DOI: 10.3901/JME.2021.03.107

单齿啮合的齿轮接触等几何分析*

陈 龙 郝婵娟 汪中厚 冯文斌 杨易明
(上海理工大学机械工程学院 上海 200093)

摘要: 齿轮应用极其广泛, 而齿面损坏是齿轮失效的主要形式, 因此齿轮接触分析是齿轮设计的重要手段, 最新发展的等几何分析(Isogeometric analysis, IGA)方法在解决接触仿真分析方面具有优良性能而受到青睐。将直齿圆柱齿轮简化为平面模型, 首先构建能用于 IGA 的多片拼接 NURBS 曲面参数化模型, 并比较了 IGA 模型与标准渐开线齿轮的几何误差; 然后推导了平面接触 IGA 的相关计算公式, 实现了一对单齿接触的完整齿轮等几何接触分析。为验证等几何接触分析算法的正确性, 一方面将计算结果与齿轮无摩擦赫兹接触分析的理论值进行计算精度对比, 另一方面将计算结果与商业软件计算结果进行对比。结果表明, IGA 方法在分析接触问题时具有计算效率高、速度快、应力场更加光滑等优势, 从而为解决齿轮接触分析问题提供一种有效的方法, 同时也为齿轮的建模仿真与优化一体化设计提供新的途径。

关键词: 齿轮接触分析; 等几何分析; 有限元分析; 赫兹接触分析

中图分类号: TG156

Isogeometric Analysis of Gear with Single Tooth Contact

CHEN Long HAO Chanjuan WANG Zhonghou FENG Wenbin YANG Yiming
(School of Mechanical Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093)

Abstract: The gear is an ancient transmission equipment and widely used in machine. Damage of tooth surface is the main form of gear failure. Therefore, gear contact analysis is an important means of gear design. The latest development of the isogeometric analysis (IGA) method draws some attention for its excellent performance in solving contact analysis. To cut down the difficulty, the spur gear is simplified into a planar model. Firstly, the planar gear model is built to be suitable for IGA by stitching multi patches of parametric NURBS surface, as well as the deviation between the model for IGA and the model presented by standard involute is discussed. Secondly, calculation formulas for planar contact analysis using IGA is derived. Then the calculation is applied on a pair of gears that are engagement. In order to verify the correctness of contact analysis by IGA, two comparative verification methods are given. One is comparing the analysis result from IGA with the theoretical calculation under the case of Hertz contact. The other is comparing the result from IGA with the result from the business CAE software. The comparison results show that IGA has the potential advantages of high calculation efficiency, fast speed, and smoother stress field when it is applied on contact problem. IGA not only provides a new method for contact analysis of gear, it but also offers a new path for the integration design of gear in the stage of modelling, simulation and optimization.

Key words: gear contact analysis; isogeometric analysis; finite element analysis; Hertz contact analysis

0 前言

接触问题在日常生活中无所不在, 尤其是在运动部件中, 如: 轮胎与地面的接触、发动机活塞和

气缸的接触、齿轮齿面接触。这些接触问题不仅关系到所设计出的产品寿命及功能是否满足需求, 甚至有可能会危害生命财产安全。

关于接触问题, 1881 年由 Hertz 首先用数学弹性力学方法推导出接触问题的计算公式, 该公式在解决形状简单、接触面光滑规整的情况下才能成立^[1]。传统有限元法采用的计算网格模型是使用拉格朗日边界来拟合原始模型边界, 而拉格朗日边界是

* 国家自然科学基金资助项目(52075340, 51875360)。20200316 收到初稿, 20201011 收到修改稿

C^0 连续,不能准确地描述复杂曲面,尤其在描述曲率较大的曲面时与原始模型误差较大,进而导致接触力计算误差的增大。另外,采用商业软件如 ANSYS 或 Abaqus 来进行接触分析也是当前工程中常用的方法^[2],商业软件对于接触面比较平滑的静态接触问题的计算精度比较高,但是当接触面是复杂曲面时受限于接触边界的几何近似表达,使得接触计算精度较差、接触应力计算值波动较大。

基于体参数化模型的 IGA 方法最早由美国学者 HUGHES 教授在 2005 年提出^[3]。从几何上来讲,将模型转化为一个体参数化模型有诸多良好性能,如整个模型都保持良好的光顺性,避免了非结构化或者传统有限元网格中所使用的离散单元网格造成的模型表达不精确问题,在模型细化的情况下还能保持模型几何外观不变,模型存储空间少等优点。IGA 法以 NURBS 基函数作为形函数,NURBS 参数曲面片或体作为基本单元,NURBS 曲面片或体的控制顶点作为单元结点,NURBS 曲面或体的参数空间变量作为积分变量,使得几何模型和分析模型的表达完全一致。与其他分析方法相比,IGA 方法也具有较多优势^[4]。LU 首次提出了接触问题的 IGA 算法框架,使用两种接触算法进行了赫兹算例和过盈接触算例分析,并对比了解析解^[5]。

在文献[5]基础上,本文以齿轮无摩擦接触分析为例,将 IGA 法引入接触分析,验证该分析方法可行性。将渐开线直齿圆柱齿轮简化为二维,以 NURBS 曲面构建齿轮精确模型并分析几何表达精度,推导 IGA 接触分析的相关公式,在此基础上完成了一对单齿啮合齿轮的接触分析。最后针对赫兹接触分析验证计算公式的正确性,并将 IGA 分析结果和有限元软件的分析结果做了对比。

1 相关工作概述

1.1 齿轮接触分析

齿轮接触分析一直以来都是接触问题中的难点之一,国内外很多学者对齿轮接触问题进行了研究,取得了一些成果。MAO 使用微几何修正法降低齿面疲劳磨损,用有限元法计算接触应力^[6]。LI 使用有限元法研究了轻质三维齿轮的无摩擦接触^[7]。李学志针对斜齿轮啮合更替过程受到载荷突变影响,引起齿面疲劳点蚀和冲击的问题,对斜齿轮静力学接触和修形进行了分析研究^[8]。卓耀彬建立了适合准静态齿面接触分析的准双曲面齿轮传动系统有限元分析模型^[9]。黄学文基于 B 样条曲面造型原理在

ANSYS 中建立了精确齿面的斜齿轮实体模型,并对斜齿轮有限元模型进行了静接触分析,得到了斜齿轮副接触状态和应力大小的一般规律^[10]。杨凡研究了齿轮啮合过程中接触应力的分布规律,并比较了二维与三维齿轮的接触应力分布差异^[11]。这些研究采用的是插值多项式分段逼近原始模型,阻碍了接触应力计算精度和效率的进一步提升。

1.2 等几何分析应用及等几何接触分析

迄今为止,IGA 方法已经成功应用于众多领域,且被证明优于传统方法,尤其是在板壳问题的研究中。KIENDL 将 IGA 运用于 Kirchhoff-Love 壳单元,不仅验证 IGA 方法的正确性,并且可轻松实现各单元之间的连续性^[12]。袁沛等采用非结构化 T 样条构建复杂模型,结合 Kirchhoff-Love 薄壳理论构造基于非结构化 T 样条的薄壳单元,能够以更少的系统自由度获得精确解,并且有效地解决了 IGA 中载荷施加的问题^[13]。HIRSCHLER 等提出了一种双重域分解算法,可用于准确分析不合格的多面体 Kirchhoff-Love 壳^[14]。JAMIREs 等提出了一种基于 IGA 的方法来研究层压板和浅壳的稳定性,所提出的方法可应用于各种实例的稳定性分析中,并获得了优异的结果^[15]。IGA 在其他应用领域也得到成功应用,包括热传导领域^[16]、电磁学^[17]、生物力学^[18]、流固耦合^[19]等问题。

在等几何接触分析方面,STADLER 等^[21]提出了一种高效搜索算法,用于自适应精细网格上相邻元素搜索。李丽忠等设计出 IGESREADER 读取程序,读取几何离散模型相关信息,并用 IGA 方法实现二维弹丸与身管过盈接触^[22]。许欢等利用 IGA 方法对简化后弹丸与身管进行了三维静态接触分析,并与传统有限元方法进行对比^[23]。KAMENSKY 等采用 IGA 方法推导出基于体积势能的接触公式,并用房室瓣的结构力学说明该公式的有效性^[24]。DUONG 等基于表面电势的接触理论以解决摩擦问题,为具有任意大变形和滑动的摩擦接触问题的有限元公式化提供了简洁的理论和计算框架^[24]。

2 面向等几何分析的齿轮模型构建

2.1 建立齿轮模型

IGA 方法的基本思想是在建模和分析时采用相同的几何模型表示形式,且目前多是采用 NURBS 样条基来构建模型。一片在 u 方向为 p 阶、 v 方向为 q 阶的 NURBS 曲面片可以表示为

$$S(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}(u, v) P_{i,j} \quad (1)$$

$$R_{i,j}(u,v) = \frac{N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)\omega_{i,j}}{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m N_{k,p}(u)N_{l,q}(v)\omega_{k,l}} \quad (2)$$

式中, $P_{i,j}$ 为控制点, $N_{i,p}(u)$ 为 u 方向第 i 个 p 阶 B 样条基函数, $\omega_{i,j}$ 为基函数对应的权重。

构建通用的用于 IGA 的齿轮参数化模型尚具有一定的挑战性, 这里就以给定参数的、简化为平面模型的直齿齿轮为例来构建参数化模型, 并分析其与渐开线标准齿轮的误差。设定齿轮模数 $m = 2 \text{ mm}$, 齿数 $Z = 30$, 压力角为 20° 。由于 NURBS 曲面为四边面片, 要表达单个轮齿以及整个齿轮, 需要将模型剖分为多个子片然后再拼接起来, 在拼接过程中, 要求两片边界上的控制点重合。将单个轮齿分为 6 片, 具体分片如图 1a 所示, 采用阵列方法得到整个的齿轮模型如图 1b 所示。

图 1 齿轮模型分片图

通过 NURBS 曲面片构建的齿轮在 u 、 v 方向的基函数均为 3 阶 2 次。图 1a 中 NURBS 曲面片 3 中 u 方向上的节点矢量为 $U = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, v 方向上的节点矢量为 $V = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, 控制点为 $P_1 = (0; 17)$, $P_2 = (0; 30)$, $P_3 = (0; 32)$, $P_4 = (-0.95; 28.03)$, $P_5 = (-0.62; 30)$, $P_6 = (-0.3; 32)$, $P_7 = (-1.89; 28.03)$, $P_8 = (-1.6; 30.13)$, $P_9 = (-0.6; 32)$ 。然后利用渐开线公式 $\begin{cases} r_k = r_b / \cos \alpha_k \\ \theta_k = \text{inv} \alpha_k \end{cases}$ 构建标准齿轮, 其中 α_k 为压力角,

r_b 为基圆半径。两种方法得到的齿形如图 2 所示, 其中左图为 NURBS 边界齿形, 是通过节点插入的 h 型细化方法生成, 右图为渐开线标准齿形的有限元模型。

图 2 两种模型边界对比

2.2 齿轮几何误差分析

设渐开线齿形和 NURBS 齿形离散后坐标分别为 $S_i(x_i, y_i)$ 、 $S'_i(x'_i, y'_i)$, 当取 $x_i = x'_i$ 时分别得到 y_i 和 y'_i , 两种齿形绝对误差为 $\Delta y = |y'_i - y_i|$, 相对误差为 $f_y = |\Delta y / y'_i|$ 。 S_i 的矢量模为 $r_i = \sqrt{(x_{i2}^2 + y_{i2}^2)}$, S'_i 的矢量模为 $r'_i = \sqrt{(x_{i2}'^2 + y_{i2}'^2)}$, 则矢量模绝对误差为 $\Delta r = |r'_i - r_i|$, 相对误差为 $f_r = |\Delta r / r'_i|$ 。根据文献[26], 在误差最大的一段曲线上取 4 个点做重点对比, 误差对比如表 1 和表 2 所示, 误差曲线如图 3 所示。

表 1 误差对比表

序号	$x_i = x'_i$	y_i	y'_i	r_i	r'_i
1	28.38	0.217 9	0.159 2	28.380 8	28.380 2
2	29.21	0.478 9	0.423 6	29.213 9	29.213 1
3	30.22	0.892 4	0.865 2	30.233 2	30.232 3
4	30.99	1.284 0	1.276 0	31.016 6	31.016 2

表 2 渐开线齿面与实际齿面误差

序号	Δy	f_y	Δr	$F_r (10^{-4})$
1	0.058 7	0.368 7	0.000 6	0.211 4
2	0.055 3	0.130 5	0.000 8	0.273 8
3	0.027 2	0.031 4	0.000 9	0.297 7
4	0.008 0	0.006 3	0.000 4	0.128 9

图 3 理论与实际齿面误差

IGA 中有三种细化方法, 本文通过节点插入的 h 型细化方法来增加控制点的数量, 在细化过程中几何模型边界不会发生形状变化。相比传统有限元法的拉格朗日边界, 由 NURBS 曲线或曲面描述的齿轮边界具有更高阶的连续性。对于一条 p 阶的 NURBS 曲线, 在节点 u_i 处基函数具有 C^{p-k} 次连续性, k 为节点 u_i 的重复度, 增加阶数将提高曲面的连续性。在本文中, 由 NURBS 曲线构造的齿轮边界处具有 C^1 连续性, 而传统有限元法的边界为 C^0

连续性。齿轮模型接触边界光滑性的差别将直接影响后续接触应力计算的精确性。

3 等几何接触分析

IGA 方法的基本框架与传统有限元法相类似, 区别在于所使用的基函数不同。图 4 为等几何法解决接触问题的基本流程, 其中重点部分在于接触对和约束边界条件的定义。下文将主要介绍接触搜索即定义接触对和采用罚函数法定义约束条件。

图 4 等几何法接触分析流程

3.1 NURBS 边界的接触搜索

在分析过程中, 对模型边界进行接触搜索至关重要, 接触搜索是判断在整个接触系统中哪些本来接触的部分变为分离, 哪些处于分离状态的部分变为接触。在 IGA 中所采用的分析模型是由 NURBS 曲面和 NURBS 实体所构成, 一般将接触搜索分为两步, 第一步将全局搜索算法运用于已构建的整体 NURBS 模型上, 判断出哪个或哪几个部分可能会发生接触, 第二步是在判断出的部分内部使用局部搜索算法确定出具体的接触位置。

接触搜索中难点在于局部搜索, 以下主要介绍局部搜索算法。根据文献[27]中曲线曲面上点的反求与投影的方法, 在局部搜索中可采用最近投影算法确定具体的接触位置。假设两个 NURBS 块 A 与 B 相接触, $x^{(A)}$ 是边界 ${}^tS_c^A$ 上的一点 P, $x^{(B)}$ 是边界 ${}^tS_c^B$ 上的一点。令 $x_Q^{(B)}$ 是点 $x^{(A)}$ 在边界 ${}^tS_c^B$ 上最近投影点, 设 NURBS 边界 ${}^tS_c^B$ 为曲线 $C(u)$, 则有

$$f(u) = (C(u) - x^{(A)}) \cdot C'(u) = 0 \quad (3)$$

式中, $f(u)$ 为点 $x^{(A)}$ 到曲线 $C(u)$ 上的距离, $C'(u) = \partial C(u) / \partial u$ 。牛顿迭代法可解出上式, 对应的迭代方程为

$$H^{(k)} \Delta u^{(k+1)} = -[C(u) - x^{(A)}) \cdot C'(u)]^{(k)} \quad (4)$$

式中, k 为迭代次数, H 为雅可比, $H = \|C'(u_i)\|^2 + C''(u_i) \cdot (C(u_i) - x^{(A)})$, $C''(u) = \partial^2 C(u) / \partial u^2$ 。

根据牛顿迭代法可以算出 u , 进而确定了点 $x^{(A)}$ 在 B 边界上的最近投影点 $x_Q^{(B)}$ 。

3.2 约束条件的处理

本文等几何法中使用罚函数法计算接触力。因为罚函数的优势在于求解时自由度不会增加, 方便求解, 并且求解方程的系数矩阵可以保持正定。罚函数法通过引入罚因子, 将罚因子与接触界面的穿透量的乘积作为接触力, 本质上是将接触非线性问题转化为材料非线性问题来求解。对于接触约束条件的处理是在势能泛函里面增加一个惩罚势能项

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_{\text{ext}} + \Pi_C \quad (5)$$

式中, Π_e 是弹性势能, Π_{ext} 是外力所做的功, Π_C 是罚函数引入接触定解条件的附加泛函。通过引入惩罚势能项, 接触问题就转化为无约束优化问题^[5]

$$\min \Pi^*(U) = \Pi(U) + \Pi_C(U) \quad (6)$$

附加泛函项可用公式表示为

$$\Pi_C = \frac{1}{2} \int_c \varepsilon g_N^2 da \quad (7)$$

式中, ε 为惩罚因子, g_N 是侵入量。变分形式为

$$\delta \Pi_C = \int_c \varepsilon g_N \delta g_N da \quad (8)$$

令 V_p 是物体 A 边界上任意一个高斯点在 B 物体边界 ${}^tS_c^B$ 上的最近投影点, 则上式又可以进一步转化为

$$\delta \Pi_C = \int_c \varepsilon [x^{(A)} - x^{(B)}(V_p)] \cdot (\delta x^{(A)} - \delta x^{(B)}) da \quad (9)$$

法向接触力的计算公式可以表示为

$$P_N = \varepsilon g_N \quad (10)$$

本文采用 surface-to-surface 接触方式处理接触单元, 即使用接触面上的高斯点来判断是否接触, 接触区域是由一系列的高斯点来表征的^[5]。由于发生接触的物体 A 与物体 B 的边界和由 NURBS 曲线构成, 两条接触边界的位形可以分别表示为

$$\begin{aligned} x^{(A)} &= \sum_{I=1}^{NP_{(A)}} N_I^{(A)}(u) q_I^{(A)} \\ x^{(B)} &= \sum_{J=1}^{NP_{(B)}} N_J^{(B)}(v) q_J^{(B)} \end{aligned} \quad (11)$$

式中, $N_I^{(A)}(u)$ 和 $N_J^{(B)}(v)$ 是形函数, $q_I^{(A)}$ 和 $q_J^{(B)}$ 表示接触边界的控制点, $NP_{(A)}$ 和 $NP_{(B)}$ 分别表示两条接触边界的控制点个数, 两条接触边界的变形式可以分别表示为

$$\delta x^{(A)} = \sum_{I=1}^{NP_{(A)}} N_I^{(A)} \delta q_I^{(A)} \quad (12)$$

$$\delta x^{(B)} = \sum_{J=1}^{NP_{(B)}} N_J^{(B)} \delta q_J^{(B)} \quad (13)$$

假设 A 边界 S_c^A 上与 B 物体边界 S_c^B 发生接触的高斯点列为 $G^{(A)}$, $G^{(A)}$ 中第 i 个高斯点记为 $x^{(A)}(u_i)$ 。对于 $G^{(A)}$ 中的每一个高斯点在 B 物体的边界 S_c^B 上都有一个最近投影点 $x^{(B)}(V_{pi})$ 与之一一对应, 则式中所表示的积分就可以近似等于

$$\begin{aligned} \delta \Pi_C &= \sum_{i \in G^{(A)}} \varepsilon [x^{(A)}(u_i) - x^{(B)}(V_{pi})] \cdot \\ &\left[\sum_{I=1}^{NP_{(A)}} N_I^{(A)}(u_i) \delta q_I^{(A)} - \sum_{J=1}^{NP_{(B)}} N_J^{(B)}(V_{pi}) \delta q_J^{(B)} \right] w_i \mathbf{J}^{(A)}(u_i) \end{aligned} \quad (14)$$

式中, w_i 是积分权重, $\mathbf{J}^{(A)}(u_i)$ 是雅可比矩阵, $\mathbf{J}^{(A)}(u_i) = \|\mathbf{x}_1^A(u_i) \times \mathbf{x}_2^A(u_i)\|$ 。

$$\delta \Pi_C = - \sum_{I=1}^{NP_{(A)}} R_I^{(A)} \cdot \delta q_I^{(A)} - \sum_{J=1}^{NP_{(B)}} R_J^{(B)} \cdot \delta q_J^{(B)} \quad (15)$$

当接触附加项的变分 $\delta \Pi_C$ 写成上式时, 接触残余可以通过以下公式表示

$$R_I^A = \sum_{I=1}^{NP_{(A)}} \varepsilon w_i \mathbf{J}^{(A)}(u_i) N_I^{(A)}(u_i) [x^{(B)}(V_{pi}) - x^A(u_i)] \quad (16)$$

$$R_J^B = \sum_{J=1}^{NP_{(B)}} \varepsilon w_i \mathbf{J}^{(A)}(u_i) N_J^{(B)}(V_{pi}) [x^{(A)}(u_i) - x^B(V_{pi})] \quad (17)$$

式中, w_i 是权重积分, $\mathbf{J}^{(A)}(u_i)$ 是雅可比矩阵。

接触刚度矩阵可以表示为

$$\begin{aligned} \alpha &= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \\ \alpha_{ij} &= - \frac{\partial R_I^{(i)}}{\partial q_J^{(j)}} \end{aligned} \quad (18)$$

这里的 i 和 j 表示接触边界的序号, I 和 J 表示接触点的序号。整个接触系统的平衡方程可用矩阵形式表示

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 + \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \mathbf{K}_2 + \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(A)} \\ \mathbf{u}^{(B)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{(A)} \\ \mathbf{f}^{(B)} \end{bmatrix} \quad (19)$$

式中, $\mathbf{u}^{(A)}$ 和 $\mathbf{u}^{(B)}$ 分别表示物体 A 和 B 控制点的位移向量, $\mathbf{f}^{(A)}$ 和 $\mathbf{f}^{(B)}$ 分别表示物体 A 和 B 所受载荷, 具体值可由式(10)分别给出。IGA 方法中的 $\mathbf{K}_1$ 和 $\mathbf{K}_2$ 计算与有限元法相似, 根据

$$\mathbf{K}^k = \iint (\mathbf{B}^k)^T \mathbf{D}^k \mathbf{B}^k \det[\mathbf{J}^k] d\varepsilon d\eta \quad (20)$$

计算出单元刚度矩阵, 然后组装得到总刚矩阵 $\mathbf{K} = \sum \mathbf{K}^k$, 其中 $\mathbf{D}$ 为弹性矩阵。

$$\mathbf{D}^k = \frac{\mathbf{E}^{(k)}}{1 - (\mu^k)^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu^k & 0 \\ \mu^k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \mu^2)/2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

式中, E 为弹性模量, μ 为泊松比。 $\mathbf{B}$ 为几何矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_i^k &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^k}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i^k}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i^k}{\partial y} & \frac{\partial N_i^k}{\partial x} \end{bmatrix} \\ \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^k}{\partial y} \end{bmatrix} \right\} &= (\mathbf{J}^k)^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^k}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial N_i^k}{\partial \eta} \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

式中, $\mathbf{J}$ 为雅可比矩阵, 计算公式为

$$\mathbf{J}^k = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i^k}{\partial \varepsilon} x_i & \sum \frac{\partial N_i^k}{\partial \varepsilon} y_i \\ \sum \frac{\partial N_i^k}{\partial \eta} x_i & \sum \frac{\partial N_i^k}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (23)$$

与有限元法的区别在于等几何法采用 NURBS 基函数代替有限元法的形函数, 即式(22)与式(23)中的 N_i 为 NURBS 基函数。

4 齿轮接触等几何分析

在进行齿轮接触分析时, 需要考虑两种啮合状态, 第一种只考虑一对轮齿啮合, 第二种多对齿啮合, 本文目前只考虑第一种情况。根据葛宝乾^[28]等人计算推导出的公式可知, 在不考虑齿轮弯曲变形, 只考虑接触变形时第一种情况接触点的载荷为

$$P_A = P_T = E \sqrt{\left(\frac{\beta \cdot r}{1.231} \right)^3 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}} \quad (24)$$

式中, P_A, P_T 分别为接触点处的载荷, R_1 与 R_2 为圆柱半径, β 为主动轮转角, r 为公法线到齿轮回转中心的距离。

齿轮接触分析采用赋予初始微小侵入量的方式

建立接触模型。齿轮 1 沿着轴心顺时针方向旋转 0.4° ，形成初始侵入量，同时限制两齿轮底部边界控制点的 x 和 y 方向的自由度。材料的弹性模量 $E=2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$ ，泊松比 $\mu=0.3$ ，采用罚函数法引入约束条件，此算例中罚因子为 $\varepsilon=30E$ ， E 为弹性模量。

图 5 是完整齿轮细分两次等几何法分析结果，为减少计算时间，提取出啮合部分的三对轮齿进行说明。在齿面上布置 20 个单元时接触应力的最大值为 678.98 MPa ，范式应力最大值位于接触点处，为 320.66 MPa ，齿根处范式应力 185.39 MPa 。图 6a 为三对轮齿接触等几何分析范式应力的分析结果，图 6b 为图 6a 中的应力集中处局部放大图。

图 5 齿轮接触等几何法等效力分布

图 6 等几何接触分析局部放大

5 结果分析与讨论

5.1 与赫兹分析理论值比较

本节用赫兹接触的理论解析结果来验证 IGA 方法的可行性。采用两圆柱的接触，圆柱的半径为前文中两齿轮啮合点处、圆心在该点法向量上两个曲率圆的半径。根据齿轮参数计算出啮合点处曲率半径为 10.26 mm ，将集中力施加在圆柱正上方，模型如图 7 所示。当两圆柱材料相同时，算例的接触应力的理论公式可简化为

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{F}{\pi} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right) \left(\frac{1}{\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}} \right)} \quad (25)$$

图 7 赫兹圆接触问题

施加在圆柱顶端上的集中载荷为 $F=80 \text{ N}$ ，材料的弹性模量 $E=2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$ ，泊松比 $\mu=0.3$ 。根据上式可以计算得最大接触应力 756.78 MPa 。

针对同一算例，使用 IGA 方法来分析，采用的 NURBS 曲面在 u 、 v 方向均为 2 次。由于该问题是轴对称问题，对模型进行简化。计算模型如图 8 所示，圆柱 1 的下边界为主接触面，圆柱 2 的上边界为从接触面。约束住两圆柱左侧沿 x 方向的位移，圆柱 2 下侧边界约束 y 方向位移。

图 8 赫兹接触等几何模型

在 IGA 方法中计算结果会随着细分次数不同产生变化。采用 h 型细化即节点插入的方式细化单元，这里列出 0~9 次细分接触应力分析结果见表 3。9 次细分后计算结果的接触部位最大接触应力值为

744.24 MPa。由此可见 IGA 方法细分 9 次后的结果与赫兹理论值之间的误差为 1.66%，计算结果较为相近。由图 9 也可看出随着细分次数的增加 IGA 得到的结果会逐渐收敛于理论值。

表 3 不同细分次数最大接触应力变化

细分次数	0	1	2	3	4
最大接触应力/MPa	474.92	564.35	614.57	654.01	678.98
细分次数	5	6	7	8	9
最大接触应力/MPa	694.79	708.68	721.57	732.55	744.24

图 9 不同细分次数最大接触应力变化

对于范式应力，采用等几何法不同细分次数的范式应力值见表 4。图 10 为用 IGA 方法在模型细分 9 次后范式应力分析结果，最大值为 406.72 MPa。

表 4 不同细分次数最大范式应力变化

细分次数	0	1	2	3	4
最大范式应力/MPa	113.11	190.13	245.57	289.77	320.66
细分次数	5	6	7	8	9
最大范式应力/MPa	339.46	361.46	381.67	397.11	406.72

图 10 赫兹问题等几何法范式应力分布

5.2 与商业软件齿轮分析结果比较

在某商业软件中以同样的齿轮参数，相同的约束条件下做出传统有限元分析结果。为与第 4 节中 IGA 结果相对比，在齿面上也同样布置 20 个单元，某商业软件计算得到的最大接触应力为 510.98 MPa，范式

应力最大值位于接触点处为 315.92 MPa，齿根处应力为 215.648 MPa。

表 5 齿面布置 20 个单元范式应力 (MPa)

	IGA 结果	商用软件分析结果
齿面	320.66	315.92
齿根	185.39	215.64

当有限元法的单元数量趋近于无穷大时，有限元法的计算值无限趋近于理论值。将齿轮接触边界单元数量设为 50 时，有限元解作为理论解的参考值。表 6 是齿轮接触面单元数量不同时 IGA 方法与有限元法最大接触应力的计算误差对比情况。

表 6 IGA 与 FEM 误差对比

单元数	10	20	30	40
IGA 误差 (%)	5.88	3.41	1.96	0.34
FEM 误差 (%)	42.15	23.62	10.38	2.74

从表 6 可知接触边界网格越细密时，有限元计算结果越准确，网格比较粗大时，有限元法误差很大。等几何法在网格粗大时依然具有较高的精确度，在接触边界只有 10 个单元时误差只有 5.88%。因此，利用 IGA 方法可以显著提高计算效率。

6 结论

本文将 IGA 方法拓展运用于齿轮静态无摩擦接触分析中，与理论值和商业软件计算值的分析结果对比表明了该方法的有效性。由于采用了 NURBS 曲线曲面作为基函数，等几何接触分析方法可以精确且高阶光滑地表示齿轮接触的边界，同时采用较少的单元即可获得更高的近似解精度，从而得到更高的计算效率。同时，齿轮建模和仿真分析计算各个阶段都采用了参数化的统一模型，从而为齿轮的建模、分析、优化乃至制造一体化奠定坚实的模型基础。后续工作将本文方法推广到更多的三维齿轮接触分析中，并考虑更多的工况和接触情况，如多齿接触和有摩擦接触分析等。

参 考 文 献

- [1] JOHNSON K L. 接触力学[M]. 徐秉业, 译. 北京: 高等教育出版社, 1992.
JOHNSON K L. Contact mechanics[M]. Translated by XU Bingye. Beijing: Higher Education Press, 1992.
- [2] 马文. 滚动轴承接触问题数值计算及有限元分析[J]. 机

- 械工程与自动化, 2011(6): 51-55.
- MA Wen. Numerical calculation of rolling contact problem and its finite element analysis[J]. Mechanical Engineering&Automation, 2011(6): 51-55.
- [3] Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194(39-41): 4135-4195.
- [4] 吴紫俊, 黄正东, 左兵权, 等. 等几何分析研究概述[J]. 机械工程学报, 2015, 51(5): 114-129.
- WU Zijun, HUANG Zhengdong, ZUO Bingquan, et al. Perspectives on isogeometric analysis[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(5): 114-129.
- [5] LU Jia. Isogeometric contact analysis: Geometric basis and formulation for frictionless contact[J]. Computer Methods Applied Mechanics and Engineering, 2011, 200(5): 726-741.
- [6] MAO K. Gear tooth contact analysis and its application in the reduction of fatigue wear[J]. Wear, 2007, 262(11): 1281-1288.
- [7] LI Shuting. Gear contact model and loaded tooth contact analysis of a three-dimensional, thin-rimmed gear[J]. Journal of Mechanical Design, 2002, 124(3): 511-517.
- [8] 李学志, 陈蒙, 陈绍康, 等. 变位斜齿轮静力学分析和修形研究[J]. 机械, 2019, 46(1): 12-15, 20.
- LI Xuezhi, CHEN Meng, CHEN Shaokang, et al. Statics analysis and modification research of profile modified helical gears[J]. Machinery, 2019, 46(1): 12-15, 20.
- [9] 卓耀彬, 周晓军, 吕浩亮, 等. 准双曲面齿轮准静态接触分析和试验研究[J]. 仪器仪表学报, 2017, 38(5): 1285-1295.
- ZHUO Yaobin, ZHOU Xiaojun, LÜ Haoliang, et al. Theoretical and experimental investigation on contact characteristics of hypoid gears under quasi-static condition[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2017, 38(5): 1285-1295.
- [10] 黄学文. 基于 B 样条曲面精确建模的斜齿轮接触分析[J]. 煤矿机械, 2012, 33(9): 132-134.
- HUANG Xuwen. Contact analysis of helical gear based on precise B-spline surface model[J]. Coal Mine Machinery, 2012, 33(9): 132-134.
- [11] 杨凡, 孙首群, 于建华, 等. 齿轮啮合过程中接触应力的精确分析[J]. 机械传动, 2010, 34(7): 56-59, 67.
- YANG Fan, SUN Shouqun, YU Jianhua, et al. Exact Analysis of gear contact stress in meshing process[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2010, 34(7): 56-59, 67.
- [12] KIENDL J, BLETZINGER K U, LINHARD J, et al. Isogeometric shell analysis with Kirchhoff-Love elements[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2009, 198(49): 3902-3914.
- [13] 袁沛, 刘振宇, 袁迪, 等. 基于非结构化 T 样条的薄壳等几何分析[J]. 机械工程学报, 2018, 54(15): 132-140.
- YUAN Pei, LIU Zhenyu, QIU Chan, et al. Unstructured T-spline-based isogeometric analysis for thin shells[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(15): 132-140.
- [14] HIRSCHLER T, BOUCLIER R, DUREISSEIX D, et al. A dual domain decomposition algorithm for the analysis of non-conforming isogeometric Kirchhoff-Love shells[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2019, 357(12): 534-556.
- [15] JAMIRE S C, PEDRO S B, ELIAS S B, et al. An isogeometric formulation for stability analysis of laminated plates and shallow shells[J]. Thin-Walled Structures, 2019, 143(10): 374-387.
- [16] YOON M, HA S, CHO S. Isogeometric shape design optimization of heat conduction problems[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2013, 62(7): 272-285.
- [17] DANIEL G, DAVID P, VICTOR M C. Refined isogeometric analysis for fluid mechanics and electromagnetics[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2019, 356(11): 598-628.
- [18] 高建伟, 陈龙. 基于等几何分析的股骨模型静力学分析[J]. 计算机仿真, 2015, 32(5): 340-343.
- GAO Weijian, CHEN Long. Construction and static analysis of femur based on IGA[J]. Computer Simulation, 2015, 32(5): 340-343.
- [19] LUCA H, JOSEF K, ANTONIO D, et al. A natural framework for isogeometric fluid-structure interaction based on BEM-shell coupling[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2017, 316(4): 522-546.
- [20] WANG Chenglong, MICHAEL C H, XU Fei, et al. Modeling of a hydraulic arresting gear using fluid-structure interaction and isogeometric analysis[J]. Computers and Fluids, 2017, 142(1): 3-14.
- [21] STADLER M, HOLZAPFEL G A, KORELC A. C^n continuous modelling of smooth contact surfaces using

- NURBS and application to 2D problems[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, 57(15): 2177-2203.
- [22] 李丽忠. 身管 NURBS 几何表征及同几何接触算法研究[D]. 南京理工大学, 2013.
- LI Lizhong. Research on NURBS geometric characterization and isogeometric contact algorithm of body tube[D]. Nanjing University of Science and Technology, 2013.
- [23] 许欢. 接触问题的等几何分析理论与算法研究[D]. 南京: 南京理工大学, 2015.
- XU Huan. Research on isogeometric analysis theory and algorithm for contact problems[D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2015.
- [24] KAMENSKY D, XU F, LEE C, et al. A contact formulation based on a volumetric potential: Application to isogeometric simulations of atrioventricular valves[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, 330(3): 522-546.
- [25] THANG X D, ROGER A S. A concise frictional contact formulation based on surface potentials and isogeometric discretization[J]. Computational Mechanics, 2019, 64(4): 951-970.
- [26] 汪中厚, 马金妮, 康晓洁, 等. 基于 NURBS 曲面的渐开线齿轮接触斑点解析及仿真[J]. 机械传动, 2014, 38(1): 44-49.
- WANG Zhonghou, MA Jinni, KANG Xiao, et al. Involute gear contact pattern analysis and simulation based on NURBS surface[J]. Mechanical Drive, 2014, 38(1): 44-49.
- [27] 皮格. 非均匀有理 B 样条[M]. 北京: 清华大学出版社, 2010.
- PIEGL L. The NURBS[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2010.
- [28] 葛宝乾. 多圆弧圆柱齿轮啮合点载荷分配的研究[D]. 银川: 宁夏大学, 2017.
- GE Baoqian. Research on load distribution of multi-arc cylindrical gear meshing point[D]. Yinchuan: Ningxia University, 2017.
-
- 作者简介: 陈龙, 男, 1978年出生, 硕士研究生导师。主要研究方向为产品智能计算设计、机器视觉与机器人等。
E-mail: cl@usst.edu.cn
- 郝婵娟, 女, 1994年出生, 硕士研究生。主要研究方向为CAE。
E-mail: 805734886@qq.com
- 汪中厚(通信作者), 男, 1963年出生, 博士研究生导师。主要研究方向为机械传动技术、CAE技术及应用。
E-mail: wangzhust@163.com