DOI: 10.3901/JME.2021.03.059

考虑疲劳性能的柔顺机构拓扑优化设计*

占金青¹ 刘天舒¹ 刘 敏¹ 朱本亮²

(1. 华东交通大学机电与车辆工程学院 南昌 330013;
2. 华南理工大学广东省精密装备与制造技术重点实验室 广州 510641)

摘要: 柔顺机构需要承受多次往复运动, 交变应力导致机构容易发生疲劳损伤及失效。为了满足疲劳性能要求, 提出一种考虑疲劳性能的柔顺机构拓扑优化设计方法。考虑恒定振幅的比例载荷作用, 采用修正的 Goodman 疲劳准则评定柔顺机构的疲劳强度, 以柔顺机构的输出位移最大化为目标函数, 以疲劳性能和结构体积作为约束, 采用改进的 P 范数方法进行疲劳约束凝聚, 建立基于疲劳性能约束的柔顺机构拓扑优化模型, 利用映射过滤方法避免数值不稳定性现象, 采用移动渐近优化算法求解柔顺机构疲劳约束拓扑优化的多约束优化问题。数值算例结果表明基于疲劳约束拓扑优化获得的柔顺机构能够满足疲劳要求, 机构的 von Mises 等效应力分布更加均匀; 并且分析不同的作用载荷条件对柔顺机构构型及其性能的影响规律。

关键词: 柔顺机构; 拓扑优化; 疲劳约束; 修正的 Goodman 准则

中图分类号: TH112; TB114

Topological Design of Compliant Mechanisms Considering Fatigue Constraints

ZHAN Jinqing¹ LIU Tianshu¹ LIU Min¹ ZHU Benliang²

(1. School of Mechatronics and Vehicle Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013;
2. Guangdong Provincial Key Laboratory of Precision Equipment and Manufacturing Technique, South China University of Technology, Guangzhou 510641)

Abstract: Compliant mechanisms need to withstand multiple reciprocating motions, and the alternating stress causes the mechanism to be prone to fatigue damage and failure. In order to meet the fatigue performance, a method for topology optimization of compliant mechanisms considering fatigue constraints is proposed. The proportional loadings with constant amplitude is considered in fatigue analysis. The modified Goodman fatigue criterion are applied to evaluate the fatigue strength. The maximum of the output displacement of the compliant mechanisms is developed as the objective function, and the fatigue performance and structural volume are used as the constraints. Fatigue constraints are aggregated into a constraint using the improved P-norm method. The model for topology optimization of compliant mechanisms considering fatigue constraints is established. The projection filter is applied to avoid the phenomenon of numerical instabilities. The method of moving asymptotes is applied to solve the multi-constrained optimization problem. The results of several numerical examples show the compliant mechanisms obtained by fatigue constrained topology optimization can meet the fatigue strength requirement, and the stress is more uniformly distributed. The effect of different loading conditions on the configuration and performance of the compliant mechanisms is analyzed.

Key words: compliant mechanisms; topology optimization; fatigue constraints; modified Goodman criterion

0 前言

柔顺机构是指利用自身的弹性变形来实现运动、

力和能量的传递和转化的一种机构^[1-2]。与刚性机构相比, 它能够降低成本(免装配、一体化加工和减少维护)和提高性能(减少摩擦磨损、高精度和高适应性)^[3-4]。因此, 柔顺机构广泛用于精密定位、微纳制造、仿生机器人和微机电系统等领域^[5-6]。柔顺机构设计方法主要有伪刚体模型法^[7]和拓扑优化方法^[8]。与伪刚体模型相比, 采用拓扑优化方法进行柔

* 国家自然科学基金(51665011, 51305136)、江西省自然科学基金(20202BAB204015, 20202ACBL214013, 20192BAB21602)和广东省精密装备与制造技术重点实验室开放基金(PEM201601)资助项目。20200530收到初稿, 20200915收到修改稿

顺设计无需从已知的刚性机构出发, 只需给定设计域和边界条件, 能够获得具有优化性能的机构, 为新颖柔顺机构构型的设计提供了解决方法。

实际工作中, 柔顺机构需要承受多次往复运动, 交变应力导致机构容易发生疲劳损伤及失效^[9]。因此, 需要考虑疲劳性能进行柔顺机构优化设计, 以使柔顺机构满足要求疲劳强度及寿命, 保证其在全寿命周期内安全可靠运行。目前, 柔顺机构优化设计研究大多仅考虑静强度约束^[10-11]。由于没有考虑疲劳性能, 设计的柔顺机构可能由于疲劳强度不足提前失效或者由于经验系数过大导致过量设计。为此, 考虑疲劳性能约束进行柔顺机构设计是非常有必要的。

现有的柔顺机构疲劳性能研究主要关注于机构中的铰链部分, 而忽视了整体机构疲劳性能。DIRKSEN 等^[12]对三种柔性铰链(矩形, 圆形, 抛物线)进行疲劳分析和优化设计研究, 这为拓扑优化获得的单节点结构选择铰链类型及参数提供了依据。JIANG 等^[13]对 U 型柔性铰链进行疲劳性能研究, 分析不同结构参数对疲劳性能影响规律。IVANOV 等^[14]进行柔性铰链疲劳试验研究, 建立了疲劳寿命和应力之间关系, 能够用于预测柔性铰链的疲劳强度。此外, 李海燕等^[15]采用基于伪刚体模型以疲劳可靠度为优化目标, 建立了一种柔顺机构可靠性优化模型。WANG 等^[16]采用应力强度干涉法分析柔性铰链疲劳可靠性, 进行三自由度并联柔顺微定位平台疲劳可靠性优化设计。上述研究柔顺机构疲劳研究方法都是采用伪刚体模型进行设计。

有关考虑疲劳性能的拓扑优化研究主要集中在结构设计问题上。KARIM 等^[17]采用等效静态载荷法求解结构的动力学响应, 进行基于损伤约束的结构拓扑优化设计。HOLMBERG 等^[18]将临界应力确定为超过允许累积损伤的最大应力, 利用临界应力作为约束进行结构拓扑优化设计, 以满足疲劳要求。OEST 等^[19]采用拟静态分析法进行结构有限元, 进行连续体结构疲劳损伤约束拓扑优化设计。COLLET 等^[20]和 NABAI 等^[21]分别以局部名义应力和全局名义应力表征结构的疲劳寿命, 提出疲劳约束的连续体结构拓扑优化设计方法。叶红玲等^[22]根据疲劳累积损伤理论引入疲劳寿命过滤函数, 机械疲劳寿命约束的结构拓扑优化设计。目前, 柔顺机构拓扑优化设计研究没有考虑疲劳性能约束。

本文提出了一种考虑疲劳性能的柔顺机构拓扑优化设计方法。考虑恒定振幅的比例载荷作用, 采用修正的 Goodman 疲劳准则评定柔顺机构的疲劳

强度, 以柔顺机构的输出位移最大化为目标函数, 以疲劳性能和结构体积作为约束, 采用改进的 P 范数方法进行疲劳约束凝聚, 建立基于疲劳约束的柔顺机构拓扑优化模型, 利用映射过滤方法避免数值不稳定性现象, 采用移动渐近优化算法求解优化问题; 分析不同的作用载荷条件对柔顺机构构型及其性能的影响规律。

1 疲劳分析

假设正弦载荷作用, 采用拟准静态分析法进行结构有限元分析

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}_{\max} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{K}$ 为结构的总刚度矩阵; $\mathbf{U}$ 为结构的单元节点位移列阵; $\mathbf{F}_{\max}$ 为正弦载荷的最大载荷列阵。

为了避免优化问题出现奇异解现象^[23], 采用应力松弛技术处理单元应力, 松弛后的单元应力列阵可表示为

$$\boldsymbol{\sigma}_e = (\rho_e)^q \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{u}_e = [\sigma_x^e, \sigma_y^e, \tau^e]^T \quad (2)$$

式中, $\boldsymbol{\sigma}_e$ 为单元 e 的应力; q 为松弛因子; $\mathbf{D}$ 为实体材料的本构矩阵; $\mathbf{B}$ 为应变矩阵; $\mathbf{u}_e$ 为单元的节点位移列阵; σ_x^e 和 σ_y^e 分别表示 x 和 y 方向上的主应力; τ^e 为剪切应力。

单元应力幅值 σ_a^e 和均值 σ_m^e 分别表示为

$$\sigma_a^e = c_a \boldsymbol{\sigma}_e = [\sigma_{x,a}^e, \sigma_{y,a}^e, \tau_a^e]^T \quad (3)$$

$$\sigma_m^e = c_m \boldsymbol{\sigma}_e = [\sigma_{x,m}^e, \sigma_{y,m}^e, \tau_m^e]^T \quad (4)$$

式中, c_a 和 c_m 分别为幅值系数和均值系数。

线性弹性变形范围内, 结构的应力变化和作用载荷之间呈线性关系, 如图 1 所示。幅值系数 c_a 和均值系数 c_m 可分别表示为

$$c_a = \frac{1 - (F_{\min} / F_{\max})}{2} \quad (5)$$

$$c_m = \frac{1 + (F_{\min} / F_{\max})}{2} \quad (6)$$

式中, $F_{\max}$ 和 $F_{\min}$ 分别为正弦载荷的最大载荷和最小载荷。

采用 von Mises 等效应力表示单元的应力, 则单元的 von Mises 应力幅值 $\sigma_{vm,a}^e$ 和均值 $\sigma_{vm,m}^e$ 分别可表示为

$$\sigma_{vm,a}^e = \sqrt{(\sigma_{x,a}^e)^2 + (\sigma_{y,a}^e)^2 + 3(\tau_a^e)^2 - \sigma_{x,a}^e \sigma_{y,a}^e} \quad (7)$$

$$\sigma_{vm,m}^e = \sqrt{(\sigma_{x,m}^e)^2 + (\sigma_{y,m}^e)^2 + 3(\tau_m^e)^2 - \sigma_{x,m}^e \sigma_{y,m}^e} \quad (8)$$

图 1 正弦载荷和应力周期变化历程

由于 von Mises 等效应力的值恒为正，导致评估疲劳强度的 von Mises 等效应力均值的负符号丢失，与实际响应不符。因此，采用带符号的 von Mises 应力^[24]度量单元的应力均值

$$\sigma_{vm,m}^e = \begin{cases} \sqrt{(\sigma_{x,m}^e)^2 + (\sigma_{y,m}^e)^2 + 3(\tau_m^e)^2} - \sigma_{x,m}^e \sigma_{y,m}^e & \sigma_{x,m}^e \geq 0 \\ -\sqrt{(\sigma_{x,m}^e)^2 + (\sigma_{y,m}^e)^2 + 3(\tau_m^e)^2} - \sigma_{x,m}^e \sigma_{y,m}^e & \sigma_{x,m}^e < 0 \end{cases} \quad (9)$$

采用修正的 Goodman 准则评估高周疲劳寿命条件下柔顺机构的疲劳强度，如图 2 所示，横坐标表示带符号 von Mises 等效应力均值，纵坐标表示带符号 von Mises 等效应力幅值。为了避免疲劳失效，单元带符号 von Mises 等效应力的幅值和均值必须约束在修正的 Goodman 图描述的安全区域内。其中， σ_{Nf} 表示无限循环次数($N_f > 10^7$)下的许用临界应力幅值， σ_{ut} 为材料的拉伸强度， σ_y 为材料的屈服强度。

图 2 修正的 Goodman 图

因此，将柔顺机构的疲劳性能约束转化为两个

应力约束

$$g_{1,e} = \frac{\sigma_{vm,a}^e}{\sigma_{Nf}} + \frac{\sigma_{vm,m}^e}{\sigma_{ut}} \leq 1 \quad \sigma_{vm,m}^e \geq 0 \quad (10)$$

$$g_{2,e} = \frac{\sigma_{vm,a}^e}{\sigma_{Nf}} \leq 1 \quad \sigma_{vm,m}^e < 0 \quad (11)$$

许用应力幅值 σ_{Nf} 可由 Basquin 方程求得

$$\sigma_{Nf} = \sigma'_f (2N_f)^b \quad (12)$$

式中， b 和 σ'_f 分别为材料的疲劳强度指数和疲劳强度系数。

2 柔顺机构疲劳约束拓扑优化模型

2.1 改进的 SIMP 插值模型

采用改进的固体各向同性材料惩罚模型(Solid isotropic material with penalization, SIMP)^[25]描述柔顺机构的材料分布，结构的单元弹性模量可表示为

$$E_e = E_{\min} + \rho_e^k (E_0 - E_{\min}) \quad 0 \leq \rho_e \leq 1 \quad (13)$$

式中， E_e 是单元 e 的弹性模量； k 是惩罚因子，取值为 3； $E_{\min}$ 是空洞材料的弹性模量； E_0 是实体材料的弹性模量。

2.2 拓扑优化模型

为了满足机构的运动要求，以柔顺机构的输出位移最大化作为优化目标函数；同时为了满足机构的疲劳要求，采用修正的 Goodman 准则评估柔顺机构的疲劳强度，将疲劳性能约束转化为两个应力约束，以疲劳性能和体积作为约束，建立考虑疲劳性能的柔顺机构拓扑优化模型为

$$\begin{aligned} \max \quad & U_{\text{out}} = \hat{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \\ \text{s.t.} \quad & g_{1,e} = \frac{\sigma_{vm,a}^e}{\sigma_{Nf}} + \frac{\sigma_{vm,m}^e}{\sigma_{ut}} \leq 1 \quad \sigma_{vm,m}^e \geq 0 \\ & g_{2,e} = \frac{\sigma_{vm,a}^e}{\sigma_{Nf}} \leq 1 \quad \sigma_{vm,m}^e < 0 \\ & \mathbf{F}_{\max} = \mathbf{K} \mathbf{U} \\ & \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{K} \hat{\mathbf{U}} \\ & V \leq f^* V^0 \\ & 0 \leq \rho_e \leq 1 \quad e = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (14)$$

式中， U_{out} 为柔顺机构的输出位移； $\hat{\mathbf{F}}$ 为作用在机构输出位移方向的虚拟单位载荷列阵， $\hat{\mathbf{U}}$ 为虚拟载荷 $\hat{\mathbf{F}}$ 作用产生的节点位移列阵； V 是优化后的结构体积， V^0 是优化前的材料体积， f^* 是允许的材料体积份数， N 为有限单元的数目。

由拓扑优化模型可知，疲劳约束具有局部性，

约束数目非常巨大, 灵敏度分析计算成本巨大。因此, 为了提高计算效率, 采用改进的 P 范数方法^[26]将两个不同的单元应力约束凝聚化成两个全局应力约束。对于任一应力约束 $g_{i,e}$ ($i=1, 2$), P 范数应力 $G_{i,PN}$ ($i=1, 2$) 可表示为

$$G_{i,PN} = \left[\sum_{e=1}^N \rho_e (g_{i,e})^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad i=1, 2 \quad (15)$$

式中, P 表示 P 范数参数, 取值为 8。

理论上, 当 P 趋近无穷大时, P 范数应力约束的数值近似等于应力约束的最大值; 但是 P 值越大, 容易导致应力约束问题的非线性越明显, 甚至求解困难, 故 P 值不能取太大。为了使 P 范数应力 $G_{i,PN}$ 更加接近应力约束的最大值 $g_{i,max}$, 采用自适应约束缩放技术^[27]修正 P 范数应力约束, 可表示为

$$g_{i,max} \approx \gamma_i G_{i,PN} \quad i=1, 2 \quad (16)$$

式中, γ_i 为自适应约束缩放系数。

当迭代步数为 n , $\gamma_i^{(n)}$ 自适应约束缩放系数可以由优化迭代过程的数据更新

$$\gamma_i^{(n)} = \alpha_i^{(n)} \frac{g_{i,max}^{(n-1)}}{g_{i,PN}^{(n-1)}} + (1 - \alpha_i^{(n)}) \gamma_i^{(n-1)} \quad i=1, 2 \quad (17)$$

式中, $\alpha_i^{(n)}$ 为控制参数; $g_{i,max}^{(n-1)}$ 和 $g_{i,PN}^{(n-1)}$ 分别为迭代步 $n-1$ 时的应力约束的最大值和 P 范数应力约束值; $\alpha_i^{(n)}$ 和 $\gamma_i^{(0)}$ 分别取值 0.5 和 1。

3 敏度分析和过滤技术

3.1 灵敏度分析

基于梯度的移动渐近算法^[28](Method of moving asymptotes, MMA)适用于复杂的多约束优化问题, 具有较好的稳定性、鲁棒性。本文采用 MMA 方法求解柔顺机构疲劳约束拓扑优化的多约束优化问题。

柔顺机构的目标函数对单元设计变量的灵敏度为

$$\frac{\partial U_{out}}{\partial \rho_e} = \frac{\partial \hat{U}^T}{\partial \rho_e} \mathbf{K} \mathbf{U} + \hat{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{U} + \hat{U}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_e} \quad (18)$$

有限元分析过程中, 输入端的外载荷与设计变量无关, 则由有限元平衡方程 $\mathbf{F}_{max} = \mathbf{K} \mathbf{U}$ 和 $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{K} \hat{\mathbf{U}}$, 式(18)可改写成

$$\frac{\partial U_{out}}{\partial \rho_e} = -\hat{\mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{U} \quad (19)$$

机构的体积约束对单元设计变量的灵敏度为

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_e} = \frac{\partial (\rho_e v_0)}{\partial \rho_e} = v_0 \quad (20)$$

式中, v_0 为实体单元的体积。

任一应力约束 $g_{i,max}$ 对单元设计变量的灵敏度表示为

$$\frac{dg_{i,max}}{d\rho_e} = \frac{\partial g_{i,max}}{\partial \rho_e} + \frac{\partial g_{i,max}}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_e} \quad (21)$$

根据有限元平衡方程($\mathbf{F}_{max} = \mathbf{K} \mathbf{U}$, $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{K} \tilde{\mathbf{U}}$), 式(21)可写成

$$\frac{dg_{i,max}}{d\rho_e} = \frac{\partial g_{i,max}}{\partial \rho_e} - \frac{\partial g_{i,max}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{K}^{-1} \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_e} \mathbf{U} \quad (22)$$

引入伴随矢量

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{\partial g_{i,max}}{\partial \mathbf{U}} \right)^T \quad (23)$$

则任一 $g_{i,max}$ 对单元设计变量的灵敏度为

$$\frac{dg_{i,max}}{d\rho_e} = \frac{\partial g_{i,max}}{\partial \rho_e} - \boldsymbol{\lambda}_e^T \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_e} \mathbf{u}_e \quad (24)$$

式中, $\boldsymbol{\lambda}_e$ 为单元的伴随矢量。

每项应力约束对单元设计变量 ρ_e 的偏导数 $\partial g_{i,max} / \partial \rho_e$ 可表示为

$$\frac{\partial g_{1,max}}{\partial \rho_e} \approx \gamma_1 \frac{\partial g_{1,PN}}{\partial g_{1,e}} \left(\frac{\partial g_{1,e}}{\partial \sigma_{vm,a}^e} \frac{\partial \sigma_{vm,a}^e}{\partial \sigma_a^e} c_a + \frac{\partial g_{1,e}}{\partial \sigma_{vm,m}^e} \frac{\partial \sigma_{vm,m}^e}{\partial \sigma_m^e} c_m \right) \frac{\partial \sigma_e}{\partial \rho_e} \quad (25)$$

$$\frac{\partial g_{2,max}}{\partial \rho_e} \approx \gamma_2 \frac{\partial g_{2,PN}}{\partial g_{2,e}} \left(\frac{\partial g_{2,e}}{\partial \sigma_{vm,a}^e} \frac{\partial \sigma_{vm,a}^e}{\partial \sigma_a^e} c_a \right) \frac{\partial \sigma_e}{\partial \rho_e} \quad (26)$$

每项应力约束对单元节点位移 $\mathbf{u}_e$ 的偏导数 $\partial g_{i,max} / \partial \mathbf{u}_e$ 可表示为

$$\frac{\partial g_{1,max}}{\partial \mathbf{u}_e} \approx \gamma_1 \frac{\partial g_{1,PN}}{\partial g_{1,e}} \left(\frac{\partial g_{1,e}}{\partial \sigma_{vm,a}^e} \frac{\partial \sigma_{vm,a}^e}{\partial \sigma_a^e} c_a + \frac{\partial g_{1,e}}{\partial \sigma_{vm,m}^e} \frac{\partial \sigma_{vm,m}^e}{\partial \sigma_m^e} c_m \right) \frac{\partial \sigma_e}{\partial \mathbf{u}_e} \quad (27)$$

$$\frac{\partial g_{2,max}}{\partial \mathbf{u}_e} \approx \gamma_2 \frac{\partial g_{2,PN}}{\partial g_{2,e}} \left(\frac{\partial g_{2,e}}{\partial \sigma_{vm,a}^e} \frac{\partial \sigma_{vm,a}^e}{\partial \sigma_a^e} c_a \right) \frac{\partial \sigma_e}{\partial \mathbf{u}_e} \quad (28)$$

P 范数全局应力约束对局部应力约束的偏导数为

$$\frac{\partial g_{i,PN}}{\partial g_{i,e}} = \left[\sum_{e=1}^N \rho_e (g_{i,e})^p \right]^{\frac{1}{p}-1} \rho_e (g_{i,e})^{p-1} \quad i=1, 2 \quad (29)$$

根据式(14)可得

$$\frac{\partial g_{1,e}}{\partial \sigma_{vm,a}^e} = \frac{1}{\sigma_{Nf}} \quad (30)$$

$$\frac{\partial g_{1,e}}{\partial \sigma_{vm,m}^e} = \frac{1}{\sigma_{ut}} \quad (31)$$

$$\frac{\partial g_{2,e}}{\partial \sigma_{vm,a}^e} = \frac{1}{\sigma_{Nf}} \quad (32)$$

von Mises 等效应力幅值对单元应力幅值和 von Mises 等效应力均值对单元应力均值的偏导分别为

$$\frac{\partial \sigma_{vm,a}^e}{\partial \sigma_a^e} = \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{vm,a}^e}{\partial \sigma_{x,a}^e} = \frac{1}{2\sigma_{vm,a}^e} (2\sigma_{x,a}^e - \partial \sigma_{y,a}^e) \\ \frac{\partial \sigma_{vm,a}^e}{\partial \sigma_{y,a}^e} = \frac{1}{2\sigma_{vm,a}^e} (2\sigma_{y,a}^e - \partial \sigma_{x,a}^e) \\ \frac{\partial \sigma_{vm,a}^e}{\partial \tau_a^e} = \frac{3\tau_a^e}{\sigma_{vm,a}^e} \end{cases} \quad (33)$$

$$\frac{\partial \sigma_{vm,m}^e}{\partial \sigma_m^e} = \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{vm,m}^e}{\partial \sigma_{x,m}^e} = \frac{1}{2\sigma_{vm,m}^e} (2\sigma_{x,m}^e - \partial \sigma_{y,m}^e) \\ \frac{\partial \sigma_{vm,m}^e}{\partial \sigma_{y,m}^e} = \frac{1}{2\sigma_{vm,m}^e} (2\sigma_{y,m}^e - \partial \sigma_{x,m}^e) \\ \frac{\partial \sigma_{vm,m}^e}{\partial \tau_m^e} = \frac{3\tau_m^e}{\sigma_{vm,m}^e} \end{cases} \quad (34)$$

由式(2)可得单元应力对设计变量和单元结点位移的偏导数分别为

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial \rho_e} = q(\rho_e)^{q-1} DBu_e \quad (35)$$

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial u_e} = (\rho_e)^q DB \quad (36)$$

根据式(13), 单元刚度矩阵对设计变量的灵敏度为

$$\frac{dK_e}{d\rho_e} = k(E_0 - E_{\min})\rho_e^{k-1}K_e^0 \quad (37)$$

式中, K_e^0 为充满实体材料单元的刚度矩阵。

3.2 过滤技术

采用 SIMP 方法进行柔顺机构拓扑优化设计, 获得的构型容易出现棋盘格和网格依赖等数值不稳定性现象, 引入密度过滤^[29]避免这些问题, 利用相邻单元密度加权平均获得过滤后的单元密度 $\tilde{\rho}_e$

$$\tilde{\rho}_e = \frac{\sum_{j \in \Omega_e} H_{ej} v_j \rho_j}{\sum_{j \in \Omega_e} H_{ej} v_j} \quad (38)$$

式中, Ω_e 为单元质心与单元 e 质心的距离不超过最小过滤半径 $r_{\min}$ 的所有单元集合; v_j 为单元 j 的体积; H_{ej} 为权重系数, 其可表示为

$$H_{ej} = \max(0, r_{\min} - \Delta_{e,j}) \quad (39)$$

式中, $\Delta_{e,j}$ 为单元 e 与单元 j 质心之间的距离。

采用密度过滤, 拓扑优化结果的边界仍然容易出现中间密度的灰度单元, 为了获得更加清晰的拓扑结构, 采用光滑的 Heaviside 映射函数^[30]修正过滤后的单元密度, 从而使得单元密度变量向 0 和 1 两端集中。

$$\hat{\rho}_e = \frac{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(\tilde{\rho}_e - \eta))}{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(1 - \eta))} \quad (40)$$

式中, $\hat{\rho}_e$ 为映射变量; η 为阈值, η 取值为 0.5; β 为控制光滑映射的参数。

4 数值算例

本节中, 考虑疲劳性能的柔顺机构拓扑优化设计方法采用 Matlab 软件编程实现。选取柔性夹持器和咬合机构两个数值算例来验证提出方法的有效性。所有数值算例中, 材料的弹性模量 E_0 为 203 GPa, 泊松比 μ 为 0.3, 拉伸强度 σ_{ut} 为 300 MPa, 疲劳强度系数 σ'_f 为 300 MPa, 疲劳强度指数 b 为 -0.075; 设计变量过滤半径 $r_{\min}$ 为 3.0, 允许的材料体积份数 f^* 为 0.25, 设计变量的初始值为 0.25。

4.1 柔性夹持器

夹持器的设计域、作用载荷及边界条件如图 3 所示, 设计域尺寸为 8 mm×8 mm, 左边的上下两端固定, 正弦载荷施加在左边中点。输入端弹簧刚度 k_{in} 和输出端弹簧刚度 k_{out} 分别为 1.0×10^2 N/mm, 和 1.5×10^2 N/mm, 将夹持器的设计域离散成 3 200 个平面四节点单元。

图3 柔性夹持器的设计域

为了验证提出方法的有效性, 将考虑疲劳约束的柔顺机构拓扑优化结果与无疲劳约束的拓扑优化设计结果进行对比, 无疲劳约束的柔顺机构拓扑优化设计为仅考虑体积约束的设计, 作用载荷的大小为 $F_{\max}$, 其他设置参数均相同, 在对应相同的正弦载荷条件下, 采用修正的 Goodman 图对无疲劳约束获得的

拓扑结构进行评价。当 $F_{\max}=1.5\text{ N}$ 和 $F_{\min}=-0.9\text{ N}$ (负号表示载荷方向相反) 的正弦载荷作用下, 考虑疲劳性能约束的夹持器拓扑优化结果如图 4 所示, 无疲劳约束的夹持器拓扑优化结果如图 5 所示。

图 4 考虑疲劳性能约束的夹持器拓扑优化
($F_{\max}=1.5\text{ N}$, $F_{\min}=-0.9\text{ N}$)

图 5 无疲劳约束的夹持器拓扑优化
($F_{\max}=1.5\text{ N}$, $F_{\min}=-0.9\text{ N}$)

无疲劳约束拓扑优化获得的夹持器拓扑构型出现了明显的类铰链, 类铰链区域出现应力集中现象, 应力分布极不均匀, 最大应力为 444.781 MPa , 由

修正的 Goodman 图(图 5c)和表 1 可知获得的夹持器拓扑构型的 von Mises 应力超出了修正的 Goodman 图中的安全区域, 因此获得的夹持器不能满足疲劳要求。与无疲劳约束的优化结果相比, 考虑疲劳约束的拓扑优化获得的夹持器拓扑构型有所不同, 不存在类铰链结构, 且有效地抑制应力集中现象, 使得应力分布更加均匀, 最大的 von Mises 应力为 105.162 MPa , 由修正的 Goodman 图(图 4c)和表 1 可知, 夹持器拓扑构型很好地满足修正的 Goodman 疲劳准则, 因此能够满足疲劳要求, 这表明在设计给定载荷条件下, 机构的疲劳寿命为无限寿命。对比有、无疲劳约束的优化结果, 考虑疲劳约束获得的夹持器的输出位移有所减少, 这是由于疲劳约束对输出位移最大化有一定程度上的限制。

表 1 不同优化模型的夹持器拓扑优化结果

参数	无疲劳约束的拓扑优化	考虑疲劳约束的拓扑优化
输出位移/ μm	4.149	3.743
应力约束 $g_{1,\max}$	3.888	0.979
应力约束 $g_{2,\max}$	4.185	0.996
最大应力值/MPa	444.781	105.162

考虑不同载荷变化范围对拓扑优化结果的影响, 再选取载荷峰值和谷值为 $F_{\max}=1.5\text{ N}$ 和 $F_{\min}=-0.6\text{ N}$ 、 $F_{\max}=1.5\text{ N}$ 和 $F_{\min}=-0.3\text{ N}$ 的两种正弦载荷条件下进行考虑疲劳约束的夹持器拓扑优化设计, 优化结果分别如图 6 和图 7 所示, 获得的夹

图 6 考虑疲劳性能约束的夹持器拓扑优化
($F_{\max}=1.5\text{ N}$, $F_{\min}=-0.6\text{ N}$)

图 7 考虑疲劳性能约束的夹持器拓扑优化
($F_{\max}=1.5\text{ N}$, $F_{\min}=-0.3\text{ N}$)

持器拓扑构型没有出现类铰链, 能够有效地抑制应力集中现象。由修正的 Goodman 图(图 6c 和图 7c)和表 2 可知, 两种正弦载荷条件获得的夹持器拓扑构型都很好满足修正的 Goodman 疲劳准则, 因此均能够满足疲劳要求, 对比 $F_{\max}=1.5\text{ N}$ 和 $F_{\min}=-0.9\text{ N}$ 、 $F_{\max}=1.5\text{ N}$ 和 $F_{\min}=-0.9\text{ N}$ 和 $F_{\min}=-0.3\text{ N}$ 三种不同正弦载荷条件获得的夹持器, 当正弦载荷变动范围更大时, 机构的最大应力值更小, 应力分布更加均匀。

表 2 不同载荷条件下疲劳约束的夹持器拓扑优化结果

不同的正弦载荷	输出位移/ μm	应力约束 $g_{1,\max}$	应力约束 $g_{2,\max}$	最大应力值/MPa
$F_{\max}=1.5\text{ N}$ $F_{\min}=-0.9\text{ N}$	3.743	0.979	0.996	105.162
$F_{\max}=1.5\text{ N}$ $F_{\min}=-0.6\text{ N}$	3.970	0.999	0.948	115.034
$F_{\max}=1.5\text{ N}$ $F_{\min}=-0.3\text{ N}$	3.954	0.999	1.000	141.672

4.2 柔性咬合机构

咬合机构的设计域、作用载荷及边界条件如图 8 所示, 设计域尺寸为 $10\text{ mm}\times 10\text{ mm}$, 左边的上、下两端固定, 正弦载荷施加在左边中点。输入的弹簧刚度 k_{in} 和输出的弹簧刚度 k_{out} 均为 $1.0\times 10^2\text{ N/mm}$, 将咬合机构的设计域离散成 5 000 个平面四节点单元。

图 8 咬合机构的设计域

同样, 进行有、无考虑疲劳约束的咬合机构拓扑优化设计。当 $F_{\max}=3.5\text{ N}$ 和 $F_{\min}=-2.1\text{ N}$ 的正弦载荷作用时, 考虑疲劳约束的咬合机构拓扑优化结果如图 9 所示, 无疲劳约束的咬合机构拓扑优化结果如图 10 所示。无疲劳约束优化获得的咬合机构拓扑构型存在类铰链, 出现明显的应力集中现象, 应力分布极不均匀, 最大的 von Mises 应力为 213.774 MPa, 由修正的 Goodman 图(图 10c)和表 3 可知获得的咬合机构拓扑构型的 von Mises 应力超出了修正的 Goodman 图中的安全区域, 获得的咬合机构不能满足疲劳要求。与无疲劳约束的优化结果相比, 考虑疲劳约束的拓扑优化获得的咬合机构拓扑构型

图 9 考虑疲劳性能约束的咬合机构拓扑优化
($F_{\max}=3.5\text{ N}$, $F_{\min}=-2.1\text{ N}$)

图 10 无疲劳约束的咬合机构拓扑优化
($F_{\max}=3.5\text{ N}$, $F_{\min}=-2.1\text{ N}$)

有所不同,不存在类铰链结构,且有效地抑制应力集中现象,使得应力分布更加均匀,最大的 von Mises 应力为 105.905 MPa,由修正的 Goodman 图(图 9c)和表 3 可知,咬合机构拓扑构型很好地满足修正的 Goodman 疲劳准则,因此能够满足疲劳要求,这也表明在设计给定载荷条件下,机构的疲劳寿命为无限寿命。对比有、无疲劳约束的优化结果,考虑疲劳约束获得的咬合机构的输出位移有所减少,这是由于疲劳约束对咬合机构的输出位移最大化有一定程度上的限制。

表 3 不同优化模型的咬合机构拓扑优化结果

参数	无疲劳约束的拓扑优化	考虑疲劳约束的拓扑优化
输出位移/ μm	6.771	6.635
应力约束 $g_{1,\max}$	1.867	0.970
应力约束 $g_{2,\max}$	2.009	0.999
最大应力值/MPa	213.774	105.905

考虑不同载荷变化范围对拓扑优化结果的影响,再选取载荷峰值和谷值为 $F_{\max}=3.5\text{ N}$ 和 $F_{\min}=-1.4\text{ N}$ 、 $F_{\max}=3.5\text{ N}$ 和 $F_{\min}=-0.7\text{ N}$ 的两种正弦载荷条件下进行考虑疲劳约束的咬合机构拓扑优化设计,优化结果分别如图 11 和图 12 所示,获得的咬合机构拓扑构型不存在类铰链结构,能够有效地抑制了应力集中现象。由修正的 Goodman 图(图 11c 和图 12c)和表 4 可知,两种正弦载荷条件获得

的咬合机构拓扑构型都很好地满足修正的 Goodman 疲劳准则,对比 $F_{\max}=3.5\text{ N}$ 和 $F_{\min}=-2.1\text{ N}$ 、 $F_{\max}=3.5\text{ N}$ 和 $F_{\min}=-1.4\text{ N}$ 、 $F_{\max}=3.5\text{ N}$ 和 $F_{\min}=-0.7\text{ N}$ 三种不同正弦载荷条件获得的咬合机构,当正弦载荷变动范围更大时,机构的最大应力值更小,应力分布更加均匀。

图 11 考虑疲劳性能约束的咬合机构拓扑优化
($F_{\max}=3.5\text{ N}$, $F_{\min}=-1.4\text{ N}$)

图 12 考虑疲劳性能约束的咬合机构拓扑优化
($F_{\max}=3.5\text{ N}$, $F_{\min}=-0.7\text{ N}$)

表 4 不同载荷条件下疲劳约束的咬合机构拓扑优化结果

不同的正弦载 荷	输出位移 / μm	应力约束 $g_{1,\max}$	应力约束 $g_{2,\max}$	最大应力值 /MPa
$F_{\max} = 3.5 \text{ N}$ $F_{\min} = -2.1 \text{ N}$	6.635	0.970	0.999	105.905
$F_{\max} = 3.5 \text{ N}$ $F_{\min} = -1.4 \text{ N}$	6.682	0.921	0.999	121.389
$F_{\max} = 3.5 \text{ N}$ $F_{\min} = -0.7 \text{ N}$	6.743	0.912	1.000	141.772

5 结论

(1) 针对柔顺机构多次往复运动容易导致疲劳失效的问题,采用修正的 Goodman 准则构建柔顺机构的疲劳性能约束,利用改进的 P 范数方法进行疲劳约束凝聚,提出一种考虑疲劳性能约束的柔顺机构拓扑优化设计方法。

(2) 与无疲劳约束拓扑优化相比,疲劳约束拓扑优化获得的柔顺机构构型有很大不同,机构的 von Mises 等效应力分布在修正的 Goodman 图中的安全区域内,能够满足疲劳要求,并且有效地抑制类铰链结构,避免了应力集中现象,但是机构的输出位移有所减少。

(3) 不同的正弦载荷条件拓扑优化获得柔顺机构构型有所不同,均能够很好地满足疲劳性能要求;在最大载荷值不变条件下,当正弦载荷变动范围更大时,获得的柔顺机构的最大应力值更小,应力分布更加均匀。

所提方法为实现考虑疲劳性能约束的柔顺机构设计提供一种新的思路。未来工作将在本文基础上,开展柔顺机构多性能约束拓扑优化设计问题的研究。

参 考 文 献

- [1] 于靖军,郝广波,陈贵敏,等. 柔性机构及其应用研究进展[J]. 机械工程学报, 2015, 51(13): 53-68.
YU Jingjun, HAO Guangbo, CHEN Guimin, et al. State-of-art of compliant mechanisms and their applications[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(13): 53-68.
- [2] 杜义贤,李涵钊,谢黄海,等. 基于序列插值模型和多重网格方法的多材料柔性机构拓扑优化[J]. 机械工程学报, 2018, 54(13): 47-56.
DU Yixian, LI Hanzhao, XIE Huanghai, et al. Topology optimization of multiple materials compliant mechanisms based on sequence interpolation model and multigrid[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(13): 47-56.
- [3] ZHU B, ZHANG X, LIU M, et al. Topological and shape optimization of flexure hinges for designing compliant mechanisms using the level set method[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2019, 32(1): 1-12.
- [4] CHEN G, HOWELL L L. Symmetric equations for evaluating maximum torsion stress of rectangular beams in compliant mechanisms[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2018, 31(1): 1-7.
- [5] ZHU B, ZHANG X, ZHANG H, et al. Design of compliant mechanisms using continuum topology optimization: A review[J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 143(1): 103622.
- [6] LIU M, ZHAN J, ZHU B, et al. Topology optimization of compliant mechanism considering actual output displacement using adaptive output spring stiffness[J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 143(4): 103728.
- [7] HOWELL L L. Compliant Mechanisms[M]. New York: A Wiley-interscience Publication, 2001.
- [8] ANANTHASURESH G K, KOTA S, KIKUCHI N. Strategies for systematic synthesis of compliant MEMS[C]// American Society of Mechanical Engineers. International Mechanical Engineering Congress and Exposition, New York: ASME, 1994: 677-686.
- [9] 张宪民,汪启亮. 柔顺机构疲劳可靠性及损伤识别研究进展[J]. 华南理工大学学报, 2012, 40(10): 190-197.
ZHANG Xianmin, WANG Qiliang. Research progress of fatigue reliability and damage identification of compliant mechanisms[J]. Journal of South China University of Technology, 2012, 40(10): 190-197.
- [10] 占金青,龙良明,刘敏,等. 基于最大应力约束的柔顺机构拓扑优化设计[J]. 机械工程学报, 2018, 54(23): 32-38.
ZHAN Jinqing, LONG Liangming, LIU Min, et al. Topological design of compliant mechanisms with maximum stress constraint[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(23): 32-38.
- [11] LEON D M D, ALEXANDERSEN J, FONSECA J S O, et al. Stress-constrained topology optimization for compliant mechanism design[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2015, 52(5): 1-15.
- [12] DIRKSEN F, ANSELMANN M, ZOHDİ T I, et al. Incorporation of flexural hinge fatigue-life cycle criteria into the topological design of compliant small-scale devices[J]. Precision Engineering, 2013, 37(3): 531-541.
- [13] LIANG J, LI R, BAI S, et al. Compliance and fatigue life analysis of U-shape flexure hinge[J]. Mechanika. 2019,

- 25(6): 501-510.
- [14] IVANOV I, CORVES B. Fatigue testing of flexure hinges for the purpose of the development of a high-precision micro manipulator[J]. *Mechanical Sciences*, 2014, 5(2): 59-66.
- [15] 李海燕, 张宪民, 彭惠青. 柔顺机构的疲劳可靠性优化设计[J]. *中国机械工程*, 2004, 15(23): 2130-2133.
- LI Haiyan, ZHANG Xianmin, PENG Huiqing. Optimal design of compliant mechanism based on fatigue reliability[J]. *China Mechanical Engineering*, 2004, 15(23): 2130-2133.
- [16] WANG Q, ZHANG X. Fatigue reliability based optimal design of planar compliant micropositioning stages[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2015, 86(10): 105117.
- [17] SHERIF K, WITTEVEEN W, PUCHNER K, et al. Efficient topology optimization of large dynamic finite element systems using fatigue[J]. *AIAA Journal*, 2010, 48(7): 1339-1347.
- [18] HOLMBERG E, TORSTENFELT B, KLARBRING A. Fatigue constrained topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2014, 50(2): 207-219.
- [19] OEST J, LUND E. Topology optimization with finite-life fatigue constraints[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2017, 56(5): 1045-1049.
- [20] COLLET M, BRUGGI M, DUYSINX P. Topology optimization for minimum weight with compliance and simplified nominal stress constraints for fatigue resistance[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2017, 55(3): 839-855.
- [21] NABAKI K, SHEN J, HUANG X. Evolutionary topology optimization of continuum structures considering fatigue failure[J]. *Materials and Design*, 2019, 166(3): 107586.
- [22] 叶红玲, 苏鹏飞, 王伟伟, 等. 疲劳寿命约束下的连续体结构拓扑优化[J]. *北京工业大学学报*, 2020, 46(3): 94-102.
- YE Hongling, SU Pengfei, WANG Weiwei, et al. Continuum topology optimization with fatigue life constraint[J]. *Journal of Beijing University of Technology*, 2020, 46(3): 94-102.
- [23] LEE K, AHN K, YOO J. A novel P-norm correction method for lightweight topology optimization under maximum stress constraints[J]. *Computers and Structures*, 2016, 171(7): 18-30.
- [24] LI B, JIANG C, HAN X, et al. A new approach of fatigue life prediction for metallic materials under multiaxial loading[J]. *International Journal of Fatigue*, 2015, 78(9): 1-10.
- [25] 荣见华, 赵圣佺, 李方义, 等. 涉及空腔制造的最小长度尺寸限制的清晰结构拓扑优化设计[J]. *机械工程学报*, 2019, 55(19): 174-185.
- RONG Jianhua, ZHAO Shenning, LI Fangyi, et al. Clear structural topology optimization designs including minimum allowable length scale limit on fabrication holes[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2019, 55(19): 174-185.
- [26] XU B, HAN Y, ZHAO L. Bi-directional evolutionary topology optimization of geometrically nonlinear continuum structures with stress constraints[J]. *Applied Mathematical Modelling* 2020, 80(4): 771-791.
- [27] KIYONO C Y, VATANABE S L, SILVA E C N, et al. A new multi-p-norm formulation approach for stress-based topology optimization design[J]. *Composite Structures*, 2016, 156(11): 10-19.
- [28] SVANBERG K. The method of moving ssymptotes-a new method for structural optimization[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, 24(2): 359-373.
- [29] 吴一帆, 郑百林, 何旅洋, 等. 结构拓扑优化变密度法的灰度单元等效转换方法[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2017, 29(4): 759-767.
- WU Yifan, ZHENG Bailin, HE lüyang, et al. Equivalent conversion method of gray-scale elements for SIMP in structures topology optimization[J]. *Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics*, 2017, 29(4): 759-767.
- [30] WANG F, LAZAROV B S, SIGMUND O. On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, 43(6): 767-78.

作者简介: 占金青, 男, 1979 年出生, 博士, 副教授。主要研究方向为柔顺机构优化设计。

E-mail: zhan_jq@126.com

刘天舒, 男, 1994 年出生, 硕士研究生。主要研究方向为柔顺机构拓扑优化设计。

E-mail: liutianshu66@163.com

刘敏(通信作者), 男, 1990 年出生, 博士, 讲师。主要研究方向为柔性铰链优化设计。

E-mail: lmin2016@foxmail.com

朱本亮, 男, 1986 年出生, 博士, 副教授。主要研究方向为柔顺机构拓扑优化理论与方法。

E-mail: meblzhu@scut.edu.cn