DOI: 10.3901/JME.2015.21.065

摩擦引起的模态耦合不稳定性分析*

张立军^{1,2} 吴 军^{1,2} 孟德建^{1,2}

(1. 同济大学汽车学院 上海 201804;
2. 同济大学新能源汽车工程中心 上海 201804)

摘要: 模态耦合是摩擦系统振动不稳定性的重要机理之一, 它会受到系统摩擦副的结构阻抗特性和摩擦接触特性的显著影响。针对一类由一个摩擦副部件的不同方向模态导致耦合不稳定性的现象, 建立2自由度摩擦振动动力学模型, 推导在摩擦副部件机械阻抗特性相差极大的条件下, 系统摩擦耦合模态不稳定性及其对摩擦力方向的依赖性, 以及研究了不稳定区域对摩擦副结构和摩擦接触特性参数的敏感性; 同时, 也分析摩擦副部件的自身约束模态频率和系统接触模态频率对系统摩擦耦合模态区域和频率的影响。这为指导以避免模态耦合的摩擦振动系统的结构参数和摩擦接触参数匹配, 以及识别摩擦振动不稳定的摩擦副模态来源提供了理论依据。

关键词: 摩擦振动; 模态耦合; 不稳定性; 方向依赖性; 参数敏感性

中图分类号: U463

Analysis of Friction Induced Mode Coupling Instability

ZHANG Lijun^{1,2} WU Jun^{1,2} MENG Dejian^{1,2}

(1. School of Automotive Engineering, Tongji University, Shanghai 201804;
2. New Clean Energy Automotive Engineering Center, Tongji University, Shanghai 201804)

Abstract: Mode coupling is one of the important mechanisms of instability of friction vibration system, which will be significantly affected by structure impedance characteristic and the contact characteristic of the system friction pairs. A 2-DOF vibrational dynamic model is established for the phenomenon that the different directional modes of a friction pair lead to instability to deduce mode coupling instability and its dependence on the direction of friction force when friction pair components vary greatly in mechanical impedance properties and to study the sensitivity of the unstable areas to the friction pair structure and friction contact parameters. At the same time, the relationship among the constraint mode, the contact mode and the coupling mode of the friction components is analyzed as a guide to match the structure parameters and the friction contact parameters of the vibration system to avoid mode coupling as well as a theoretical basis to identify the source of friction pair mode resulting in the instability of the friction-induced vibration.

Key words: friction-induced vibration; mode coupling; instability; direction dependence; parameter sensitivity

0 前言

摩擦振动和噪声在机械系统中广泛存在, 例如制动器、离合器和列车轮轨间会产生的各种摩擦振动和噪声现象^[1-2]。一般来说, 摩擦振动和噪声都是有害的。但是, 迄今人们尚少有对其发生机理取得共识, 亦未形成完全行之有效的控制方法。因此, 摩擦振动和噪声的研究一直备受关注, 是机械学科

的前沿热点问题^[1-4]。

在诸多摩擦振动和噪声发生机理理论中, 模态耦合能够解释许多摩擦噪声现象, 且便于利用有限元软件进行面向对象的预测与分析, 应用和影响广泛^[1-4]。所谓模态耦合理论就是将摩擦力引入多自由度系统, 使系统刚度矩阵出现不对称项, 进而产生运动不稳定性^[5]。已经开展的研究重点考察分析各种因素的影响, 包括摩擦参数^[5-6]、结构阻尼^[7]、哥氏力^[8]以及摩擦副结构形式^[9-10]等。但是, 由于没有从理论上进一步探究模态耦合的内在规律, 对于往复运动仅在一个方向存在摩擦尖叫^[11], 制动器尖

* 国家自然科学基金资助项目(51175380)。20141103 收到初稿, 20150729 收到修改稿

叫存在制动盘面外模态与制动块弯曲模态耦合^[12-14]、制动盘面内模态与面外模态的耦合^[15-16]等多种模态耦合形式等问题还不能给出合理的解释。

笔者认为,对于任一摩擦系统,摩擦副本身的结构阻抗特性,以及摩擦界面的摩擦接触特性必然对模态耦合不稳定性具有决定性影响。如果通过建立简化的机理模型,深入探讨模态耦合的内在规律,不仅有助于完善模态耦合的理论体系,而且有助于深化模态耦合理论在合理匹配摩擦系统结构参数与摩擦接触参数,避免或者抑制摩擦噪声,或者识别摩擦耦合不稳定性的关键因素来源,确定主要修改对象,具有重要的工程价值。

为此,本文针对一类集总参数柔体-刚体摩擦副构成的摩擦振动系统,建立了单质量 2 自由度动力学模型,通过数学推导和数值计算,提出了模态耦合不稳定性对摩擦力方向的依赖性,分析了模态耦合不稳定区域对摩擦副结构参数和摩擦接触参数的敏感性,同时也特别考察了摩擦副结构模态、系统接触模态和系统摩擦耦合模态三者之间的关系。

1 摩擦系统的模态耦合不稳定性

1.1 摩擦振动模型

本文借鉴文献[6],针对一类典型的,由集总参数柔体和刚体摩擦副构成的摩擦振动系统,建立了单质量 2 自由度振动模型,如图 1 所示。

图 1 二自由度模型

图 1 中,集总参数柔体由具有 x 和 y 两个自由度的质点质量 m , 与 x 轴成 α_1 ($\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \pi$) 和 α_2 ($0 < \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$) 角度的弹簧 k_1 和 k_2 构成。

质点质量 m 的两个自由度描述了集总参数柔体在两个正交方向上的弹性运动,对应于盘式制动器制动盘的面内模态运动与面外模态^[15-16],或者盘-销系统销棒的弯曲运动与压缩运动^[17]。两个摩擦副之间存在摩擦时,会由于摩擦力作用导致摩擦副位置倾斜,因此两个角度 α_1 和 α_2 表示摩擦接触时集总参数柔体的微倾斜平衡位置,而弹簧 k_1 和 k_2 用来

描述柔体在不同方向的支撑刚度。

柔体和刚体之间为单点接触,法向接触刚度为 k_3 , 且二者之间存在的恒定名义相对速度为 v , 摩擦因数为 μ 。为了保持系统始终处于摩擦接触状态,施加法向力 F_N 。

根据力学原理,容易建立系统的动力学方程为

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{式中} \quad k_{11} &= k_1 \cos^2 \alpha_1 + k_2 \cos^2 \alpha_2; \\ k_{12} &= k_{21} = k_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + k_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2; \\ k_{22} &= k_1 \sin^2 \alpha_1 + k_2 \sin^2 \alpha_2 + k_3; \\ F_F &= \mu k_3 (y_p - y); \\ y_p &\text{——平衡位置下 } k_3 \text{ 的压缩量。} \end{aligned}$$

定义时间尺度 $T = \sqrt{m/k_1}$, 长度尺度 $l = vT$, 并令 $t_1 = Tt$, $x_1 = lx$, $y_1 = ly$; 同时,定义刚度比 $\kappa_1 = \frac{k_2}{k_1}$, $\kappa_2 = \frac{k_3}{k_1}$, $k_1 = m\omega_1^2$ 。若令 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, 则可以得到式(1)的量纲一方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (2)$$

$$\text{式中} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &= \cos^2 \alpha_1 + \kappa_1 \cos^2 \alpha_2; \\ \kappa_{12} &= \kappa_{21} = \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + \kappa_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2; \\ \kappa_{22} &= \sin^2 \alpha_1 + \kappa_1 \sin^2 \alpha_2 + \kappa_2; \\ \mathbf{F} &= \begin{pmatrix} -f \\ 0 \end{pmatrix}; \\ f &= \mu \kappa_2 (y_0 - y_1); \\ y_0 &= \frac{y_p \omega_1}{v}. \end{aligned}$$

把方程式(2)进一步转化为

$$\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{T} \quad (3)$$

$$\text{式中, } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} - \mu \kappa_2 \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} -\mu \kappa_2 y_0 \\ 0 \end{pmatrix}。$$

1.2 模态耦合条件与不稳定模态频率

考虑式(3)的齐次方程,令 $\mathbf{X} = \mathbf{V} \exp(i\Omega t)$, 可得特征方程为

$$\begin{vmatrix} \kappa_{11} + \Omega^2 & \kappa_{12} - \mu \kappa_2 \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} + \Omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

特征值为

$$\begin{aligned} \Omega_{1,2}^2 &= -\frac{1}{2}(1 + \kappa_1 + \kappa_2) \pm \\ &\frac{1}{2} \left\{ 1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\kappa_1 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) - 2\kappa_2 \cos 2\alpha_1 - \right. \end{aligned}$$

$$2\kappa_1\kappa_2 \cos 2\alpha_2 - 2\mu[\kappa_2 \sin 2\alpha_1 + \kappa_1\kappa_2 \sin 2\alpha_2]\}^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

定义 $\Delta = 1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\kappa_1 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) - 2\kappa_2 \cos 2\alpha_1 - 2\kappa_1\kappa_2 \cos 2\alpha_2 - 2\mu[\kappa_2 \sin 2\alpha_1 + \kappa_1\kappa_2 \sin 2\alpha_2]$, 可以根据 Ω_1 和 Ω_2 的不同情况进行稳定性讨论。

(1) 当 $\Delta > 0$ 时, Ω_1 和 Ω_2 都是一对共轭的纯虚数, 但不相同, 系统稳定。

(2) 当 $\Delta = 0$ 时, Ω_1 和 Ω_2 都是一对共轭的纯虚数, 且相同, 系统不稳定。

(3) 当 $\Delta < 0$ 时, Ω_1 和 Ω_2 都是一对共轭的复数, 系统不稳定。

综上, 当系统的结构参数和摩擦接触参数满足式(6)时系统将可能产生模态耦合, 导致不稳定

$$1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\kappa_1 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) - 2\kappa_2 \cos 2\alpha_1 - 2\kappa_1\kappa_2 \cos 2\alpha_2 - 2\mu[\kappa_2 \sin 2\alpha_1 + \kappa_1\kappa_2 \sin 2\alpha_2] < 0 \quad (6)$$

由于

$$1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\kappa_1 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) - 2\kappa_2 \cos 2\alpha_1 - 2\kappa_1\kappa_2 \cos 2\alpha_2 \geq 0$$

因此, 当 $\sin(2\alpha_1) + \kappa_1 \sin(2\alpha_2) > 0$, 且

$$\mu > (1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\kappa_1 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) - 2\kappa_2 \cos 2\alpha_1 - 2\kappa_1\kappa_2 \cos 2\alpha_2) / (2\kappa_2 \sin 2\alpha_1 + 2\kappa_1\kappa_2 \sin 2\alpha_2)$$

时, 系统发生模态耦合。

若将刚度比代入式(5), 可得

$$\begin{aligned} \Omega_{1,2}^2 = & -(k_1 + k_2 + k_3) \pm [k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + \\ & 2k_1k_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) - \\ & 2k_1k_3 \cos 2\alpha_1 - 2k_2k_3 \cos 2\alpha_2 - \\ & 2\mu k_3(k_2 \sin 2\alpha_2 + k_1 \sin 2\alpha_1)]^{\frac{1}{2}} / 2k_1 \end{aligned} \quad (7)$$

显然, 系统的不稳定模态频率是结构参数(α_1 , α_2 , k_1 和 k_2)和摩擦接触参数(k_3 和 μ)的函数。

1.3 模态耦合对摩擦力方向的依赖性

若摩擦力方向反向, 则系统的模态耦合条件变为

$$1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\kappa_1 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) - 2\kappa_2 \cos 2\alpha_1 - 2\kappa_1\kappa_2 \cos 2\alpha_2 + 2\mu[\kappa_2 \sin 2\alpha_1 + \kappa_1\kappa_2 \sin 2\alpha_2] < 0 \quad (8)$$

因为 $1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\kappa_1 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) - 2\kappa_2 \cos 2\alpha_1 - 2\kappa_1\kappa_2 \cos 2\alpha_2 \geq 0$, 故当 $\sin(2\alpha_1) + \kappa_1 \sin(2\alpha_2) < 0$, 且

$$\begin{aligned} \mu > & -[1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\kappa_1 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) - \\ & 2\kappa_2 \cos 2\alpha_1 - 2\kappa_1\kappa_2 \cos 2\alpha_2] / \\ & (2\kappa_2 \sin 2\alpha_1 + 2\kappa_1\kappa_2 \sin 2\alpha_2) \end{aligned}$$

时, 系统产生模态耦合。

2 模态耦合不稳定区域的参数依赖性

2.1 对结构参数的依赖性

(1) k_1 和 k_2 的影响。取 $\mu = 0.6$, $\alpha_1 = 130^\circ$, $\alpha_2 = 50^\circ$, $m = 1 \text{ kg}$, $k_3 = 1 \text{ N/m}$, 确定系统的不稳定区域以及系统的模态频率随刚度参数 k_1 和 k_2 的变化规律如图 2 所示。由图 2 可知: ① 通过合理选择刚度 k_1 和 k_2 , 可以避开椭圆形的模态耦合不稳定区域(图 2a); ② 模态频率随着刚度 k_1 和 k_2 的增大逐步增大; 在模态耦合区域, 系统只有 1 个模态耦合频率, 而在非模态耦合区, 系统存在 2 个模态频率(图 2b)。

(a) 模态耦合区

(b) 模态频率

图 2 系统模态耦合区域及模态频率与结构刚度参数的关系

(2) α_1 和 α_2 的影响。取 $\mu = 0.6$, $m = 1 \text{ kg}$, $k_1 = 3 \text{ N/m}$, $k_2 = 3 \text{ N/m}$, $k_3 = 1 \text{ N/m}$, 可以确定系统的不稳定区域以及系统的模态频率随 α_1 和 α_2 的变化规律如图 3 所示。由图 3 可知: ① 通过合理选择刚度 α_1 和 α_2 , 可以避开近似椭圆形的模态耦合不稳定区域(图 3a); ② 在模态耦合区域, 系统只有 1 个模态耦合频率, 而在非模态耦合区, 系统存在 2 个模态频率(图 3b)。

2.2 对接触参数的依赖性

(1) μ 和 k_3 的影响。取 $\alpha_1 = 130^\circ$, $\alpha_2 = 50^\circ$, $m = 1 \text{ kg}$, $k_1 = 15 \text{ N/m}$, $k_2 = 15 \text{ N/m}$, 可以确定系统的不稳定区域以及系统的模态频率随 μ 和 k_3 的

图3 系统模态耦合区域及模态频率与结构角度参数的关系

变化规律如图 4 所示。由图 4 可知：① 通过合理选择刚度 μ 和 k_3 ，可以避开近似半椭圆形的模态耦合不稳定区域(图 4a)；② 在模态耦合区域，系统只有 1 个模态耦合频率，而在非模态耦合区，系统有 2 个模态频率(图 4b)。

图4 系统模态耦合区域及模态频率与摩擦接触参数的关系

3 系统摩擦耦合模态、系统接触模态与部件约束模态间的关系

前期研究者会在试验分析时考察摩擦副部件的结构模态与系统的不稳定摩擦尖叫模态(包括频率和瞬态变形模式)之间的关系,或者在摩擦副之间存在接触但没有产生相对运动的条件下测量系统的模态特性,期望获得其与系统摩擦不稳定模态之间的关系。但是,尚没有从理论上探讨以上三者之间的联系。为此,本文对此领域探讨模态耦合的内在规律,分析前期研究方法是否合理,并对未来工作提供依据。

3.1 三种模态之间的联系

图 5 所示为对应于图 1 摩擦系统的摩擦副部件 2 自由度振动模型和接触系统 2 自由度模型,分别用于描述前文提及的摩擦副模态特性和接触系统的模态特性。

图5 摩擦副与接触系统动力学模型

摩擦副 2 自由度振动系统的无量纲化的动力学方程为

$$\mathbf{M}'\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}'\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (9)$$

$$\text{式中 } \mathbf{M}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{K}' = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} - \kappa_2 \end{pmatrix};$$

$$\kappa_{11} = \cos^2 \alpha_1 + \kappa_1 \cos^2 \alpha_2;$$

$$\kappa_{12} = \kappa_{21} = \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + \kappa_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2;$$

$$\kappa_{22} = \sin^2 \alpha_1 + \kappa_1 \sin^2 \alpha_2 + \kappa_2。$$

特征值为

$$\Omega_{1,2}'^2 = \frac{1}{2} \cdot \left[(1 + \kappa_1) \pm \sqrt{1 + \kappa_1^2 + 2\kappa_1 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2)} \right]$$

(10)

接触系统 2 自由度振动系统的归一化的动力学方程为

$$\mathbf{M}''\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}''\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (11)$$

$$\text{式中 } \mathbf{M}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{K}'' = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \end{pmatrix};$$

$$\kappa_{11} = \cos^2 \alpha_1 + \kappa_1 \cos^2 \alpha_2;$$

$$\kappa_{12} = \kappa_{21} = \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + \kappa_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2;$$

$$\kappa_{22} = \sin^2 \alpha_1 + \kappa_1 \sin^2 \alpha_2 + \kappa_2.$$

特征值为

$$\Omega_{1,2}''^2 = \frac{1}{2} \left[(1 + \kappa_1 + \kappa_2) \pm \sqrt{(1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\kappa_1 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) - 2\kappa_2 \cos(2\alpha_1) - 2\kappa_1 \kappa_2 \cos(2\alpha_2))^2} \right] \quad (12)$$

根据摩擦系统的模态耦合条件, 要产生模态耦合, 摩擦副的面内模态和面外模态频率要满足的条件为

$$-\kappa_2 (\kappa_2 - 2\cos 2\alpha_1 - 2\kappa_1 \cos 2\alpha_2) \leq (\Omega_1''^2 - \Omega_2''^2)^2 < 2\mu\kappa_2 (\sin 2\alpha_1 + \kappa_1 \sin 2\alpha_2) - \kappa_2 (\kappa_2 - 2\cos 2\alpha_1 - 2\kappa_1 \cos 2\alpha_2) \quad (13-1)$$

$$\sin(2\alpha_1) + \kappa_1 \sin(2\alpha_2) > 0 \quad (13-2)$$

类似的, 可以确定要产生模态耦合, 接触系统的面内模态和面外模态频率要满足的条件为

$$0 \leq (\Omega_1''^2 - \Omega_2''^2)^2 < 2\mu\kappa_2 (\sin 2\alpha_1 + \kappa_1 \sin 2\alpha_2) \quad (14-1)$$

$$\sin(2\alpha_1) + \kappa_1 \sin(2\alpha_2) > 0 \quad (14-2)$$

由以上分析可得, 要产生模态耦合, 接触系统的面内模态与面外模态频率必须满足式(14), 即只有面内模态与面外模态频率足够接近, 且摩擦因数

$$\mu > \frac{(\Omega_1''^2 - \Omega_2''^2)^2}{2\kappa_2 (\sin 2\alpha_1 + \kappa_1 \sin 2\alpha_2)}, \text{ 才有可能发生模态耦合;}$$

但是, 即使系统接触模态的面内模态与面外模态频率满足式(14), 但不一定满足 $\sin(2\alpha_1) + \kappa_1 \sin(2\alpha_2) > 0$, 故不一定产生模态耦合。

3.2 接触系统模态频率 Ω_1'' 和 Ω_2'' 与模态耦合区域的关系

(1) 接触系统模态频率 Ω_1'' 和 Ω_2'' 与模态耦合区域的关系。定义 $\kappa_1 \in (0, 5)$, $\kappa_2 \in (0, 5)$, $\alpha_1 \in (90^\circ, 180^\circ)$, $\alpha_2 \in (0^\circ, 90^\circ)$, $\mu \in (0, 1)$ 并取 20 000 个随机数, 计算接触系统的模态频率 Ω_1'' 和 Ω_2'' 以及不同摩擦力方向时摩擦系统的不稳定模态耦合区域和非模态耦合区域, 绘制关系图分别如图 6a 和图 6b 所示。

(a) 摩擦力正向时的模态耦合与非耦合区

(b) 摩擦力反向时的模态耦合与非耦合区

图 6 Ω_1'' 和 Ω_2'' 与模态耦合区的关系

由图 6 分析可知: ① 由式(12)决定, 无论是模态耦合区还是非模态耦合区, 所有的可能点都分布在 $\Omega_1'' \geq 1$ (边界 ①), $\Omega_2'' \geq 0$ (边界 ②) 和 $\Omega_1''/\Omega_2'' \geq 1$ (边界 ③) 决定的三条直线, 以及 $\Omega_2''^2 + \Omega_2''^2 = (1 + \kappa_1 + \kappa_2) \leq (1 + \kappa_{1\max} + \kappa_{2\max})$ (边界 ④) 决定的弧线为边界围成的区域内; ② 对于模态耦合区, 还存在由不等式(14-1)决定的下限(边界 ⑤)。显然, 接触系统模态频率接近是实现模态耦合的必要条件, 但不是充分条件, 还与摩擦力方向有关。

(2) μ 对 Ω_1'' 和 Ω_2'' 与模态耦合区关系的影响。定义 $\kappa_1 \in (0, 5)$, $\kappa_2 \in (0, 5)$, $\alpha_1 \in (90^\circ, 180^\circ)$, $\alpha_2 \in (0^\circ, 90^\circ)$ 并取 20 000 个随机数, 分别在摩擦因数为 0.3、0.6 和 0.9 的条件下, 计算接触系统的模态频率 Ω_1'' 和 Ω_2'' 以及摩擦系统的不稳定模态耦合区域, 绘制关系图如图 7 所示。由图 7 分析可知: 摩擦因数增大, 不稳定模态耦合区变大, 说明摩擦因数越大越容易产生模态耦合; 摩擦因数越小, 不稳定模态耦合区域越接近对角线, 说明在小摩擦因数时, 要实现模态耦合要求接触系统的 2 个模态频率要尽可能地接近。

图7 摩擦因数对 Ω_1'' 和 Ω_2'' 与模态耦合区关系的影响

(3) 刚度比 κ_1 和 κ_2 对 Ω_1'' 和 Ω_2'' 与模态耦合区关系的影响。定义 $\alpha_1 \in (90^\circ, 180^\circ)$, $\alpha_2 \in (0^\circ, 90^\circ)$ 和 $\mu \in (0, 1)$ 并取 20 000 个随机数, 分别在不同的 κ_1 和 κ_2 水平下进行计算, 结果分别如图 8a~8c 所示。由图 8 可知: 随着 κ_1 的增大, 由于 Ω_1'' 和 Ω_2'' 随之增大, 因此模态耦合区域距离原点的距离越来越远;

图8 刚度比对 Ω_1'' 和 Ω_2'' 与模态耦合区关系的影响

不同水平 κ_1 下的模态耦合区域仍然满足图 6 对应的边界限制, 只是不同刚度比水平下的点对应的区域不同。由图 8d~8f 可知, κ_2 的影响与 κ_1 类似。

(4) 角度 α_1 和 α_2 对 Ω_1'' 和 Ω_2'' 与模态耦合区关系的影响。定义 $\kappa_1 \in (0, 5)$, $\kappa_2 \in (0, 5)$ 和 $\mu \in (0, 1)$ 并取 20 000 个随机数, 分别在不同 α_1 和 α_2 水平下进行计算, 结果如图 9 所示。由图 9 可知: 个别 α_2 , 比如 $\alpha_2=50^\circ$ 时, 模态耦合区域远远偏离对角线, 而非常接近边界⑤的下限; 改变 α_1 , 模态耦合区变化不大, 如 $\alpha_1=110^\circ$ 时, 模态耦合区与图 7 接近, 说明 α_1 对 Ω_1'' 和 Ω_2'' 与模态耦合区关系的影响较小。

图9 角度对 Ω_1'' 和 Ω_2'' 与模态耦合区关系的影响

3.3 部件约束模态频率 Ω_1' 和 Ω_2' 与模态耦合的关系

定义 $\kappa_1 \in (0, 5)$, $\kappa_2 \in (0, 5)$, $\alpha_1 \in (90^\circ, 180^\circ)$, $\alpha_2 \in (0^\circ, 90^\circ)$, $\mu \in (0, 1)$ 并取 20 000 个随机数, 计算摩擦副部件的模态频率 Ω_1' 和 Ω_2' 以及摩擦系统的不稳定模态耦合区域和稳定非模态耦合区域, 绘制关系图如图 10 所示。由图 10 分析可知: 模态耦

(a) 摩擦力正向时的模态耦合与非耦合区

(b) 摩擦力反向时的模态耦合与非耦合区

图10 Ω_1' 和 Ω_2' 与模态耦合区关系

合区域类似一个长方形, 根据式(10)可知, 可证, 区域的边界分别由 $\Omega_1' \geq 1$, $0 < \Omega_2' \leq 1$ 和 $\Omega_1'^2 + \Omega_2'^2 = 1 + \kappa_1 \leq 1 + \kappa_{1\max}$ 决定。显然, 由于 $\Omega_1' \geq 1$ 且 $0 < \Omega_2' \leq 1$, 模态耦合区与 Ω_1' 和 Ω_2' 的接近程度没有任何必然关系。

3.4 接触系统模态频率 Ω_1'' 和 Ω_2'' 与模态耦合频率的关系

定义 $\kappa_1 \in (0, 5)$, $\kappa_2 \in (0, 5)$, $\alpha_1 \in (90^\circ, 180^\circ)$, $\alpha_2 \in (0^\circ, 90^\circ)$, $\mu \in (0, 1)$ 并取 40 000 个随机数, 计算接触系统模态频率 Ω_1'' 和 Ω_2'' 与两个摩擦力方向下的模态耦合频率 ω , 绘制关系图如图 11 所示。由图 11 可知: ① 不稳定模态耦合频率总是介于接触系统的两个模态频率之间, 即 $\Omega_2'' < \omega < \Omega_1''$; ② 三个模态频率总体上比较接近, 但是不稳定模态频率与较大的接触系统模态频率更加接近, 即 ω 和 Ω_1'' 更接近。

图 11 Ω_1'' 和 Ω_2'' 与模态耦合频率的关系

3.5 部件约束模态频率 Ω_1' 和 Ω_2' 与模态耦合频率的关系

定义 $\kappa_1 \in (0, 5)$, $\kappa_2 \in (0, 5)$, $\alpha_1 \in (90^\circ, 180^\circ)$, $\alpha_2 \in (0^\circ, 90^\circ)$, $\mu \in (0, 1)$ 并取 40 000 个随机数, 计算部件约束模态频率 Ω_1' 和 Ω_2' 与两个摩擦力方向下的模态耦合频率 ω , 绘制关系图如图 12 所示。由图 12 可知: 不稳定模态耦合频率 ω 与 Ω_1' 比较接近, 而与 Ω_2' 相差很大。

图 12 Ω_1' 和 Ω_2' 与模态耦合频率的关系

4 结论

(1) 系统摩擦耦合模态不稳定性具有摩擦力方向依赖性, 模态耦合取决于摩擦副结构参数(质量、刚度和角度)和摩擦接触参数(摩擦因数和接触刚度)共同决定的不等式组; 模态耦合不稳定区域对于摩擦副结构参数和摩擦接触特性参数具有不同的敏感性。

(2) 模态耦合不稳定只能发生在系统接触模态面内和面外模态频率足够接近的情况下; 但系统接触模态面内模态与面外模态频率足够接近只是产生模态耦合的必要条件, 而不是充分条件。

(3) 模态耦合不稳定区与摩擦副部件的模态频率的接近程度没有必然联系, 不能通过摩擦副结构模态频率接近与否判断系统是否容易产生模态耦合。

(4) 只有在特定摩擦力方向且系统接触模态的面内模态与面外模态频率充分接近才能发生模态耦合; 系统接触模态的面内模态与面外模态频率越接近, 系统摩擦耦合模态发生模态耦合所要求的摩擦因数越小。

(5) 模态耦合频率总是介于接触系统的两阶模态频率之间, 且与较高的模态频率更接近; 模态耦

合频率与摩擦副部件较大的模态频率很接近, 而与较小的模态频率相差很大。

参 考 文 献

- [1] AKAY A. Acoustics of friction[J]. Journal of Acoustical Society of America, 2002, 111 (4): 1525.
- [2] KINKAID N M, O'REILLY O M, PAPADOPOULOS P. Review of automotive disc brake squeal [J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 267 (1): 105-112.
- [3] 周仲荣, 雷源忠, 张嗣伟. 摩擦学发展前沿[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
ZHOU Zhongrong, LEI Yuanzhong, ZHANG Siwei. Frontier of tribology [M]. Beijing: Science Press, 2006.
- [4] 国家自然科学基金委员会工程与材料科学部. 机械工程学学科发展战略报告(2011-2020)[M]. 北京: 科学出版社, 2010.
Engineering and Materials Science Division of NSFC. Strategy report of mechanical engineering discipline development (2011-2020)[M]. Beijing: Science Press, 2010.
- [5] NORTH M R. Disc brake squeal [C]//IMEchE Conference on Braking of Road Vehicles, C38/76. England: London, 1976: 169-176.
- [6] HOFFMANN N, FISCHER M, ALLGAIER R, et al. A minimal model for studying properties of the mode-coupling type instability in friction induced oscillations [J], Mechanics Research Communications, 2002, 29(4): 197-205.
- [7] HOFFMANN N, GAUL L. Effects of damping on mode - coupling instability in friction induced oscillations [J]. ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2003, 83(8): 524-534.
- [8] WAGNER U V, SCHLAGNER S. On the origin of disk brake squeal [J]. International Journal of Vehicle Design, 2009, 51(1/2): 223-237.
- [9] RUSLI M, OKUMA M. Squeal noise prediction in dry contact sliding systems by means of experimental spatial matrix identification[J]. Journal of System Design and Dynamics, 2008, 2(2): 585-595.
- [10] OUYANG H J , MOTTERSHEAD J E. Optimal suppression of parametric vibration in discs under rotating frictional loads [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2001, 215(1): 65-75.
- [11] CHEN G X, ZHOU Z R, KAPSA P, et al. Experimental investigation into squeal under reciprocating sliding[J]. Tribology International, 2003, 36: 961-971.
- [12] FIELDHOUSE J D, NEWCOMB T P. The application of holographic interferometry to the study of disc brake noise[S]. SAE Paper: 930805.
- [13] FIELDHOUSE J D, NEWCOMB T P. Double pulsed holography used to investigate noisy brakes [J]. Optics and Lasers in Engineering, 1996, 25 (6): 455-463.
- [14] TALBOT C, FIELDHOUSE J D. Animations of a disc brake generating noise[S]. SAE Paper: 2001-01-3126.
- [15] CHEN F , CHEN S E , HARWOOD P. In-plane mode/friction process and their contribution to disc brake squeal at high frequency[S]. SAE Paper: 2000-01-2773.
- [16] CHEN F, CHERN J, SWAYZE J. Modal coupling and its effect on brake squeal [S]. SAE Paper: 2002-01-0922.
- [17] 张立军, 刁坤, 孟德建, 等. 盘-销系统摩擦尖叫的时变性: 发生机理与关键影响因素[J]. 机械工程学报, 2013, 49(14): 99-105.
ZHANG Lijun, DIAO Kun, MENG Dejian, et al. Time-varying characteristics of frictional squeal in pin-on-disc system: Generation mechanism and key impact factors[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(14): 99-105.

作者简介: 张立军, 男, 1972 年出生, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为汽车振动与噪声的分析与控制。

E-mail: tjedu_zhanglijun@tongji.edu.cn

吴军, 男, 1990 年出生, 硕士研究生。主要研究方向为汽车振动与噪声控制。

E-mail: 15000861487@163.com

孟德建(通信作者), 男, 1982 年出生, 博士。主要研究方向为车辆系统动力学、振动与噪声控制、车辆多物理场耦合动力学。

E-mail: mdj0218@163.com