DOI: 10.3901/JME.2019.08.118

车辆轨道系统的 P2 共振频率研究*

关庆华¹ 周业明² 李 伟¹ 温泽峰¹ 金学松¹

(1. 西南交通大学牵引动力国家重点实验室 成都 610031;

2. 中车青岛四方机车车辆股份有限公司 青岛 266111)

摘要: 将车辆轨道系统的 P2 共振转化为车辆簧下质量和轨道耦合系统的固有频率问题, 讨论了其振型函数和频率特征方程。利用频率特征方程, 分别分析了简支端欧拉梁钢轨模型长度、车辆簧下质量、轨道结构质量、轮轨接触刚度、钢轨弯曲刚度、钢轨支撑刚度以及车速对系统固有频率的影响, 尤其对 P2 共振频率的影响做了仔细分析。通过分析可知, 当轨道长度高于 25 m 时, 轨道模型的简支边界效应对系统的第 1、2 阶振动固有频率的影响可忽略不计; 轮轨线性化接触刚度的增大可使 P2 共振频率(第一阶共振频率)略有提高, 但对第 2 阶固有频率无影响; 轨道质量和车辆簧下质量对车辆轨道系统的 P2 共振频率有显著影响, P2 共振频率显著低于轨道系统自身的固有振动频率; 当不考虑轨道结构质量影响时, 车辆轨道系统 P2 共振呈现单自由度振系特征。随着轨道刚度的增大, P2 共振频率显著提高, 轨道参振质量和钢轨抗弯刚度对 P2 共振频率略有影响, 车辆行驶速度对 P2 共振频率影响较小。对于实际轨道结构, 提出了通过轨道自振特性反推钢轨基础弹性系数和 P2 共振频率的计算方法, 并进行了试验验证。

关键词: 车辆; 轨道; P2 共振; Laplace 变换; 簧下质量; 轨道刚度

中图分类号: U270; U211

Study on the P2 Resonance Frequency of Vehicle Track System

GUAN Qinghua¹ ZHOU Yeming² LI Wei¹ WEN Zefeng¹ JIN Xuesong¹

(1. State Key Laboratory of Traction Power, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031;

2. CRRC Qingdao Sifang Co., Ltd., Qingdao 266111)

Abstract: The P2 resonance of vehicle and track coupling system is transformed to the natural frequencies of system with unsprung mass and track. The mode shape and characteristic equation are discussed. The influences of length of track model, unsprung mass, track mass, contact stiffness between wheel and rail, flexural rigidity of the rail, stiffness of foundation and vehicle speed on the natural frequencies especially the P2 resonance frequency are analyzed thoroughly based on the characteristic equation. When the length of track model is longer than 25 m, its influence on P2 resonance and the second natural frequency can be neglected. The increasing contact stiffness will increase the frequency of P2 resonance slightly, but has almost no influence on the second natural frequency. Both the mass of track and unsprung mass have significant effects on P2 resonance. The frequency of P2 resonance is much lower than that of the track system without unsprung mass. If the track mass is neglected, the P2 resonance of vehicle/track system is actually a vibration system of single degree of freedom. The frequency of P2 resonance grows evidently with the increase of track stiffness. The vibrational mass of track and the flexural rigidity of the rail have slight influence on P2 resonance, while the effect of speed on P2 resonance is not obvious. For application, one method of calculating track stiffness and the frequency of P2 resonance is proposed based on the free vibration of track system, and the effectiveness of this method is verified by experiment.

Key words: vehicle; track; P2 resonance; Laplace transformation; unsprung mass; track stiffness

0 前言

轮轨冲击的高频力 P1 和中频力 P2 理论是 20

世纪 70 年代英国 Derby 铁路技术中心的 LYON 等在研究车轮通过低接头、焊缝或车轮擦伤时提出的, 并一直沿用至今^[1]。其中, P1 力的频率在 500~1 000 Hz, 是由簧下质量和轨道之间轮轨接触变形引起的振动, P1 力作用时间极短, 通常对轮轨表面造成损伤。P2 力可视为簧下质量与轨道作为整体质量在轨道弹性基础上的振动, 其频率范围为 20~100 Hz^[2-3],

* 国家自然科学基金(U1734201, 51305360)、牵引动力国家重点实验室自主研究课题(2017IPL_T05)和中央高校基本科研业务费专项资金(2682016CX126)资助项目。20180223 收到初稿, 20180725 收到修改稿

P2 力作用时间较长,可向上传递给车辆部件,向轨下传递至道床,对车辆和轨道系统的危害最大。实际上,P1 力是由接头及扁疤等突出的表面缺陷引起的冲击力,而线路上不可避免的轨道不平顺以及车轮周向不圆顺均可能引起轮轨系统的 P2 共振,因此,P2 共振普遍存在于车辆轨道系统,对轮轨界面的非均匀磨耗有直接影响,GRASSIE 和 KALOUSEK 总结的六种类型钢轨波磨中,重载型(Heavy haul)、轻轨型(Light rail)及接触疲劳型(Contact Fatigue)波磨均与 P2 共振有关^[4]。KNOTHE 和 GRASSIE 称 P2 共振与波长为 300~1 500 mm 的钢轨波磨形成有关,在巴黎的 RATP 地铁线上出现了 P2 共振引起的轻轨型波磨^[5]。NIELSEN 等^[6]指出随着轨道刚度的增加,由车轮多边形磨损激起的 P2 共振将加剧轮轨作用力,1~5 阶车轮多边形磨损可能与轮对 1 阶弯曲和扭转固有频率以及 P2 共振有关。1998 年德国 ICE 高速列车脱轨调查中发现脱轨列车车轮周向具有 3 阶不圆顺磨损^[7]。此外,P2 共振频率还可能与车辆部件的弹性固有频率一致,如轮对的 1 阶弯曲振动频率一般在 70~95 Hz(直线电机地铁轮对为 73 Hz^[8],意大利 ETR 高速列车轮对为 79 Hz^[9],ICE 轮对为 89 Hz^[7],电力机车轮对为 84 Hz^[10]),车辆系统部件的固有频率与 P2 共振频率接近时,强烈的轮轨作用将会导致车辆部件和轨道结构的疲劳破坏。

轨道垂向振动固有频率首先由 TIMOSHENKO 于 1926 年通过无质量 Winkler 地基梁模型得到,可表示为 $\omega_R = (k/m)^{0.5}$,其中, k 为 Winkler 地基刚度系数(即钢轨基础弹性系数), m 为钢轨的单位长度质量。PATIL 在 TIMOSHENKO 研究基础上考虑车轮质量的影响,指出车轮质量会降低轨道的固有频率^[11]。直到 20 世纪 80 年代人们才发现负载状态下轨道结构存在 25~40 Hz 的低阶固有频率。英国铁路发现轨道无载荷状态的 1 阶固有频率在 130 Hz 左右,当受到车轮簧下质量负载后的低阶固有频率降至 50~80 Hz^[5]。GRASSIE 等^[12]分别利用连续双层梁模型以及离散轨枕支撑模型研究了垂向激励作用下的轨道振动,指出轨道系统存在钢轨和轨枕质量在轨道整体刚度上的低阶共振,当轨道系统受到 350 kg 车轮质量作用时,该共振频率从 150 Hz 降到 100 Hz 以内。CLARK 等^[13]研究了波磨钢轨的轮轨相互作用,通过传递矩阵法计算离散支撑轨道结构的固有频率,得到的轮轨系统的低阶固有频率为 80.24 Hz。ONO 等^[14]研究了连续支撑无限长轨道在车轮冲击载荷下的自由振动和受周期不平顺激励的强迫振动。MÜLLER 等^[15]通过傅里叶变换法和 Floquet

理论研究了离散支撑轨道在车轮载荷下的振动问题,考虑簧下质量后车辆、轨道和轨枕整体同相振动频率为 81 Hz。近三十年来国内外学者对车辆和轨道垂向冲击和振动问题进行了大量的研究^[16-25],李成辉等^[16]研究了高速铁路受移动周期载荷的位移波现象,结果表明,增大轨道阻尼可提高轨道临界速度;ZHAI 等^[17]提出了车辆轨道垂向耦合动力学模型,轨道结构考虑了钢轨受轨枕和道床离散支撑的影响,通过 Hertz 非线性接触理论与车辆模型耦合;文献[18-21]通过模态叠加法和有限元法建立车辆-轨道垂向动力作用模型,对轨道接头冲击及不平顺激励等问题进行了详细研究。WU 等^[22]指出钢轨梁模型不足以研究钢轨高频振动,以双层 Timoshenko 梁模型研究轨道垂向振动问题,通过格林函数法和模态叠加法来考虑轨道的离散支撑。SHENG 等^[23]提出了移动格林函数法求解高速轮轨垂向相互作用,通过傅里叶变换将频域载荷转换到时域内,利用该方法对轨道系统减振器进行了分析。孙文静等^[24]利用格林函数法建立了车辆轨道系统垂向模型,分析了不同轨道谱和车速时的车辆轨道系统垂向随机振动特性。文献[25]对比了基于格林函数法的车辆轨道垂向耦合动力学模型和传统的车辆轨道垂向耦合模型的结果和特点。李霞等^[26-27]建立了普通短轨枕和梯形轨枕轨道结构的有限元模型,通过轨道结构振动特性探讨了两种轨道结构的钢轨波磨成因。

上述关于车辆轨道系统垂向振动的研究,通常将车辆系统和轨道系统分别建模,通过线性或非线性轮轨接触模型将二者耦合,无法直接得到车辆轨道垂向相互作用时的共振频率。TIMOSHENKO 给出的轨道固有振动频率也没有考虑车辆簧下质量的影响,尽管文献[11-15]也得到了车辆轨道系统的 P2 共振频率,但没有给出明确的计算公式和参数影响规律。

P2 共振频率与轨道质量、刚度及簧下质量密切相关,现场试验发现,P2 共振与钢轨波浪形磨损和车轮多边形磨损可能有密切的关系,P2 共振还可能诱发车辆部件的结构共振而发生疲劳断裂,危及行车安全。所以,明确 P2 共振频率对车辆系统部件设计及车辆和轨道的匹配有重要意义。本研究通过考虑车辆系统簧下质量和轨道的弹性连接,将簧下质量的 P2 共振转化为簧下质量和轨道耦合系统的固有振动,给出了 P2 共振的计算方法,并对 P2 共振频率的参数影响规律进行了分析。通过与已有研究结果以及现场试验对比验证了本文模型和计算方法的有效性。

1 簧下质量-轨道系统分析模型

1.1 振动微分方程

由于 P2 共振频率在 20~100 Hz 范围内, 此频率范围内 Euler 梁模型和 Timoshenko 梁模型差异很小^[3], 而轨枕约束引起的钢轨 Pin-Pin 共振频率一般在 900 Hz 以上, 因此, 利用等效连续弹性支撑的 Euler 梁模型模拟轨道系统的轨枕离散支撑, 分析轮轨系统低阶固有振动可以得到满意结果。此外, 为得到轮轨系统 P2 共振频率的解析解, 以线性化接触刚度来模拟轮轨间接触力和变形关系。

如图 1 所示, 将轨道系统考虑为 Winkler 地基上均质钢轨, 长度为 l , 车轮载荷作用在 $x = x_0$ 处。系统的运动微分方程可表示为

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m_r \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + ky = P_U \delta(x - x_0) \quad (1)$$

$$M_U \ddot{y}_U + k_H [y_U - y(x_0, t)] = P_0 \quad (2)$$

式中, EI 为钢轨抗弯刚度 m_r 为单位长度的半边轨道质量, k 为钢轨基础弹性系数, M_U 为车辆簧下质量之半, k_H 为轮轨线性化接触刚度, y 和 y_U 分别表示钢轨和车轮的垂向位移, P_0 包含了车辆一系簧上作用力和 M_U 引起的重力, δ 为狄拉克函数, P_U 为轮轨垂向力, 可表示为

$$P_U = k_H [y_U - y(x_0, t)] = P_0 - M_U \ddot{y}_U \quad (3)$$

图1 连续弹性支撑轨道-车轮系统模型

考虑系统的自由振动问题时, 可令 $P_0 = 0$, 再记 $\beta_U^4 \equiv k_H / M_U$, 有

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m_r \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + ky = -M_U \ddot{y}_U(t) \delta(x - x_0) \quad (4)$$

$$\ddot{y}_U + \beta_U^4 y_U = \beta_U^4 y(x_0, t) \quad (5)$$

利用分离变量法求解, 可假设

$$\begin{cases} y(x, t) = Y(x) \sin(\alpha^2 t) \\ y_U(t) = B_U Y(x_0) \sin(\alpha^2 t) \end{cases} \quad (6)$$

式中, $Y(x)$ 是待定的固有振型函数, α^2 是待定的固有频率。由式(5)得 $B_U = \beta_U^4 / (\beta_U^4 - \alpha^4)$, 于是, 方程(4)可表示为

$$Y''''(x) - \lambda^4 Y(x) = \frac{M_U B_U(\lambda) \alpha^4}{EI} Y(x_0) \delta(x - x_0) \quad (7)$$

$$\text{式中, } \lambda^4 = \frac{\alpha^4 m_r - k}{EI}, \quad \alpha^4 = (\lambda^4 EI + k) / m_r,$$

$$B_U(\lambda) = \frac{\beta_U^4}{\beta_U^4 - (\lambda^4 EI + k) / m_r}.$$

1.2 振型函数和频率方程

对式(7)进行 Laplace 变换可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(Y) = & \frac{s^3 Y(0) + s^2 Y'(0) + s Y''(0) + Y'''(0)}{s^4 - \lambda^4} + \\ & \frac{M_U B_U(\lambda) \alpha^4 Y(x_0) \exp(-s x_0)}{EI (s^4 - \lambda^4)} \end{aligned} \quad (8)$$

对式(8)进行 Laplace 逆变换, 经整理得

$$Y(x) = \frac{M_U B_U(\lambda) \alpha^4 Y(x_0)}{EI} G(x) \quad (9)$$

式中, G 为单位脉冲力作用下钢轨梁的弯曲响应曲线, 可表示为

$$\begin{aligned} G(x) = & A \sin \lambda x + B \cos \lambda x + C \sinh \lambda x + D \cosh \lambda x + \\ & (1/2\lambda^3) [\sinh \lambda(x - x_0) - \sin \lambda(x - x_0)] u(x - x_0) \end{aligned} \quad (10)$$

式中, $u(x - x_0)$ 为单位阶跃函数, 系数 A 、 B 、 C 、 D 可由钢轨梁模型的边界条件来确定。

当考虑轨道两端简支时, 边界条件为

$$Y(0) = Y(l) = Y''(0) = Y''(l) = 0 \quad (11)$$

将式(10)代入式(9), 根据式(11)可得

$$\begin{cases} B = D = 0 \\ A = \sin \lambda(x - x_0) / 2\lambda^3 \sin \lambda l \\ C = -\sinh \lambda(x - x_0) / 2\lambda^3 \sinh \lambda l \end{cases} \quad (12)$$

将式(10)、(12)代入式(9)即可得到钢轨的振型函数为

$$Y(x) = \frac{M_U B_U(\lambda) \alpha^4 Y(x_0)}{EI} G(x; x_0, \lambda) \quad (13)$$

当 $x = x_0$ 时, $Y(x) = Y(x_0)$, 代入上式可得到系统固有频率的特征方程

$$\frac{M_U B_U(\lambda) \alpha^4}{EI} G(x_0; x_0, \lambda) = 1 \quad (14)$$

由此可求出系统的一系列特征值 λ_r , $r = 1, 2, \dots$ 。其中, λ_1 对应的 1 阶固有频率为簧下质量和轨道系统的 P2 共振频率。

2 P2 共振频率求解及模型的影响

2.1 特征方程的解

由式(7)可知, 当激励频率低于轨道固有频率

时, 即 $\alpha^2 < \omega_R = \sqrt{k/m_r}$, λ 为两对共轭复根, 当 $\alpha^2 > \omega_R$ 时, λ 为实部为零的一对共轭复根和一对实根。因此, λ 可取

$$\lambda = \begin{cases} (1+i)|\lambda|/\sqrt{2} & \alpha^2 < \omega_R \\ |\lambda| & \alpha^2 > \omega_R \end{cases} \quad (15)$$

式中, $|\lambda| = \sqrt[4]{(\alpha^4 m_r - k)/EI}$ 。

取 $x_0 = l/2$, 式(14)可以化简为

$$\Delta = \frac{M_U k_H \alpha^4 \tan(\lambda l/2) - \tanh(\lambda l/2)}{4EI\lambda^3 k_H - M_U \alpha^4} - 1 = 0 \quad (16)$$

式(16)为超越方程, 将式(15)代入即可迭代求解得到各阶 λ_r 和 α_r^2 。

图2所示为500 Hz频率范围内的特征方程根曲线, 所采用的基本计算参数如表1所示, $\Delta = 0$ 所对应的频率即为各阶特征频率, 首个根对应频率62.84 Hz即为系统的P2共振频率。由于轨道假定为简支边界, 当轨道越长时, 同样频率范围内的特征频率也越多, 与轨道系统自振类似。如不考虑簧下质量, 轨道系统的自振固有频率

$$\alpha_r^2 = \sqrt{\frac{EI\pi^4}{m_r l^4} r^4 + \frac{k}{m_r}} \quad r = 1, 2, \dots \quad (17)$$

显然, 轨道的各阶振动表现为轨道简支梁在自身刚度及钢轨基础弹性共同作用下的振动, 轨道长度越长, 同阶次的固有频率越低。

图2 特征方程的根曲线

表1 簧下质量-轨道系统计算参数

参数	数值	参数	数值
$m_r/(\text{kg/m})$	120	$EI/(\text{N}\cdot\text{m}^2)$	4.20×10^6
l/m	25	M_U/kg	645
$k/(\text{N/m}^2)$	9.81×10^7	$k_H/(\text{N/m})$	1.524×10^9

2.2 模型参数对 P2 共振频率的影响

上述对 P2 共振频率的计算是在假定钢轨边界条件为简支的情况下得到, 因此, 需要考虑足够长

的轨道来消除简支边界引起的边端效应。同时, 轮轨之间的接触刚度采用了线性化刚度值, 根据 Hertz 接触理论, 接触刚度与轮轨接触型面的曲率半径、材料弹性模量、泊松比以及法向载荷均有关系, 一般在 $1.225 \times 10^9 \sim 1.524 \times 10^9 \text{ N/m}$ 范围^[12, 14, 29]。

为分析轨道长度和接触刚度对轮轨系统固有频率的影响, 改变表1中轨道长度和接触刚度, 计算得到系统的前2阶固有频率如图3所示。当轨道长度大于6.25 m时, 轨道长度对P2共振频率的影响可忽略不计。第2阶固有频率随轨道长度增大而减小, 当轨道长于25 m时差别不大。接触刚度增大, P2共振频率略有提高, 第2阶固有频率不受接触刚度变化影响。因此, 下文分析中以25 m长轨道和 $k_H = 1.524 \times 10^9 \text{ N/m}$ 为计算参数, 如不加说明, 其余参数如表1所示。

图3 轨道长度及接触刚度对系统前2阶固有频率的影响

3 系统参数对 P2 共振的影响

车辆轨道系统的 P2 共振频率与车辆的簧下质量及轨道的质量和刚度密切相关。对于车辆而言, 当其簧下质量和垂向刚度为确定的设计参数时, 在运行过程中不会发生很大变化。但轨道因其由力学性能差异很大的材料组成, 刚度具有明显的非线性特征^[28], 有碴轨道和板式轨道以及不同形式的轨道减振扣件都会对轨道刚度以及参振质量有较大影响。此外, 随着运行时间的增加, 轨道系统的特性也会发生变化。在轨道的设计规范中, 对于轨道整体刚度也有明确的规定, 如高速铁路的轨道整体刚度值一般控制在 $50 \sim 100 \text{ kN/mm}$ ^[28], 折算成钢轨基础弹性系数为 $2.5 \sim 6.3 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ 。为提高乘坐舒适性, 力求降低钢轨的垫层刚度^[28], 城市轨道交通中为达到减振效果, 采用了多种低刚度的减振扣件。但是, 这样使得轨道系统的参振质量下降, 振动能量在钢轨上消耗, 易引发钢轨波磨。因此, 对于车

辆和轨道系统而言, 需要进行匹配设计优化。

3.1 轨道参振质量的影响

为明确车辆和轨道系统的质量在轮轨系统振动中的作用机理, 对车辆簧下质量-轨道系统的导纳特性进行分析, 并与不考虑车轮质量和不考虑轨道质量的系统导纳特性进行了对比, 结果如图 4 所示。轨道系统自身振动固有频率和车辆簧下质量-轨道系统的固有频率如表 2 所示。

图 4 车辆簧下质量-轨道系统的钢轨导纳

表 2 簧下质量轨道系统垂向固有频率 Hz

模态	轨道*	车辆轨道	模态	轨道*	车辆轨道
1	143.90	62.84	9	197.88	192.75
2	143.96	143.93	10	222.47	215.98
3	144.38	144.22	11	252.32	244.37
4	145.73	145.27	12	287.26	277.73
5	148.85	147.86	13	327.09	315.80
6	154.73	152.98	14	371.61	358.31
7	164.37	161.64	15	420.63	405.00
8	178.58	174.71	16	474.02	455.60

*轨道系统仅考虑奇数阶模态。

不考虑车轮耦合时, 轨道系统模型为典型的弹性地基支撑简支梁, 振动基频为 143.9 Hz, 与文献[3]结果一致。在高于该频率时轨道具有多个共振峰和反共振峰, 且各阶共振频率间隔随频率增加而增大。当考虑车辆簧下质量和轨道系统耦合时, 在图 4 中所示频率范围内具有和轨道系统自振同样个数的共振峰和反共振峰, 但不同的是, 第 1 阶共振频率明显低于轨道系统的自振基频。结合表 2 的结果可知, 考虑簧下质量耦合后, 轮轨系统的各阶固有频率均低于轨道系统自振频率, 其中, 第 1 阶固有频率下降最为显著。不考虑轨道质量的轮轨系统中轨道仅提供刚度, 为单自由度振系, 如图中所示,

该系统仅具有 1 个共振峰, 其共振频率远低于轨道系统自振频率, 但略高于考虑轨道质量的轮轨系统 1 阶共振频率。由图 4 还可知, 当频率高于 200 Hz 时, 同时考虑簧下质量和轨道质量的轮轨系统, 与无轨道质量的钢轨导纳基本重合。此外, 高于轨道自振基频时轮轨系统位移和激励力以反相位为主, 类似于 2 自由度振系。

上述分析可知, 轨道系统的质量对轮轨系统固有频率具有重要影响。轨道系统的参振质量不仅与轨道结构有关, 同时受轮轨冲击强度影响。本文分析中采用的轨道(单边)沿纵向分布质量基本参数为 120 kg/m, 与文献[3]一致, 同时, 对考虑不同轨道参振质量的轮轨系统前 2 阶共振频率进行了分析, 结果如图 5 所示。作为对比, 表 3 中还给出了轨道系统的自振基频。由图 5 和表 3 可知, 随着轨道参振质量的增大, 轮轨系统第 1 阶固有频率略有下降, 而第 2 阶固有频率及轨道系统自振基频则下降显著。这是由于第 1 阶固有频率为簧下质量和轨道系统耦合形成的 P2 共振频率, 簧下质量和轨道质量在轨道弹性基础上做同相振动, 此时, 轨道参振质量远低于簧下质量, 固其影响不明显。而第 2 阶固有频率实际上由轨道系统自身的固有振动特性所主导, 因此, 轨道参振质量的影响显著。上述规律表明, 本文模型得到轮轨系统 P2 共振频率受轨道参振质量的影响不大, 在不明确轨道参振质量的情况下, 可有效估计实际车辆簧下质量-轨道系统的 P2 共振频率范围。

图 5 轨道参振质量对轮轨系统前 2 阶固有频率影响

表 3 轨道参振质量与系统固有频率

轨道参振质量 /(kg/m)	振动频率/Hz		
	P2 共振*	轨道自振	第 2 阶共振*
60	61.15	205.47	205.51
120	59.28	145.29	145.32
150	58.39	129.95	129.98
240	55.87	102.73	102.76

注: *簧下质量为 1 500 kg 时计算。

3.2 钢轨抗弯刚度的影响

目前, 世界各国的轨道系统主要采用了 50 kg/m、60 kg/m 及 75 kg/m 三种型号的钢轨, 垂向抗弯刚度分别为 $4.20 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ 、 $6.63 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ 和 $9.25 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ [29]。按照表 1 中其他参数, 计算得到三种钢轨类型的 P2 共振频率分别为 62.84 Hz、65.75 Hz 和 67.92 Hz。在钢轨基础弹性系数和轨道参数不变的情况下, 轨道自振频率与钢轨垂向抗弯刚度无关, 均为 143.9 Hz。因此, 在其他参数不变情况下, 钢轨垂向抗弯刚度增大会使得 P2 共振频率略有增大。

3.3 簧下质量与钢轨基础弹性系数的影响

簧下质量与轨道刚度是影响轮轨系统 P2 共振的重要因素。地铁和轻轨车辆的簧下质量一般在 1 000~1 600 kg 范围内, 普速客车及高速动车组的簧下质量范围为 1 300~2 000 kg, 机车簧下质量可达到 2 500~5 500 kg。采用混凝土轨枕有碴轨道的钢轨基础弹性系数一般为 $0.6 \times 10^8 \sim 0.85 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, 采用混凝土宽轨枕的钢轨基础弹性系数约为 $0.7 \times 10^8 \sim 1.0 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ [29], 采用大刚度扣件无碴轨道的钢轨基础弹性系数可能达到更高范围。

图 6 所示为不同车辆簧下质量和钢轨基础弹性系数时轮轨系统的 P2 共振频率曲线。由图可知, P2 共振频率随簧下质量的增大而减小, 随钢轨基础弹性系数的增大而增大。以 $k=1.2 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ 为例, 簧下质量为 1 000~2 500 kg (常见于地铁、动车组及客运电力机车) 时 P2 共振频率范围为 53~79 Hz, 3 000~4 000 kg 时 P2 共振频率为 42~48 Hz, 4 500~6 000 kg (如内燃机车及重载货运电力机车) 时 P2 共振频率介于 36~40 Hz。

图 6 P2 共振频率随簧下质量和钢轨基础弹性系数的变化

图 7 中还给出了轮轨系统前 2 阶固有频率随簧下质量和钢轨基础弹性系数的变化规律。图中可知, 簧下质量对系统第 2 阶固有频率影响可忽略不计,

但第 2 阶固有频率随钢轨基础弹性系数的增长率要高于 P2 共振频率的增长率。这也进一步说明了轮轨系统的第 2 阶固有频率为轨道固有特性所主导, 且受钢轨基础弹性系数的影响显著, 对轨道 2 阶以上固有频率的影响情况也类似。

图 7 不同钢轨基础弹性系数和簧下质量时前 2 阶固有频率

3.4 车辆行驶速度的影响

上述模型和分析是在不考虑车辆行驶速度影响的前提下得到的。按照表 1 中参数, 通过无限长轨道模型计算得到不同速度移动载荷作用下钢轨位移导纳曲线如图 8 所示, 由图可知, 随着移动载荷速度的增加, 移动载荷激振下轨道系统自振频率略有下降, 当移动载荷速度从 0 km/h 增加至 150 km/h 时, 轨道系统低阶自振频率仅从 144 Hz 降至 141 Hz, 250 km/h 时轨道系统自振频率为 137 Hz, 360 km/h 时为 131 Hz。

图 8 移动载荷速度对轨道系统低阶振动频率的影响

结合前文分析, 考虑簧下质量后, 车轮和轨道系统的 P2 共振频率要明显低于轨道自振频率, 因此, 当考虑簧下质量作用时, 低于 150 km/h 的车辆行驶速度对车轮和轨道系统的 P2 共振频率影响可忽略不计。MÜLLER 等 [15] 的研究也认为, 在速度低于 300 m/s 时, 车辆簧下质量和轨道系统耦合状态下的第 1 阶共振频率几乎不受速度影响。

4 验证与应用

4.1 与 ONO 等计算结果比较

日本学者 ONO 等通过无限长轨道和车轮相互作用模型考察了冲击作用下轨道的自由振动和波磨激励下轨道的受迫振动,通过自由振动分析得到 6 种类型(以 A、B、C、D、E 和 F 区分)轨道结构在簧下质量作用下的自振频率^[14]。所采用的基本参数:簧下质量 850 kg,单位长度钢轨质量为 60.8 kg/m,轨枕沿轨道纵向分布质量为 280.2 kg/m,钢轨垂向抗弯刚度为 $6.3 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2$,扣件系统离散支撑分布刚度 K_p 分别取 A、B、C: $1.014 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, D: $1.69 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, E: $2.366 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, F: $3.041 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ 。道床特性常数 φ (其定义参见文献[14])分别取 A: 3.0 m^{-1} , B: 2.0 m^{-1} , C~F: 1.0 m^{-1} 。A 轨道的道床弹性模量 E_b 为 $5.88 \times 10^8 \text{ N/m}^2$,其余为 $2.94 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ 。

ONO 等模型参数中给出了扣件刚度和道床弹性参数,需要对钢轨基础弹性系数进行折算。根据文献[30],道床分布刚度可近似表示为

$$K_b = \frac{2(l_e - l_b)}{\ln \left[\frac{l_e (l_b + 2h_b \tan \alpha)}{l_b (l_e + 2h_b \tan \alpha)} \right]} \frac{E_b}{l_s} \quad (18)$$

式中, l_e 为半根轨枕有效支撑长度(取为 $1 \text{ m}^{[30]}$), l_b 为轨枕底面宽度(取为 $0.24 \text{ m}^{[14]}$), l_s 为轨枕间距, h_b 为道床厚度(取为 $0.35 \text{ m}^{[30]}$), α 为道床压力扩散角,由 $\alpha = \arctan(\varphi l_b)$ 确定。

钢轨基础弹性系数为扣件离散支撑分布刚度和道床支撑刚度的串联,可表示为

$$k = K_p K_b / (K_p + K_b) \quad (19)$$

根据上式估算得到的钢轨基础弹性系数以及基于 ONO 等给出的簧下质量和轨道参数计算得到的轮轨系统 P2 共振频率如表 4 所示,表中的“-”表示该项数值与前面的相同。由表中数据可知, A 型轨道扣件刚度最小,但道床刚度最大, F 型轨道的扣件刚度最大,但道床刚度较小,其余轨道类型介于两者之间。折算后的钢轨基础弹性系数 A 略高于 B、C,而 D、E、F 的钢轨基础弹性系数高于 A、B、C。ONO 等给出了无轨道质量和有轨道质量时的轮轨系统固有频率,本文给出了不考虑轨枕质量和考虑轨枕质量的 P2 共振频率。ONO 等的计算结果表明,考虑轨道质量后轮轨系统共振频率有所下降。对于扣件较软而道床相对较硬的轨道(如 A 和 B),本文不考虑轨枕参振质量的结果与 ONO 等考虑轨

道质量的计算结果基本一致,而对于扣件较硬而道床相对较软的轨道结构而言(如 C~F),本文考虑轨枕参振质量的计算结果与 ONO 等考虑轨道质量的计算结果接近。因此,应用本文模型可以合理估算轮轨系统的 P2 共振频率,对于扣件刚度较软而道床刚度较硬的轨道系统, P2 共振主要以簧下质量和钢轨作为参振质量,而扣件刚度较硬而道床相对较软的轨道系统,簧下质量、钢轨和轨枕作为整体参振质量在轨道整体刚度上做同相振动。

表 4 与 ONO 等计算结果的比较 Hz

参数	轨道类型					
	A	B	C	D	E	F
$K_p / (\times 10^8 \text{ N/m}^2)$	1.014	-	-	1.690	2.366	3.041
$K / (\times 10^8 \text{ N/m}^2)$	14.829	6.103	4.763	-	-	-
$k / (\times 10^8 \text{ N/m}^2)$	0.949	0.87	0.836	1.247	1.581	1.856
ONO 等(轨道无质量)	61.5	59.7	57.3	65.1	73.4	77.6
ONO 等	59.6	57.5	52.8	57.8	65.2	67.4
本文(轨枕无质量)	59.20	57.4	56.6	65.2	70.7	74.7
本文	51.74	50.0	49.2	57.6	63.2	67.1

4.2 应用与试验验证

为验证本文模型,以某地铁行车振动试验结果为例进行分析。如图 9 所示,车辆簧下质量测点布置在轴箱上,轨道振动测点分别布置在钢轨、扣件、轨枕及道床上。

(a) 车辆振动测点

(b) 轨道振动测点

图 9 车辆和轨道测点布置

编组, 拖车簧下质量为 1 290 kg, 动车簧下质量为 1 540 kg。轨道测点位于曲线半径为 300 m 的普通短轨枕整体道床轨道, 钢轨单位长度质量为 60 kg, 轨枕间距为 0.6 m, 曲线超高为 120 mm。

对测点所在曲线的钢轨波磨不平顺测试表明, 曲线内侧轨道上具有波长为 160 mm 左右波深为 0.1~0.2 mm 的钢轨波磨, 外侧钢轨无明显波磨, 内外轨波磨频谱特性如图 10 所示。

图 10 轨道测点附近钢轨波磨

图 11 所示分别为轴箱和轨道部件的振动加速度幅频曲线。轴箱垂向振动加速度在 500 Hz 以内的

(a) 轴箱振动加速度频谱

(b) 轨道部件振动加速度连接频率

图 11 车辆轨道振动频谱特性

主频为 72~80 Hz, 其他轴箱振动加速度频率范围类似, 动车和拖车的振动加速度主频无明显差异。轨道振动测试结果表明, 曲线内外侧钢轨、扣件及轨枕的垂向振动加速度在 500 Hz 以内的振动主频均为 78 Hz, 同时在其 2 倍和 3 倍频位置也有较明显的振动峰值。

现场的轨道刚度难以通过试验方法获取, 这里通过轨道结构的自振特性来识别轨道的刚度。为获取轨道结构的模态特性, 对测点附近的钢轨进行了垂、横向的力锤敲击试验, 如图 12 所示。

图 12 轨道结构的力锤敲击

测点位置处钢轨的垂向频响特性如图 13 所示, 轨道系统的低阶振动主频为 271 Hz, 且轨枕上方和跨中上方的轨道振动主频无明显差异, 两位置处轨道振动的差异主要体现在 1 138 Hz, 为轨枕支撑约束下钢轨的 Pin-Pin 共振。从轨道结构的力锤敲击试验还可知, 使用小型力锤敲击钢轨所引起的轨道系统振动中, 轨枕并未参与振动。因此, 在轨道整体刚度的计算中, 可不考虑轨枕的参振质量, 反推得到钢轨基础弹性系数为

$$k = m_r (2\pi f_1)^2 \quad (20)$$

式中, f_1 为轨道结构的振动基频。

图 13 普通短轨枕整体道床钢轨的频响曲线

不计轨枕参与质量, 取 $m_r = 60 \text{ kg/m}$, $f_1 = 271$

Hz, 根据式(20)计算得到的钢轨基础弹性系数 k 为 $1.739\ 6 \times 10^8\ \text{N/m}^2$ 。从图 11b 中可知, 在车辆通过时钢轨的第 1 振动主频也是轨枕的振动主频, 因此, 在分析车辆轨道系统的 P2 共振时需要考虑轨枕的参振质量。若取 $m_r = 120\ \text{kg/m}$, $k = 1.739\ 6 \times 10^8\ \text{N/m}^2$, 根据本文理论计算得到试验列车中拖车和动车簧下质量与轨道系统导纳曲线如图 14 所示, P2 共振频率分别为 80.95 Hz 和 74.81 Hz, 与试验测试结果一致。由图 11 还可知, 由于列车中不同簧下质量的动车和拖车组合编组, 实际的 P2 共振能量集中在动车、拖车与轨道系统共振频率形成的频带内。

图 14 动车和拖车簧下质量与轨道系统的 P2 共振特性

5 结论

(1) 本文通过将车辆簧下质量和轨道系统 P2 共振转化为簧下质量和轨道系统的第 1 阶固有振动, 给出了系统的频率方程和振型函数。模型参数分析结果表明, 当轨道长于 6.25 m, 时轨道长度对 P2 共振频率的影响可忽略不计, 当轨道长于 25 m 时, 系统第 2 阶固有频率差别不大。随着接触刚度增大, P2 共振频率略有提高, 系统第 2 阶固有频率变化不大。

(2) 考虑簧下质量作用后, 车辆轨道系统的 P2 共振频率明显低于轨道系统的第 1 阶自振频率; 当忽略轨道质量时, P2 的振动行为呈现 1 自由度振系特征。随着轨道参振质量的增大, P2 共振频率略有下降, 第 2 阶固有频率下降显著。钢轨垂向抗弯刚度增大使得 P2 共振频率略有增大。

(3) P2 共振频率随簧下质量的增大而减小, 随钢轨基础弹性系数的增大而增大。车辆行驶速度对 P2 共振频率影响不显著。对于扣件刚度较软而道床刚度较硬的轨道系统, P2 共振主要以簧下质量和钢轨作为参振质量, 而扣件刚度较硬而道床相对较软的轨道系统, 簧下质量、钢轨和轨枕作为整体参振质量在轨道整体刚度上做同相振动。

(4) 本文理论计算得到的车辆轨道系统的 P2 共振频率和现场试验一致。研究结果对车辆和轨道系统的设计和匹配优化均具有指导意义和参考价值。

参 考 文 献

- [1] JENKINS H H, STEPHENSON J E, CLAYTON G A, et al. The effect of track and vehicle parameters on wheel/rail vertical dynamic forces[J]. *Railway Engineering Journal*, 1974, 3(1): 2-16.
- [2] RADFORD R W. Wheel/rail vertical forces in high-speed railway operation[J]. *Journal of Engineering for Industry*, 1977, 99 (4): 849-858.
- [3] 许实儒, 徐维杰, 仲延禧. 钢轨接头处轮轨冲击力的模拟分析[J]. *铁道学报*, 1989(S1): 99-109.
XU Shiru, XU Weijie, ZHONG Yanxi. A simulation analysis of wheel/rail impact force at the rail joint[J]. *Journal of China Railway Society*, 1989(S1): 99-109.
- [4] GRASSIE S L, KALOUSEK J. Rail corrugation: characteristics, causes and treatments[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 1993, 207(1): 57-68.
- [5] KNOTHE K L, GRASSIE S L. Modelling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies[J]. *Vehicle System Dynamics*, 1993, 22(3-4): 209-262.
- [6] NIELSEN J C O, LUNDÉN R, JOHANSSON A, et al. Train-track interaction and mechanisms of irregular wear on wheel and rail surfaces[J]. *Vehicle System Dynamics*, 2003, 40(1-3): 3-54.
- [7] POPP K, KRUSE H, KAISER I. Vehicle-track dynamics in the mid-frequency range[J]. *Vehicle System Dynamics*, 1999, 31(5-6): 423-464.
- [8] JIN X, WU L, FANG J, et al. An investigation into the mechanism of the polygonal wear of metro train wheels and its effect on the dynamic behaviour of a wheel/rail system[J]. *Vehicle System Dynamics*, 2012, 50(12): 1817-1834.
- [9] DIANA G, CHELI F, BRUNI S, et al. Dynamic interaction between rail vehicles and track for high speed train[J]. *Vehicle System Dynamics*, 1995, 24(1): 15-30.
- [10] TAO G, WANG L, WEN Z, et al. Experimental investigation into the mechanism of the polygonal wear of electric locomotive wheels[J]. *Vehicle System Dynamics*, 2018, 56(6): 883-899.
- [11] PATIL S P. Response of infinite railroad track to vibrating mass[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1988, 114(4): 688-703.
- [12] GRASSIE S L, GREGORY R W, HARRISON D, et al.

- The dynamic response of railway track to high frequency vertical excitation[J]. Journal of Mechanical Engineering Science, 1982, 24(2): 77-90.
- [13] CLARK R A, DEAN P A, ELKINS J A, et al. An investigation into the dynamic effects of railway vehicles running on corrugated rails[J]. Journal of Mechanical Engineering Science, 1982, 24(2): 65-76.
- [14] ONO K, YAMADA M. Analysis of railway track vibration[J]. Journal of Sound and Vibration, 1989, 130(2): 269-297.
- [15] MÜLLER S, KRZYŻYŃSKI T, ILIAS H. Comparison of semi-analytical methods of analysing periodic structures under a moving load[J]. Vehicle System Dynamics, 1995, 24(s1): 325-339.
- [16] 李成辉, 万复光. 高速铁路轨道位移波分析[J]. 铁道学报, 1993, 15(2): 76-79.
LI Chenghui, WAN Fuguang. An analysis of the track deformation wave of high speed railway[J]. Journal of China Railway Society, 1993, 15(2): 76-79.
- [17] ZHAI W M, SUN X, A detailed model for investigating vertical interactions between railway vehicle and track[J]. Vehicle System Dynamics, 1994, 23(s1): 603-615.
- [18] NIELSEN J C O, IGELAND A. Vertical dynamic interaction between train and track influence of wheel and track imperfections[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 187(5): 825-839.
- [19] 练松良, 刘富. 轨道刚度变化对轮轨冲击荷载的动力影响[J]. 同济大学学报, 2002, 30(4): 427-430.
LIAN Songliang, LIU Fu. Effect of track stiffness uneven on wheel/rail impact load[J]. Journal of Tongji University, 2002, 30(4): 427-430.
- [20] LEI X, NODA N A. Analyses of dynamic response of vehicle and track coupling system with random irregularity of track vertical profile[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 258(1): 147-165.
- [21] 娄平, 曾庆元. 车辆-轨道-桥梁系统竖向运动方程的建立[J]. 铁道学报, 2004, 26(5): 71-79.
LOU Ping, ZENG Qingyuan. Formulation of equations of vertical motion for vehicle-track-bridge system[J]. Journal of China Railway Society, 2004, 26(5): 71-79.
- [22] WU T X, THOMPSON D J. A double Timoshenko beam model for vertical vibration analysis of railway track at high frequencies[J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 224(2): 329-348.
- [23] SHENG X, XIAO X, ZHANG S. The time domain moving Green function of a railway track and its application to wheel-rail interactions[J]. Journal of Sound and Vibration, 2016, 377: 133-154.
- [24] 孙文静, 周劲松, 宫岛. 基于格林函数法的车辆-轨道垂向耦合系统随机振动分析[J]. 中国铁道科学, 2015, 36(1): 61-67.
SUN Wenjing, ZHOU Jinsong, GONG Dao. Analysis on random vibration of vehicle-track vertical coupling system with Green function method[J]. China Railway Science, 2015, 36(1): 61-67.
- [25] 孙宇, 翟婉明. 基于格林函数法的车辆-轨道垂向耦合动力学分析[J]. 工程力学, 2017, 34(3): 219-226.
SUN Yu, ZHAI Wanming. Analysis of the vehicle-track vertical coupled dynamics based on the Green's function method[J]. Engineering Mechanics, 2017, 34(3): 219-226.
- [26] 李霞, 李伟, 温泽峰, 等. 普通短轨枕轨道结构钢轨波磨初步研究[J]. 机械工程学报, 2013, 49(2): 109-115.
LI Xia, LI Wei, WEN Zefeng, et al. Preliminary study on the rail corrugation of the fixed-dual short sleepers track[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(2): 109-115.
- [27] 李霞, 李伟, 申莹莹, 等. 基于轨道振动理论的梯形轨枕轨道钢轨波磨研究[J]. 机械工程学报, 2016, 52(22): 121-128.
LI Xia, LI Wei, SHEN Yingying, et al. Study on the rail corrugation of the ladder-type sleepers track based on the track vibration theory[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(22): 121-128.
- [28] 赵国堂. 铁路轨道刚度的确定方法[J]. 中国铁道科学, 2005, 26(1): 1-6.
ZHAO Guotang. Method for determining the rigidity of railway track[J]. China Railway Science, 2005, 26(1): 1-6.
- [29] 童大堤. 铁路轨道[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1995.
TONG Daxun. Railroad track[M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1995.
- [30] 翟婉明. 车辆-轨道耦合动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2015.
ZHAI Wanming. Vehicle-track coupled dynamics[M]. Beijing: Science Press, 2015.

作者简介: 关庆华(通信作者), 男, 1981 年出生, 博士, 讲师。主要研究方向为车辆轨道动力学与轮轨关系。

E-mail: guan_qh@163.com

周业明, 男, 1970 年出生, 教授级高级工程师, 主任设计师。主要研究方向为城市轨道交通车辆转向架设计。