 软件中分别对无驱动冗余, 单驱动冗余、多驱动冗余(包括两被动关节驱动冗余和三被动关节驱动冗余)总共八种驱动方式进行理论计算。

3.1 单一被动关节驱动冗余

这种驱动冗余方式下, 分别在图 1 机构的被动关节 1、2 和 3 处施加冗余驱动。该被动关节是转动副, 所以引入的是冗余扭矩。

基于理论推导的动力学方程在 Matlab 里对一个周期内的驱动力进行解算, 所得结果如图 3 所示。

从图 3 可看出, 对单一支链施加冗余的驱动, 该驱动由动力学方程的最小二范数解作为输入时, 它的作用主要体现在降低本支链的主驱动力, 对其余支链的主驱动力影响很小。从表 1 可知, 冗余驱动可以降低对应支链主驱动力峰值的 20% 以上。作为代价, 主驱动力的最小值的增幅也在这一水平。相比无冗余的情况, 峰值下降明显, 主驱动力最小

(a) 无冗余驱动下主驱动力变化

值有所上升。冗余驱动使主驱动力的分布区域收拢在一个相对狭小的区域。

(b) 被动关节 2 冗余时主驱动力变化

(c) 被动关节 2 冗余时主驱动力变化

(d) 被动关节 3 冗余时主驱动力变化

图 3 单一被动关节驱动冗余下主驱动力与冗余扭矩变化曲线

表 1 单一被动关节冗余对其所在支链主驱动力的影响

驱动力大小/N	施加冗余力偶前		施加冗余力偶后		百分比(%)	
	最小值	最大值	最小值	最大值	最小值增幅	峰值减幅
主驱动力 τ_1 (被动关节 1 冗余)	106.78	235.40	127.13	184.57	19.06	21.59
主驱动力 τ_2 (被动关节 2 冗余)	108.67	227.09	131.19	176.92	20.72	22.09
主驱动力 τ_3 (被动关节 3 冗余)	99.58	240.99	127.94	186.88	28.48	22.45

3.2 多被动关节驱动冗余

这种驱动冗余方式有两种情形, 第一种为两被动关节冗余驱动, 即分别在图 1 机构两处被动关节施加冗余驱动, 包括三种组合方式, 即被动关节 1 和 2、1 和 3、2 和 3 施加冗余扭矩。第二种为三被动关节冗余驱动, 即所有被动关节均施加冗余扭矩。解算在不同冗余情况下主驱动力和冗余扭矩的变化情况, 如图 4 所示。

分析图 4 可知, 多冗余驱动时, 冗余驱动仍对其所在支链主驱动力的影响最大, 对其他支链影响较弱。将不同冗余方式下各支链主驱动力汇总列出表 2。

如表 2 所示, 两被动关节冗余驱动对支链主驱动峰值减幅比单冗余驱动表现更好。无驱动冗余支链对应的主驱动峰值也有所降低。当冗余驱动个数增加到 3 时, 所有支链主驱动力峰值的减幅均高于两被动关节冗余驱动, 减幅均在 24% 以上, 同时主驱动最小值增幅也更大, 说明增加冗余驱动个数, 对应支链的主驱动力分布更加集中, 分布的上下界更加狭窄, 具有更好的驱动力优化配置效果。

(a) 被动关节 1、2 冗余的情况

(b) 被动关节 1、3 冗余的情况

(c) 被动关节 2、3 冗余的情况

(d) 被动关节 1、2 和 3 同时冗余的情况

图 4 多关节驱动冗余下主驱动力与冗余扭矩变化曲线

4 仿真实验

在仿真软件 ADAMS 环境中建立虚拟样机, 并将 Matlab 理论推导得到冗余驱动力作为输入, 在动平台按照给定轨迹运动的情况下, 仿真出主驱动力的变化情况。以无冗余、1 和 2 关节冗余、1 和 3 关节冗余以及三被动关节冗余驱动的情况为例, 绘制主驱动力在周期内的变化情况, 所得结果如图 5 所示。

比较图 5a 与图 3a, 仿真结果与理论推导解算求得的主驱动力相比, 其走向和趋势一致, 幅值有 7.69% 的误差, 验证了本文动力学建模的正确性, 误差原因在于 Z3 并联动力头的两个转动自由度伴随有微小的平移, 它的自由度并非纯粹的两转一移, 建模过程中忽略了其微小的移动。分别对比图 5 中不同驱动冗余方式下主驱动力变化曲线与图 4 中的理论推导的曲线, 它们走向和趋势一致, 验证采用

表 2 多关节驱动冗余对各支链主驱动力的影响

冗余方式	主驱动力	施加冗余力偶前		施加冗余力偶后		百分比(%)	
		最小值/N	最大值/N	最小值/N	最大值/N	最小值增幅	峰值减幅
被动关节 1、2 冗余	τ_1	106.78	235.40	132.83	177.56	24.40	24.57
	τ_2	108.67	227.09	134.07	174.83	23.37	23.01
	τ_3	99.58	240.99	108.32	219.11	8.78	9.1
被动关节 1、3 冗余	τ_1	106.78	235.40	123.18	185.44	15.36	21.22
	τ_2	108.67	227.09	117.14	206.50	7.8	9.07
	τ_3	99.58	240.99	125.09	187.09	25.28	22.37
被动关节 2、3 冗余	τ_1	106.78	235.40	114.24	212.84	6.99	9.58
	τ_2	108.67	227.09	126.99	178.54	16.86	21.38
	τ_3	99.58	240.99	128.73	181.02	29.27	24.88
被动关节 1、2 和 3 冗余	τ_1	106.78	235.40	136.32	177.56	27.66	24.57
	τ_2	108.67	227.09	140.95	169.31	29.70	25.44
	τ_3	99.58	240.99	131.07	180.31	31.62	25.18

图 5 ADAMS 动力学仿真建模

表 3 主驱动力峰值优化的仿真与理论值对比

主驱动力	峰值减幅(%)						
	被动关节 1 冗余	被动关节 2 冗余	被动关节 3 冗余	被动关节 1、2 冗余	被动关节 1、3 冗余	被动关节 2、3 冗余	被动关节 1、2、3 均冗余
τ_1	27.82(21.59)	—	—	27.93(24.57)	23.4(21.22)	—	28.98(24.57)
τ_2	—	30.61(22.09)	—	28.87(23.01)	—	25.79(21.38)	32.18(25.44)
τ_3	—	—	28.04(22.45)	—	24.91(22.37)	26.95(24.88)	28.56(25.18)

最小二范数解作为冗余输入的可行性和正确性。表 3 给出了所有冗余方式下主驱动峰值减幅在仿真环境与理论推导下的数值比对结果, 括号外为仿真数值, 括号内为理论值。

从表 3 可以看出, 仿真与理论推导下峰值的减幅在同一水平, 从而证明 Type1 驱动冗余方式优化主驱动力的可靠性。但是如表中数据所示, 不同的驱动冗余方式所产生的优化结果有所不同, 表现在驱动冗余的优化方法仅对驱动冗余支链的影响显著, 对其余支链影响较小。单一的在某一支链施加冗余驱动, 无法有效减小其余支链主驱动峰值。因此冗余驱动的数目增加, 影响到的支链越多, 主驱动力优化配置的效果会更好, 应当根据实际情况选取冗余的个数。

5 结论

(1) 基于虚功原理, 建立了一般并联机构冗余驱动动力学模型, 采用伪逆法对主驱动力和冗余驱动力进行求解, 并以 Z3 并联动力头为例, 对不同驱动冗余方式的优化效果进行分析。

(2) 驱动冗余对所在支链的主驱动力影响显著, 对其余支链影响较小。施加冗余力矩后对应的主驱动力峰值降低明显, 上下界更加收拢, 跨度更加狭窄, 其余支链峰值仍维持在同一水平。

(3) 运用 ADAMS 仿真软件, 将理论解算的驱动冗余值代入仿真中, 对理论推导结果进行了仿真验证, 证明本文所建立的驱动冗余动力学模型的正确性。所得优化效果与理论解所得结论一致, 证明采用最小二范数解作为冗余输入对主驱动力优化配置的有效性和正确性。

参 考 文 献

- [1] 张彦斐, 宫金良, 李为民, 等. 一种 6 自由度冗余驱动并联机器人运动学分析及仿真[J]. 机械工程学报, 2005, 41(8): 144-148.
ZHANG Yanfei, GONG Jinliang, LI Weimin, et al. Kinematic analysis and simulation of a 6-dof redundant actuation parallel mechanism[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(8): 144-148.
- [2] 卿建喜, 李剑锋, 方斌. 冗余驱动 Tricept 并联机构的驱动优化[J]. 机械工程学报, 2010, 46(5): 8-14.
QING Jianxi, LI Jianfeng, FANG Bin. Drive Optimization of tricept parallel mechanism with redundant actuation[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(5): 8-14.
- [3] LI Q, ZHANG N, WANG F. New indices for optimal design of redundantly actuated parallel manipulators[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2016, 9(1): 011007.
- [4] CHENG H, LIU G F, YIU Y K, et al. Advantages and dynamics of parallel manipulators with redundant actuation[C]// Proceedings of RSJ/IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems, 29 Oct.-3 Nov., 2001, Maui, USA. Piscataway: IEEE, 2001: 171-176.
- [5] SHANG Weiwei, CONG Shuang, GE Yuan. Adaptive computed torque control for a parallel manipulator with redundant actuation[J]. Robotica, 2012, 30(3): 457-466.
- [6] TAKEDA Y, FUNABASHI H, ICHIKAWA K, et al. An in-parallel actuated manipulator with redundant actuators for gross and fine motions[C]// Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, 14-19 Sept., 2003, Taipei, Taiwan, China. New York: IEEE, 2003: 749-754.
- [7] XU Yundou, YAO Jiantao, ZHAO Yongsheng. Inverse dynamics and internal forces of the redundantly actuated parallel manipulators[J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 51(51): 172-184.
- [8] KIM J, PARK C, RYU S J, et al. Design and analysis of a redundantly actuated parallel mechanism for rapid machining[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2001, 17(4): 423-434.
- [9] YAO J, GU W, FENG Z, et al. Dynamic analysis and driving force optimization of a 5-DOF parallel manipulator with redundant actuation[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2017, 48(1): 51-58.
- [10] NOKLEBY S B, FISHER R, PODHORODESKI R P, et al. Force capabilities of redundantly-actuated parallel manipulators[J]. Mechanism and Machine Theory, 2005, 40(5): 578-599.
- [11] 牛雪梅, 刘辛军, 高国琴, 等. 新型驱动冗余并联机构动力学建模及简化分析[J]. 机械工程学报, 2014, 50(19): 41-49.
NIU Xuemei, LIU Xinjun, GAO Guoqin, et al. Dynamic formulation and simplified model of a novel 3-dof parallel mechanism with actuation redundancy[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(19): 41-49.
- [12] 牛雪梅, 高国琴, 刘辛军, 等. 三自由度驱动冗余并联机构动力学建模与试验[J]. 农业工程学报, 2013, 29(16): 31-41.
NIU Xuemei, GAO Guoqin, LIU Xinjun, et al. Dynamics and control of a novel 3-dof parallel manipulator with actuation redundancy[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering, 2013, 29(16): 31-41.
- [13] 董成林, 刘海涛, 黄田. 含冗余驱动支链 4-UPS&UP 并联机构的运动学性能分析[J]. 机械工程学报, 2016,

- 52(5): 124-129.
- DONG Chenglin, LIU Haitao, HUANG Tian. Kinematic performance analysis of redundantly actuated 4-UPS&UP parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(5): 124-129.
- [14] 周昌春, 方跃法, 叶伟, 等. 6-RRS 超冗余驱动飞行模拟器的性能分析[J]. 机械工程学报, 2016, 52(1): 34-40. ZHOU Changchun, FANG Yuefa, YE Wei, et al. Performance analysis of 6-RRS over-redundant actuation flight simulator[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(1): 34-40.
- [15] LI Shihua, LIU Yanmin, CUI Hongliu, et al. Synthesis of branched chains with actuation redundancy for eliminating interior singularities of 3T1R parallel mechanisms[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2016, 29(2): 1-10.
- [16] HUA S, GUAN L, WANG L, et al. Drive force optimization for a redundant parallel machine[J]. Journal of Tsinghua University, 2007, 47(8): 1325-1329.
- [17] ABEDINNASAB M H, VOSSOUGH G R. Analysis of a 6-DOF redundantly actuated 4-legged parallel mechanism[J]. Nonlinear Dynamics, 2009, 58(58): 611-622.
- [18] YI B J, FREEMAN R A. Geometric analysis of antagonistic stiffness in redundantly actuated parallel mechanisms[J]. Journal of Robotic Systems, 1993, 10(5): 581-603.
- [19] KOCK S, SCHUMACHER W. Control of a fast parallel robot with a redundant chain and gearboxes: experimental results[C]// Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, 24-28 April, 2000, San Francisco, USA. New York: IEEE, 2000: 1924-1929.
- [20] LEE J H, LI B J, SUH H. Optimal design of a five-bar finger with redundant actuation[C]// Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, 20-20 May, 1998, Leuven, Belgium. New York: IEEE, 1998: 2068-2074.
- [21] TSAI L W. Robot analysis[M]. New York: Wiley, 2004.
- [22] 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014. HUANG Zhen, ZHAO Yongsheng, ZHAO Tieshi. Advanced spatial mechanism[M]. Beijing: Higher Education Press, 2014.
- [23] WAHL J. Articulated tool head: Germany, WO2000025976A2[P]. 2000-05-11.
-
- 作者简介: 王向阳, 男, 1995 年出生, 博士研究生。主要研究方向为机器人机构学。
E-mail: 17116388@bjtu.edu.cn
- 郭盛(通信作者), 男, 1972 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为机器人机构学。
E-mail: shguo@bjtu.edu.cn
- 曲海波, 男, 1983 年出生, 博士, 副教授, 硕士研究生导师。主要研究方向为机器人机构学。
E-mail: hbqu@bjtu.edu.cn
- 赵福群, 男, 1992 年出生, 博士研究生。主要研究方向为机器人机构学。
E-mail: 14125923@bjtu.edu.cn