DOI: 10.3901/JME.2019.05.053

一种零耦合度且运动解耦的新型 3T1R 并联操作手 2-(RPa3R)3R 的设计及其运动学*

沈惠平 许 可 杨廷力 邓嘉鸣
(常州大学现代机构学研究中心 常州 213016)

摘要: 零耦合度($\kappa=0$)及输入-输出运动解耦的三平移-转动(3T1R)并联机构, 不仅运动学、动力学分析简单, 而且运动控制与轨迹规划容易, 因而在制造业中具有潜在的运用前景。根据基于方位特征(POC)方程的并联机构拓扑结构设计理论和方法, 设计出一种零耦合度且部分运动解耦的新型 3T1R 并联操作手 2-(RPa3R)3R, 并对之进行拓扑特性分析, 给出了其方位特征 POC、自由度 DOF、耦合度 κ 等主要拓扑特征; 基于序单开链(SOC)的运动学建模原理, 给出了该机构位置正解求解的封闭形代数方程, 并求得数值解; 基于导出的机构位置反解公式, 分析了机构产生三种奇异的几何条件; 同时, 求解了机构的工作空间和转动能力; 给出了该操作手机械结构设计的三维 CAD 模型。研究成果为该操作手的运动尺寸优化、样机研发以及动力学研究奠定了理论基础。

关键词: 并联机构; 3T1R; 耦合度; 运动解耦; 奇异性; 工作空间; 转动能力

中图分类号: TH112

New 3T1R Parallel Manipulator 2-(RPa3R)3R with Zero Coupling Degree and Partial Decoupling: Design and Kinematics

SHEN Huiping XU Ke YANG Tingli DENG Jiaming
(School of Mechanical Engineering, Changzhou University, Changzhou 213016)

Abstract: A parallel manipulator (PM) with three-translation and one-rotation (3T1R) output, possessing zero coupling degree and partial input-output motion decoupling (I-O decoupling), can not only make the analyses of kinematics and dynamics simple, but also simplify the motion control and path planning. These PMs have potential applications in the manufacturing. A new 3T1R PM with zero coupling degree and partial motion-decoupling is designed, i.e., 2-(RPa3R)3R, according to the design theory for parallel mechanism topology based on position and orientation characteristics (POC) equation. The key topological properties such as POC, degrees of freedom DOF, coupling degree κ are analyzed. The closed-form direct position algebraic equations of the PM are derived by using the modeling principle based on the ordered single-open-chain(SOC) proposed in an earlier work, and the solutions for direct position of this PM are solved. In addition, the geometrical conditions of three types of singularity are analyzed based on the inverse kinematics derived, and the workspace, rotation ability and singularity of this PM are also derived. The CAD model of mechanical design for the prototype of the PM are finished. All of this work lays the foundation for dimension optimization, prototype design and dynamics research of the new PM.

Key words: parallel mechanism; 3T1R; coupling degree; motion decoupling; singularity; workspace; rotation ability

0 前言

4 自由度三平移-转动(3T1R)并联操作手在现代制造业的抓取、搬运、传送等中, 具有很好的运用前景。一方面, 一些学者提出、设计了一些著名

且已应用的 3T1R 并联操作手。PIERROT 等提出了一类可实现 3T1R 的并联机器人, 如 H4^[1]、I4^[2]、I4R^[3]、Par4^[4]、Heli4^[5], 这五种机器人具有不同的动平台结构, 其中, H4 机构(1999 年)在其用两个转动副连接的动平台上, 安装一对齿轮, 以增大动平台的转动角度; I4 机构(2003 年)则将安装在两子平台末端的转动副换成移动副, 用齿轮齿条, 获得较大的动平台转动能力; I4R 机构(2004

* 国家自然科学基金(51375062, 514755050)和江苏省重点研发计划(BE2015043)资助项目。20180321 收到初稿, 20180910 收到修改稿

年)则在 I4 的基础上作进一步改进,将两子平台末端两个移动副合并为一个移动副,以减轻动平台负载;Par4 机构(2005 年)则在 H4 和 I4 的基础上,直接用两个构件连接两个子平台,不仅具有 H4 和 I4 的优点,而且简化了运动学分析;Heli4 机构(2006 年)采用双层平台结构,两平台之间分别用螺旋副和转动副连接,使动平台结构更加紧凑、对称;赵铁石等^[6]提出了一种 4-URU 型 3T1R 并联机器人构型(2000 年);杨廷力^[7]基于单开链理论提出了一类 3T1R 并联构型(2001 年);孔宪文等^[8]基于螺旋理论,通过构建可产生 3T1R 运动的运动支链,综合出了一组具有相同支链的并联机构(2004 年);黄田等^[9]研发了三种称之为 CrossIV 的 3T1R 型高速并联机械手(2012 年);刘辛军等^[10]研制出具有一个动平台的 X4 型并联机器人样机(2012 年);但这些已有的 3T1R 并联机构,耦合度高^[7],均为 $\kappa=2$,且很少具有输入-输出运动解耦性(简称:运动解耦),因而其运动学正解、运动控制与轨迹规划较为复杂。

另一方面,一些学者研究并联机构的运动解耦特性,已提出具有部分运动解耦或完全解耦的并联机构,例,二自由度的二转动^[11];三自由度的一平移二转动^[12]、三平移^[13]、XYZ 并联弹性机构^[14]、2R-3R-4R 球面^[15];四自由度的二平移二转动^[16]、三平移一转动^[17];五自由度的三平移两转动^[18],以及六自由度并联机构^[19]。文献[20]提出了基于基本运动链(BKC)合成与分解、基于子并联机构等效支链、基于合理选取基点,以及基于移动副平行/垂直配置等 4 种运动解耦设计方法,并设计了 15 个运动解耦并联机构。

总的说来,具有运动解耦的 3T1R 并联构型还较少报导,其中,FlexPicker^[21]的 SCARA 并联机器人具有部分运动解耦性,它是在 Delta 机构的基础上,附加了一条 RUPU 支链,以实现末端操作手绕动平台法线的转动。因此,提出低耦合度($k=0$ 或 1)且运动解耦的、新型 3T1R 并联机构具有学术意义和使用价值。

作者根据基于 POC 方程的并联机构拓扑结构设计理论^[22-24],首先,设计出一种零耦合度且运动解耦的 3T1R 并联操作手,简记为 2-(RPa3R)3R;接着,对该操作手进行拓扑特征分析,证明该机构动平台具有三平移一转动输出,且耦合度为零;然后,对其进行运动学分析,包括:求得该机构位置正解求解的封闭方程及数值解,计算机机构奇异性条件及动平台的工作空间、转角大小;最后,给出了样机的三维 CAD 模型。

1 机构设计及其拓扑特征分析

1.1 机构结构与组成

本文提出的零耦合度及运动解耦型 3T1R 并联操作手 2-(RPa3R)3R,如图 1 所示^[25]。静平台 0 与动平台 1 用两条相同的混合支链(HSOC)联接,每条混合支链中的 1 个转动副(R_{11})串联一个由 4 个球副(S_1, S_2, S_3, S_4)组成的平行四边形,记作 RPa,并和三个轴线平行的转动副($R_{21}||R_{22}||R_{23}$)并联构成一个子并联机构(RPa3R),且两个球副 S_3S_4 的连线和转动副 R_{12} 轴线共线,但垂直于转动副 R_{23} 的轴线;再和三个转动副组成的子串($R_{12}||R_{13}\perp R_{14}$)串联而成一条混合支链,记为(RPa3R)3R。

图 1 新型 3T1R 并联操作手 2-(RPa3R)3R

静平台 0 上 4 个转动副 R_{11} 、 R_{21} 、 R_{31} 、 R_{41} 为驱动副,且 $R_{11}\perp R_{41}$, $R_{11}\perp R_{21}$, $R_{41}\perp R_{31}$;动平台 1 上的两个转动副为 $R_{14}||R_{44}$,且与动平台 1 的法线平行。

这里,符号 $||$ 、 $\perp$ 分别代表平行、垂直,下同。

1.2 机构拓扑特性分析的理论

为阐述方便、系统,本节给出机构拓扑特性分析的基本理论与方法^[22-24]。

1.2.1 机构的 POC 集

串联、并联机构的 POC 集方程分别为

$$M_{bi} = \bigcup_{i=1}^m M_{ji} \quad (1)$$

$$M_{Pa} = \bigcap_{i=1}^n M_{bi} \quad (2)$$

式中 M_{ji} ——第 i 个运动副的 POC 集;
 M_{bi} ——第 i 条支链末端的 POC 集;
 M_{Pa} ——机构动平台的 POC 集。

1.2.2 自由度公式

并联机构的 DOF 公式为

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{L_j} \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^v \xi_{L_j} = \dim. \left\{ \left(\bigcap_{i=1}^j M_{b_i} \right) \cup M_{b_{(j+1)}} \right\} \quad (4)$$

式中 F ——机构自由度；

f_i ——第 i 个运动副的自由度；

m ——机构所含的运动副数；

v ——独立回路数($v=m-n+1$, n 为构件数)；

ξ_{L_j} ——第 j 个回路的独立位移方程数；

$\bigcap_{i=1}^j M_{b_i}$ ——前 j 条支链组成的子并联机构 POC 集；

$M_{b(j+1)}$ ——第 $j+1$ 条支链末端构件的 POC 集。

1.2.3 耦合度

根据基于序单开链(SOC)单元的机构组成原理^[23], 任一机构可分解为一系列单开链, 第 j 个单开链(SOC _{j})的约束度为

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m_j} f_i - I_j - \xi_{L_j} = \begin{cases} \Delta_j^- = -5, -4, -3, -2, -1 \\ \Delta_j^0 = 0 \\ \Delta_j^+ = +1, +2, +3, \dots \end{cases} \quad (5)$$

式中 m_j ——第 j 个 SOC _{j} 的运动副数；

I_j ——第 j 个 SOC _{j} 的驱动副数。

进一步, 一组有序的 v 个 SOC 可构成一个独立回路数为 v 的基本运动链(Basic kinematics chain, BKC), 对一个 BKC 而言, 须

$$\sum_{j=1}^v \Delta_j = 0$$

因此, 一个 BKC 的耦合度为

$$\kappa = \Delta_j^+ = |\Delta_j^-| = \frac{1}{2} \min \left\{ \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right\} \quad (6)$$

式中, $\min \left\{ \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right\}$ 为 BKC 分解为 v 个 SOC(Δ_j) 的多个方案中的 $(\sum |\Delta_j|)$ 为最小者。

耦合度 κ 的物理含义如下。

(1) 当 BKC 的 $\kappa=0$ 时, 该 BKC 的正向运动学和逆向动力学可独立求解。

(2) 当 BKC 的 $\kappa>0$ 时, 该 BKC 的正向运动学和逆向动力学分析需要多个回路联立才能求解, 而耦合度 κ 恰为多个联立方程的最少变量(维数)。因此, κ 值越大, 机构的运动学、动力学分析越复杂^[24, 26]。

1.2.4 输入-输出运动解耦性

(1) 当动平台的每个方位变量($x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$)为所有运动输入 $\theta_1, \dots, \theta_r$ 的函数时, 机构运动输入-输出变量之间不存在解耦性; 当动平台的部分方位变量, 只是部分运动输入变量 $\theta_1, \dots, \theta_r$ ($r < F$) 的函数时, 机构运动输入-输出变量之间存在部分解耦性。

(2) 当机构运动输入-输出变量之间存在一一对应关系时, 具有完全解耦性, 如式(7a)所示; 也可表示为三角化形式, 如式(7b)所示

$$M_{Pa} = \begin{bmatrix} x(\theta_1) & y(\theta_2) & z(\theta_3) \\ \alpha(\theta_3) & \beta(\theta_4) & \gamma(\theta_5) \end{bmatrix} \quad (7a)$$

$$M_{Pa} = \begin{bmatrix} x(\theta_1) & y(\theta_1, \theta_2) & z(\theta_1 \sim \theta_3) \\ \alpha(\theta_1 \sim \theta_4) & \beta(\theta_1 \sim \theta_5) & \gamma(\theta_1 \sim \theta_6) \end{bmatrix} \quad (7b)$$

1.3 确定机构动平台的 POC 集

(1) 机构拓扑结构。根据机构拓扑结构的符号表示方法^[22-24], 混合支链中的子并联机构的两条支链的拓扑结构, 可记为 SOC $\{-R_{11}-P^{(4S)}-P^{(4S)}-R^{(4S)}-R^{(4S)}-\}$, SOC $\{-R_{21} \parallel R_{22} \parallel R_{23}-\}$ (注: 由 4 个球副 S 构成的平行四边形, 等效于产生 2 个平移(P)和 2 个转动(R), 记为 $P^{(4S)}$ 和 $R^{(4S)}$)。

而上部的三个串联转动副的拓扑结构表示为 SOC $\{-R_{12} \parallel R_{13} \perp R_{14}-\}$ 。

(2) 选定动平台 1 上的基点 O' 。

(3) 确定两条混合支链 HSOC 末端构件的 POC 集。设 H_1 、 H_2 分别为子并联机构输出杆上的点, 则 H_1 及三个串联运动副组末端的 POC 集, 由式(1)、(2), 分别得

$$M_{H_1} = \left(\begin{bmatrix} t^1(\perp R_{11}) \\ r^1(\parallel R_{11}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^2 \\ r^2 \end{bmatrix} \right) \cap \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{21}) \\ r^1(\parallel R_{21}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{21}) \\ r^0 \end{bmatrix}$$

$$M_{3R} = \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{12}) \\ r^1(\parallel R_{12}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^1(\perp R_{14}) \\ r^1(\parallel R_{14}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{12}) \cup r^1(\parallel R_{14}) \end{bmatrix}$$

这表明: H_1 点只能在平面 oyz 上作两维平移, 即动平台 1 上运动副 R_{14} 在 y 轴上的位置, 仅由运动副 R_{11} 、 R_{21} 决定。因此, HSOC₁ 末端的 POC 集为

$$M_{HSOC_1} = M_{H_1} \cup M_{3R} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{12}) \cup r^1(\parallel R_{14}) \end{bmatrix}$$

同样, 可得 HSOC₂ 末端的 POC 集为

$$M_{\text{HSOC}_2} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{42}) \cup r^1(\parallel R_{44}) \end{bmatrix}$$

(4) 确定动平台的 POC 集

$$M_{pa} = M_{\text{HSOC}_1} \cap M_{\text{HSOC}_2} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{14}) \end{bmatrix}$$

因此, 动平台 1 可产生三个平移和一个绕转动副 R_{14} 轴线的转动。

1.4 确定机构自由度 DOF

确定第一个回路的独立位移方程数 ξ_{L_1} 。第一个回路为图 1 中的左侧子并联机构, 由式(4)得

$$\xi_{L_1} = \dim \left\{ \begin{bmatrix} t^1(\perp R_{11}) \\ r^1(\parallel R_{11}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^2 \\ r^2 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{21}) \\ r^1(\parallel R_{21}) \end{bmatrix} \right\} = 6$$

由式(3)得该子并联机构的自由度为

$$F_{(1-2)} = \sum_{i=1}^5 f_i - \sum_{j=1}^1 \xi_{L_j} = 8 - 6 = 2$$

确定第二个回路的独立位移方程数 ξ_{L_2} 。第二个回路为图 1 中的右侧子并联机构, 同样有

$$\xi_{L_2} = \xi_{L_1} = 6$$

由式(3)得第二个子并联机构的自由度为

$$F_{(1-3)} = \sum_{i=1}^{10} f_i - \sum_{j=1}^2 \xi_{L_j} = 16 - 12 = 4$$

确定第三个回路的独立位移方程数 ξ_{L_3} 。第三个独立回路由上述两个子并联机构和 $R_{12} \perp R_{13} \perp R_{14} \parallel R_{44} \perp R_{43} \parallel R_{42}$ 组成, 由式(4)得

$$\xi_{L_3} = \dim \left\{ (M_{H_1} \cap M_{H_2}) \cup M_{3R} \cup M_{3R} \right\} = 6$$

因此, 由式(3), 该机构的自由度为

$$F = \sum_{i=1}^{16} f_i - \sum_{j=1}^3 \xi_{L_j} = 22 - (6 + 6 + 6) = 4$$

当若取机架上的四个转动副为主动副 R_{11} 、 R_{21} 、 R_{31} 、 R_{41} 时, 动平台 1 即产生 3T1R 的输出运动。

1.5 确定机构耦合度 κ

由式(5), 该机构包含的三条单开链及其约束度分别为

$$\text{SOC}_1 \{ R_{11} - P^{(4S)} - P^{(4S)} - R^{(4S)} - R^{(4S)} - R_{23} \parallel R_{22} \parallel R_{21} \}$$

$$A_1 = \sum_{i=1}^5 f_i - I_1 - \xi_{L_1} = 8 - 2 - 6 = 0$$

$$\text{SOC}_2 \{ R_{41} - P^{(4S)} - P^{(4S)} - R^{(4S)} - R^{(4S)} - R_{33} \parallel R_{32} \parallel R_{31} \}$$

$$A_2 = \sum_{i=1}^5 f_i - I_2 - \xi_{L_2} = 8 - 2 - 6 = 0$$

$$\text{SOC}_3 \{ R_{12} - R_{13} - R_{14} - R_{44} - R_{43} - R_{42} \}$$

$$A_3 = \sum_{i=1}^6 f_i - I_3 - \xi_{L_3} = 6 - 0 - 6 = 0$$

因此, 该机构由 3 个零耦合度的 BKC 组成, 则由式(6)得, 该机构的耦合度为 $\kappa=0$ 。根据基于序单开链的位置正解求解原理, 该机构的位置分析可通过 BKC₁、BKC₂、BKC₃ 直接求解, 如下。

2 机构位置分析

2.1 机构坐标系的建立与参数标注

不失一般性, 设机构静平台 0 为正方形, 静平台上的 4 个转动副 R_{11} 、 R_{21} 、 R_{31} 、 R_{41} 分布在其各边的中点, 如图 1 所示。

进一步, 在静平台 0 上建立 $o-xyz$ 坐标系, o 为静平台的重心, x 轴垂直于 R_{11} 的轴线, 而 y 轴平行于 R_{11} 的轴线; 在动平台 1 上建立 $p-uvw$ 坐标系, p 为转动副 R_{41} 、 R_{44} 连线的中点, u 轴垂直于 $R_{14}R_{44}$, v 轴与 $R_{14}R_{44}$ 重合; 而 z 、 w 轴由右手笛卡儿坐标系法则确定。为方便理解, 将该并联机构俯视展开, 如图 2 所示。

图 2 2-(RPa3R)3R 机构的平面俯视展开表达

该机构的结构参数为: 正方形静平台 0 的边长为 $2l_1$, 动平台 1 上转动副 R_{14} 、 R_{44} 的距离为 $2l_2$; 子并联机构的各杆长分别为: $R_{11}a = R_{41}b = R_{21}R_{22} = R_{31}R_{32} = l_3$ ($l_3 \neq l_1$)、 $aR_{12} = bR_{42} = R_{22}R_{23} = R_{32}R_{33} = l_4$ 、 $R_{23}S_4 = S_4R_{12} = R_{23}S_7 = S_7R_{42} = l_5$; 其余杆长为: $R_{12}R_{13} = R_{42}R_{43} = h_{R_{13}R_{14}} = h_{R_{43}R_{44}} = l_6$ 。

$R_{11}a$ 、 $R_{31}R_{32}$ 与 x 轴正向的夹角为 θ_1 、 θ_3 ; $R_{21}R_{22}$ 、 $R_{41}b$ 与 y 轴正向的夹角为 θ_2 、 θ_4 ; 动平台 1 上 p 的坐标为 (x, y, z) , u 轴与 x 轴正向逆时针的

转角为动平台转角 α ，如图2所示。

2.2 位置正解求解

已知：输入角 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 ，求：动平台1上 p 的坐标 (x, y, z) 和转角 α 。

2.2.1 求BKC₁中输出杆上 R_{12} 的坐标

易知，在静坐标系 $o-xyz$ 下，静平台0上两个转动副 R_{11} 、 R_{21} 的坐标分别为 $(l_1, 0, 0)$ 、 $(0, -l_1, 0)$ ；而驱动臂上的点 a 及转动副 R_{22} 的坐标分别为 $(l_1 + l_3 \cos \theta_1, 0, l_3 \sin \theta_1)$ 、 $(0, -l_1 + l_3 \cos \theta_2, l_3 \sin \theta_2)$ 。

由第1.3节的POC分析可知，图1中， H_1 点的运动输出均为两平移，即，在机构运动过程中，构件 $R_{23}R_{12}$ 分别只能产生 YZ 平面内的运动，因此， $x_{R_{12}} = 0$ 。于是 R_{23} 的坐标为 $(0, y_{R_{12}} - 2l_5, z_{R_{12}})$ 。

因 $aR_{12} = R_{22}R_{23} = l_4$ ，即有

$$\begin{cases} (x_a - x_{R_{12}})^2 + (y_a - y_{R_{12}})^2 + (z_a - z_{R_{12}})^2 = l_4^2 \\ (x_{R_{22}} - x_{R_{23}})^2 + (y_{R_{22}} - y_{R_{23}})^2 + (z_{R_{22}} - z_{R_{23}})^2 = l_4^2 \end{cases} \quad (8)$$

将 R_{23} 的坐标值代入式(8)，得

$$\begin{cases} x_a^2 + y_{R_{12}}^2 + (z_a - z_{R_{12}})^2 = l_4^2 \\ (y_{R_{22}} - y_{R_{12}} + 2l_5)^2 + (z_{R_{22}} - z_{R_{12}})^2 = l_4^2 \end{cases} \quad (9)$$

将式(9)中的两式相减，得

$$A_1 y_{R_{12}} + B_1 z_{R_{12}} = C_1 \quad (10)$$

$$A_1 = 2(y_{R_{22}} + 2l_5) \quad B_1 = 2(z_{R_{22}} - z_a)$$

$$C_1 = (y_{R_{22}} + 2l_5)^2 + z_{R_{22}}^2 - x_a^2 - z_a^2$$

若 $A_1 = 0$ 且 $B_1 = 0$ ，则 $C_1 = -x_a^2 = 0$ ；而 $l_3 \neq l_1$ ，即 $x_a \neq 0$ ，则 A_1 、 B_1 不同时为零。

当 $A_1 = 0$ 时

$$\begin{cases} z_{R_{12}} = C_1 / B_1 \\ y_{R_{12}} = \pm \sqrt{l_4^2 - (z_a - z_{R_{12}})^2 - x_a^2} \end{cases} \quad (11)$$

当 $A_1 \neq 0$ 时

$$\begin{cases} z_{R_{12}} = \frac{E_1 \pm \sqrt{E_1^2 - 4D_1 F_1}}{2D_1} \\ y_{R_{12}} = \frac{C_1 - B_1 z_{R_{12}}}{A_1} \end{cases} \quad (12)$$

$$D_1 = A_1^2 + B_1^2 \quad E_1 = 2(B_1 C_1 + z_a A_1^2)$$

$$F_1 = A_1^2 (x_a^2 + z_a^2 - l_4^2) + C_1^2$$

2.2.2 求BKC₂中输出杆上 R_{42} 的坐标

由于机构的对称性，当 $A_2 = 0$ 时

$$\begin{cases} z_{R_{42}} = C_2 / B_2 \\ x_{R_{42}} = \pm \sqrt{l_4^2 - (z_b - z_{R_{42}})^2 - y_b^2} \end{cases} \quad (13)$$

当 $A_2 \neq 0$ 时

$$\begin{cases} z_{R_{42}} = \frac{E_2 \pm \sqrt{E_2^2 - 4D_2 F_2}}{2D_2} \\ x_{R_{42}} = \frac{C_2 - B_2 z_{R_{42}}}{A_2} \end{cases} \quad (14)$$

$$A_2 = 2(x_{R_{32}} + 2l_5) \quad B_2 = 2(z_{R_{32}} - z_b)$$

$$C_2 = (x_{R_{32}} + 2l_5)^2 + z_{R_{32}}^2 - y_b^2 - z_b^2$$

$$D_2 = A_2^2 + B_2^2 \quad E_2 = 2(B_2 C_2 + z_b A_2^2)$$

$$F_2 = A_2^2 (y_b^2 + z_b^2 - l_4^2) + C_2^2$$

2.2.3 在BKC₃中求动平台 p 点坐标 (x, y, z) 和转角 α

此时， R_{12} 、 R_{42} 点的坐标已求出，BKC₃为一特殊布置的空间6R机构，如图3a所示，而图3b为其平面俯视图。

(a) 空间6R串联机构

(b) 空间6R串联机构的平面俯视图

图3 2-(RPa3R)3R操作手的上部拓扑结构

如图3所示，设 $R_{12}R_{13}$ 与 x 轴正方向的转角为 δ ，在动平台1运动过程中，因转动副 R_{12} 、 R_{13} 、 R_{14} 和转动副 R_{42} 、 R_{43} 、 R_{44} 的中心，分别在 m 、 n 平面，即

$$y_{R_{13}} = y_{R_{12}} \quad (15)$$

$$x_{R_{43}} = x_{R_{42}} \quad (16)$$

则转动副 R_{13} 、 R_{43} 的坐标分别为 $(l_6 \cos \delta, y_{R_{12}}, z_{R_{12}} + l_6 \sin \delta)$ 、 $(x_{R_{42}}, y_{R_{43}}, z_{R_{13}})$ 。

由 $l_{R_{42}R_{43}} = l_6$ ，建立约束方程

$$y_{R_{43}}^2 + (z_{R_{42}} - z_{R_{43}})^2 = l_6^2$$

解得

$$y_{R_{43}} = \pm \sqrt{l_6^2 - (z_{R_{42}} - z_{R_{12}} - l_6 \sin \delta)^2} \quad (17)$$

由图3b知， $l_{R_{43}R_{13}} = l_{R_{14}R_{44}} = 2l_2$ ，建立约束方程

$$(x_{R_{42}} - l_6 \cos \delta)^2 + (y_{R_{43}} - y_{R_{12}})^2 = 4l_2^2 \quad (18)$$

令 $u = \tan \delta/2$, 用 Mathematica 对式(18)进行展开、整理, 得到一元高次的封闭型位置方程为

$$f(u) = \sum_{i=0}^8 A_i u^i \quad (19)$$

$$\begin{aligned} A_0 &= 16l_2^4 - 16l_2^2 l_6^2 + 4l_6^4 + 8l_2^2 t^2 - 4l_6^2 t^2 + t^4 + \\ &\quad x_{R_{42}} (16l_2^2 l_6 - 8l_6^3 + 4l_6 t^2 - 8l_2^2 x_{R_{42}} + 8l_6^2 x_{R_{42}} - \\ &\quad 2t^2 x_{R_{42}} - 4l_6 x_{R_{42}}^2 + x_{R_{42}}^3) - y_{R_{12}}^2 (8l_2^2 - 2t^2 + 4l_6 x_{R_{42}} - \\ &\quad 2x_{R_{42}}^2 - y_{R_{12}}^2) \\ A_1 &= 8l_6 t (2l_6^2 - 4l_2^2 l_6 - 2l_6 t^2 - 2l_6 x_{R_{42}} + l_6 x_{R_{42}}^2 - l_6 y_{R_{12}}^2) \\ A_2 &= 4(16l_2^4 - 4l_6^4 + 8l_2^2 t^2 + 4l_6^2 t^2 + t^4) + \\ &\quad 4x_{R_{42}} (8l_2^2 l_6 + 4l_6^3 + 2l_6 t^2 - 8l_2^2 x_{R_{42}} - 2t^2 x_{R_{42}} - 2l_6 x_{R_{42}}^2 + \\ &\quad x_{R_{42}}^3) + 4y_{R_{12}}^2 (2t^2 - 8l_2^2 - 2l_6 x_{R_{42}} + 2x_{R_{42}}^2 + y_{R_{12}}^2) \\ A_3 &= 8l_6 t (3x_{R_{42}}^2 - 12l_2^2 - 2l_6^2 - 2l_6 x_{R_{42}} - 3y_{R_{12}}^2 - 3t^2) \\ A_4 &= 96l_2^4 + 32l_2^2 l_6^2 + 24l_6^4 + 48l_2^2 t^2 + 40l_6^2 t^2 + \\ &\quad 6t^4 - 2x_{R_{42}}^2 (24l_2^2 - 8l_6^2 + 6t^2 + 3x_{R_{42}}^2) + \\ &\quad 6y_{R_{12}}^2 (2t^2 + 6x_{R_{42}}^2 - 8l_2^2 + y_{R_{12}}^2) \\ A_5 &= 8l_6 t (2l_6 x_{R_{42}} - 12l_2^2 - 2l_6^2 + 3x_{R_{42}}^2 - 3t^2 - 3y_{R_{12}}^2) \\ A_6 &= 64l_2^4 - 16l_6^4 + 32l_2^2 t^2 + 16l_6^2 t^2 + 4t^4 - \\ &\quad 4x_{R_{42}} (8l_2^2 l_6 + 4l_6^3 + 4l_6 t^2 + 8l_2^2 x_{R_{42}} + 2t^2 x_{R_{42}} + \\ &\quad 2l_6 x_{R_{42}}^2 + x_{R_{42}}^3) + 4y_{R_{12}}^2 (2t^2 - 8l_2^2 + 2l_6 x_{R_{42}} + \\ &\quad 2x_{R_{42}}^2 + y_{R_{12}}^2) \\ A_7 &= 8l_6 t (2l_6^2 - 4l_2^2 + 2l_6 x_{R_{42}} + x_{R_{42}}^2 - y_{R_{12}}^2 - t^2) \\ A_8 &= 4(4l_2^4 - 4l_2^2 l_6^2 + l_6^4 + 2l_2^2 t^2 - l_6^2 t^2)^2 + t^4 + \\ &\quad x_{R_{42}} (8l_6^3 - 16l_2^2 l_6 - 4l_6 t^2 - 8l_2^2 x_{R_{42}} + 8l_6^2 x_{R_{42}} - \\ &\quad 2t^2 x_{R_{42}} + 4l_6 x_{R_{42}}^2 + x_{R_{42}}^3) + y_{R_{12}}^2 (4l_6 x_{R_{42}} + 2t^2 - \\ &\quad 8l_2^2 + 2x_{R_{42}}^2 + y_{R_{12}}^2) \\ t &= z_{R_{42}} - z_{R_{12}} \end{aligned}$$

令 $f(u) = 0$, 解得其实根, 便可求出对应的转角 δ ; 进一步, 由式(17)求出 $y_{R_{43}}$ (有两个值), 并代入式(18)验证, 得出 $y_{R_{43}}$ 的真实值, 从而可得动平台上 p 点的坐标 (x, y, z) 和转角 α , 即

$$\begin{cases} x = \frac{x_{R_{13}} + x_{R_{42}}}{2} \\ y = \frac{y_{R_{43}} + y_{R_{12}}}{2} \\ z = z_{R_{13}} + l_6 \\ \tan \alpha = \frac{y_{R_{43}} - y_{R_{12}}}{x_{R_{42}} - x_{R_{13}}} \end{cases} \quad (20)$$

特别的, 当以转动副 R_{14} 的转动中心为基点 O'' 时, $y_{O''} = f(\theta_1, \theta_2)$, $x_{O''} = \phi(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$, $z_{O''} = \varphi(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$, $\alpha = \eta(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$, 因此, 由式(7a)知, 该机构具有部分运动解耦性。

2.3 位置逆解求解

已知: 动平台 1 上 p 的坐标 (x, y, z) 和转角 α , 求输入角 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 。

2.3.1 求转动副 R_{12} 、 R_{42} 的坐标

在动坐标系 $p-uvw$ 下, ${}^p R_{13}$ 、 ${}^p R_{43}$ 的坐标分别为 $(0, -l_2, -l_6)$ 、 $(0, l_2, -l_6)$; 而动坐标系相对于静坐标系的旋转矩阵 ${}^o R$ 和位置矢量 ${}^o t_p$ 分别为

$${}^o R = R(z, \alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^o t_p = [x \quad y \quad z]^T$$

则

$$R_{13} = {}^o R {}^p R_{13} + {}^o t_p = \begin{bmatrix} l_2 \sin \alpha + x \\ -l_2 \cos \alpha + y \\ z - l_6 \end{bmatrix} \quad (21)$$

同理可得

$$\begin{bmatrix} x_{R_{43}} \\ y_{R_{43}} \\ z_{R_{43}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \sin \alpha + x \\ l_2 \cos \alpha + y \\ z - l_6 \end{bmatrix} \quad (22)$$

由 $R_{12} R_{13} = R_{42} R_{43} = l_6$, 建立杆长约束方程为

$$\begin{cases} (x_{R_{12}} - x_{R_{13}})^2 + (y_{R_{12}} - y_{R_{13}})^2 + (z_{R_{12}} - z_{R_{13}})^2 = l_6^2 \\ (x_{R_{42}} - x_{R_{43}})^2 + (y_{R_{42}} - y_{R_{43}})^2 + (z_{R_{42}} - z_{R_{43}})^2 = l_6^2 \end{cases} \quad (23)$$

将式(15)、(16)、(21)、(22), 代入式(23), 整理得

$$\begin{cases} x_{R_{13}}^2 + (z_{R_{12}} - z_{R_{13}})^2 = l_6^2 \\ y_{R_{43}}^2 + (z_{R_{42}} - z_{R_{43}})^2 = l_6^2 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} z_{R_{12}} = z_{R_{13}} \pm \sqrt{l_6^2 - x_{R_{13}}^2} \\ z_{R_{42}} = z_{R_{43}} \pm \sqrt{l_6^2 - y_{R_{43}}^2} \end{cases} \quad (24)$$

由式(15)、(16)、(24), 便可得出转动副 R_{12} 、 R_{42} 的坐标分别为 $(0, -l_2 \cos \alpha + y, z_{R_{12}})$ 、 $(-l_2 \sin \alpha + x, 0, z_{R_{42}})$;

2.3.2 求输入角 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4

位置正解已求出点 a 、 b 及转动副 R_{22} 、 R_{32} 的坐标。现根据杆长条件, 建立约束方程

$$(x_a - x_{R_{12}})^2 + (y_a - y_{R_{12}})^2 + (z_a - z_{R_{12}})^2 = l_4^2 \quad (25)$$

$$(x_{R_{22}} - x_{R_{23}})^2 + (y_{R_{22}} - y_{R_{23}})^2 + (z_{R_{22}} - z_{R_{23}})^2 = l_4^2 \quad (26)$$

$$(x_{R_{32}} - x_{R_{33}})^2 + (y_{R_{32}} - y_{R_{33}})^2 + (z_{R_{32}} - z_{R_{33}})^2 = l_4^2 \quad (27)$$

$$(x_b - x_{R_{42}})^2 + (y_b - y_{R_{42}})^2 + (z_b - z_{R_{42}})^2 = l_4^2 \quad (28)$$

由式(25)~(28)可得

$$\theta_i = 2\arctan \frac{2l_3 z_i \pm \sqrt{4z_i^2 l_3^2 - a_i c_i}}{a_i} \quad i=1,2,3,4 \quad (29)$$

$$z_1 = z_{R_{12}} \quad z_2 = z_{R_{23}} \quad z_3 = z_{R_{33}} \quad z_4 = z_{R_{42}}$$

$$a_1 = l_1^2 - 2l_1 l_3 + l_3^2 - l_4^2 + y_{R_{12}}^2 + z_{R_{12}}^2$$

$$c_1 = l_1^2 + 2l_1 l_3 + l_3^2 - l_4^2 + y_{R_{12}}^2 + z_{R_{12}}^2$$

$$a_2 = l_1^2 + 2l_1 l_3 + l_3^2 - l_4^2 + 2l_1 y_{R_{23}} + 2l_3 y_{R_{23}} + y_{R_{23}}^2 + z_{R_{23}}^2$$

$$c_2 = l_1^2 - 2l_1 l_3 + l_3^2 - l_4^2 + 2l_1 y_{R_{23}} - 2l_3 y_{R_{23}} + y_{R_{23}}^2 + z_{R_{23}}^2$$

$$a_3 = l_1^2 - l_4^2 + 2l_1 l_3 + l_3^2 + 2l_1 x_{R_{33}} + 2l_3 x_{R_{33}} + x_{R_{33}}^2 + z_{R_{33}}^2$$

$$c_3 = l_1^2 - l_4^2 - 2l_1 l_3 + l_3^2 + 2l_1 x_{R_{33}} - 2l_3 x_{R_{33}} + x_{R_{33}}^2 + z_{R_{33}}^2$$

$$a_4 = l_1^2 + l_3^2 - 2l_1 l_3 - l_4^2 + x_{R_{42}}^2 + z_{R_{42}}^2$$

$$c_4 = l_1^2 + l_3^2 + 2l_1 l_3 - l_4^2 + x_{R_{42}}^2 + z_{R_{42}}^2$$

综上所述,当动平台1上 p 点的坐标 (x, y, z) 和姿态角 α 已知时,输入角 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 各有两组解,转动副 R_{12} 、 R_{42} 的坐标各也有两组解,故逆解数为 $4 \times 16 = 64$,因此,动平台有64种构型。

2.4 位置正逆解验证

取两个平行四边形及其驱动杆的尺寸参数,与ABB机器人I4R的相应尺寸参数相同^[27],即 $l_3 = 350$ mm、 $l_4 = 800$ mm;其他结构参数分别为 $l_1 = 300$ mm、 $l_2 = 70$ mm、 $l_5 = 100$ mm、 $l_6 = 50$ mm。

取四个输入角 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 分别为 58.6839° 、 150.8346° 、 144.9225° 、 61.2459° 。

考虑该机构实际工作构型,取 $z_{R_{12}} > 0$ 、 $z_{R_{42}} > 0$,根据式(11)~(14),得转动副 R_{12} 、 R_{42} 的坐标分别为 $(0, -134.5310, 923.2359)$ 、 $(-99.1480, 0, 947.7786)$,代入式(19),得

$$f(u) = (3.75252 - 1.33078u + 4.45452u^2 - 7.90246u^3 + 8.28859u^4 - 9.84914u^5 + 2.29185u^6 - 3.27747u^7 - 1.29474u^8) \times 10^8$$

解得其实根为: $u_1 = -3.71915$ 、 $u_2 = 0.867349$ 。

当 $u = u_1$ 时,由式(17)得 $y_{R_{43}} = \pm 6.1711$,代入式(18)验证,得 $y_{R_{43}} = -6.1711$ 。

当 $u = u_2$ 时,求出 $y_{R_{43}} = \pm 43.3271$,代入式(18)验证,得 $y_{R_{43}} = -43.3271$ 。

由式(20),解得的位置正解如表1所示。

表1 位姿正解数值(mm)

序号	x	y	z	角度 $\alpha/(^\circ)$
1	-71.2029	-70.3510	948.1609	23.5291
2	-46.0400	-88.9291	1022.7338	49.3485

用同样方法,可求得机构任意一组输入角时的位置正解。

表1中第2组的正解所对应的机构装配构型,如图4a所示;将该组的正解值,代入逆解公式(29)中,且由图3可知: $z_{R_{13}} > z_{R_{12}}$ 、 $z_{R_{43}} > z_{R_{42}}$,则逆解数减少至16组,得其中一组逆解为 $\theta_1 = 58.6839^\circ$ 、 $\theta_2 = 150.8342^\circ$ 、 $\theta_3 = 144.9223^\circ$ 、 $\theta_4 = 61.2457^\circ$ (此时对应的机构装配构型如图4b所示),这和已知的四个输入角一致,从而证明了正、逆解的正确性;因此,如图4a、4b所示的CAD装配构型,可视为同一个装配构型的两个不同视图。

(a) 俯视图 (对应位置正解)

(b) 正视图 (对应位置逆解)

图4 第2组正解值及其逆解值所对应的机构装配构型

3 奇异性分析

3.1 机构奇异性分析的原理

所有输入运动和输出运动构成的矢量分别记为 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$,则 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 的关系可表示成如下方程

$$F(X, Y) = 0 \quad (30)$$

将方程式(30)两边分别对时间求导, 有

$$\mathbf{J}_p \dot{\mathbf{Y}} - \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{X}} = 0 \quad (31)$$

依据 $\mathbf{J}_p$ 、 $\mathbf{J}_q$ 矩阵是否奇异, 将机构的奇异位形分为如下三类: ① 当 $\det(\mathbf{J}_q) = 0$ 时, 机构发生输入奇异; ② 当 $\det(\mathbf{J}_p) = 0$ 时, 机构发生输出奇异; ③ 当 $\det(\mathbf{J}_q) = \det(\mathbf{J}_p) = 0$ 时, 机构发生综合奇异。

3.2 雅可比矩阵

对式(25)~(28)两边同时对时间 t 求导, 得

$$u_{ii}\dot{\theta}_i - f_{i1}\dot{x} - f_{i2}\dot{y} - f_{i3}\dot{z} - f_{i4}\dot{\alpha} = 0 \quad i=1,2,3,4 \quad (32)$$

$$u_{11} = (z_a - z_{R_{12}})l_3 \cos \theta_1 - (x_a - x_{R_{12}})l_3 \sin \theta_1$$

$$u_{22} = (z_{R_{22}} - z_{R_{23}})l_3 \cos \theta_2 - (y_{R_{22}} - y_{R_{23}})l_3 \sin \theta_2$$

$$u_{33} = (z_{R_{32}} - z_{R_{33}})l_3 \cos \theta_3 - (x_{R_{32}} - x_{R_{33}})l_3 \sin \theta_3$$

$$u_{44} = (z_b - z_{R_{42}})l_3 \cos \theta_4 - (y_b - y_{R_{42}})l_3 \sin \theta_4$$

$$f_{j1} = \pm \frac{f_{j3}x_{R_{13}}}{B_1} \quad f_{i4} = f_{j2}l_2 \sin \alpha + f_{j1}l_2 \cos \alpha$$

$$f_{12} = y_a - y_{R_{12}} \quad f_{13} = z_a - z_{R_{12}} \quad f_{22} = y_{R_{22}} - y_{R_{23}}$$

$$f_{23} = z_{R_{22}} - z_{R_{23}} \quad j=1,2$$

$$f_{k2} = \pm \frac{f_{k3}x_{R_{43}}}{B_2} \quad f_{k4} = -f_{k2}l_2 \sin \alpha - f_{k1}l_2 \cos \alpha$$

$$f_{31} = x_{R_{32}} - x_{R_{33}} \quad f_{33} = z_{R_{32}} - z_{R_{33}} \quad f_{41} = x_b - x_{R_{42}}$$

$$f_{43} = z_b - z_{R_{42}} \quad k=3,4$$

$$B_1 = \sqrt{l_6^2 - x_{R_{13}}^2} \quad B_2 = \sqrt{l_6^2 - y_{R_{43}}^2}$$

因此, 可得该机构动平台输出速度 $\mathbf{V} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$ 和主动输入角速度 $\boldsymbol{\omega} = [\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3]^T$ 的关系为

$$\mathbf{J}_p \mathbf{V} = \mathbf{J}_q \boldsymbol{\omega} \quad (33)$$

$$\mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & u_{33} & \\ & & & u_{44} \end{bmatrix}$$

3.3 奇异性分析

3.3.1 输入奇异

当机构发生输入奇异时, 机构的执行构件将失去某个方向的运动能力, 一般此时的位形情况是一个运动链到达了工作空间的边界。

此时 $\det(\mathbf{J}_q) = 0$, 方程解的集合 A 为

$$A = \{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4\} \quad (34)$$

$A_1 = \{(z_a - z_{R_{12}}) \cos \theta_1 - (x_a - x_{R_{12}}) \sin \theta_1 = 0\}$, 即 R_{11} 、 a 、 R_{12} 三点在 oxz 平面上的投影共线。

$A_2 = \{(z_{R_{22}} - z_{R_{23}}) \cos \theta_2 - (y_{R_{22}} - y_{R_{23}}) \sin \theta_2 = 0\}$, 即 R_{21} 、 R_{22} 、 R_{23} 三点共线。

$A_3 = \{(z_{R_{32}} - z_{R_{33}}) \cos \theta_3 - (x_{R_{32}} - x_{R_{33}}) \sin \theta_3 = 0\}$, 即 R_{31} 、 R_{32} 、 R_{33} 三点共线。

$A_4 = \{(z_b - z_{R_{42}}) \cos \theta_4 - (y_b - y_{R_{42}}) \sin \theta_4 = 0\}$, 即 R_{41} 、 b 、 R_{42} 三点在 oyz 平面上的投影共线。

例如满足 A_1 的三维 CAD 构型如图 5 所示。

图 5 输入奇异位形举例

3.3.2 输出奇异

在这种情况下, 当所有的主动件锁住时, 执行构件依旧可以产生局部运动。此时, 若机构末端执行器上作用有限的力, 那么主动件上将需无穷大的驱动力才能达到力平衡。设

$$(f_{i1}, f_{i2}, f_{i3}) = \mathbf{e}_i \quad i=1,2,3,4 \quad (35)$$

$$(f_{k1}, f_{k2}, f_{k3}, f_{k4}) = \mathbf{E}_k \quad k=1,2,3,4 \quad (36)$$

若 $\det(\mathbf{J}_p) = 0$, 则矢量 $\mathbf{e}_1 \sim \mathbf{e}_4$ 有如下三种情况。

(1) 存在两个矢量线性相关。

若 $\mathbf{e}_1 = k\mathbf{e}_2$, 取 $[f_{12} \ f_{13}] = k[f_{22} \ f_{23}]$, 则

$$kf_{21} = k \frac{f_{23}x_{R_{13}}}{B_1} \equiv f_{11}$$

$$kf_{24} = k(f_{22}l_2 \sin \alpha + f_{21}l_2 \cos \alpha) =$$

$$f_{12}l_2 \sin \alpha + f_{11}l_2 \cos \alpha \equiv f_{14}$$

即 $\mathbf{E}_1 = k\mathbf{E}_2$, 其三维 CAD 构型为矢量 $R_{22}R_{23}$ 、 aR_{12} 在 oyz 平面上的投影相互平行, 如图 6 所示。

图 6 输出奇异位形举例

同理可得 $\mathbf{e}_3 = k\mathbf{e}_4$, $\mathbf{E}_3 \equiv k\mathbf{E}_4$ 。

若 $\mathbf{e}_2 = k\mathbf{e}_3$, 即 $[f_{21} \ f_{22} \ f_{23}] = k[f_{31} \ f_{32} \ f_{33}]$

$$kf_{34} = k(-f_{32}l_2\sin\alpha - f_{31}l_2\cos\alpha) = \\ -f_{22}l_2\sin\alpha - f_{21}l_2\cos\alpha \neq f_{24}$$

则 $\mathbf{e}_2$ 和 $\mathbf{e}_3$ 线性无关, 同理可得: $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_3$ 、 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_4$ 、 $\mathbf{e}_2$ 和 $\mathbf{e}_4$ 均线性无关。

(2) 存在三个矢量线性相关。

若 $\mathbf{e}_1 = k_1\mathbf{e}_2 + k_2\mathbf{e}_3$ ($k_1k_2 \neq 0$), 即

$$f_{1i} = k_1f_{2i} + k_2f_{3i} \quad i=1,2,3$$

$$k_1f_{24} + k_2f_{34} = k_1(f_{22}l_2\sin\alpha + f_{21}l_2\cos\alpha) +$$

$$k_2(-f_{32}l_2\sin\alpha - f_{31}l_2\cos\alpha) =$$

$$(k_1f_{22} - k_2f_{32})l_2\sin\alpha +$$

$$(k_1f_{21} - k_2f_{31})l_2\cos\alpha \neq f_{14}$$

同理可得: 任意三个矢量($k_1k_2 \neq 0$)均线性无关则第(2)种情况都不成立。

(3) 存在四个矢量线性相关

$$\mathbf{e}_1 = k_1\mathbf{e}_2 + k_2\mathbf{e}_3 + k_3\mathbf{e}_4 \quad k_1k_2k_3 \neq 0$$

由第(2)种情况分析方法, 可以很快得出该种情况同样不成立。

3.3.3 综合奇异

此时 $\det(\mathbf{J}_q) = \det(\mathbf{J}_p) = 0$, 即输入奇异和输出奇异同时发生。例如: 机构满足 A_4 且 $\mathbf{E}_1 \equiv k\mathbf{E}_2$, 则机构满足 R_{41} 、 b 、 R_{42} 三点和矢量 $R_{22}R_{23}$ 、 aR_{12} 在 oyz 平面上的投影分别共线、平行, 其三维 CAD 构型如图 7 所示。

图 7 综合奇异位形举例

4 机构工作空间和转角分析

4.1 基点工作空间分析

并联机构动平台上基点的工作空间大小, 是衡量并联机构性能的一个重要指标。本节采用极限边界搜索法^[28], 分析该并联机构的可达工作空间, 即

预先设定该机构工作空间的 z 向变化范围, 通过改变搜索半径 ρ 以及搜索角度 θ 来找到工作空间的边界。

设定搜索范围为: $500 \text{ mm} \leq z \leq 1200 \text{ mm}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \rho \leq 300 \text{ mm}$; 运用 Matlab 软件编程, 得到该机构工作空间的三维立体图, 如图 8 所示, 而图 9 为不同高度 Z 处的 OXY 截面图。

图 8 2-(RPa3R)3R 机构工作空间三维图

图 9 2-(RPa3R)3R 机构工作空间的 OXY 截面图

从图 8 和图 9 中可以看出以下几点。

(1) 工作空间形状具有较好的对称性。

(2) 当 $z \in [500 \text{ mm}, 1100 \text{ mm}]$ 时, 工作空间整体呈圆柱状, X - Y 截面面积的大小, 由转动副 R_{12} 、 R_{42} 分别在 $x=0$ 、 $y=0$ 的平面上移动的距离大小所决定。

(3) 当 $z \in [1100 \text{ mm}, 1200 \text{ mm}]$ 时, 内部存在空洞, 工作空间截面面积随之减小。

4.2 动平台转角分析

动平台转角分析是要评估并联机构动平台的转

角范围,在工业应用中也具有重要意义^[29]。对于并联机构,动平台基点处于工作空间内某一位置时,动平台的转角存在一定范围。根据位置逆解方程,采用极限边界搜索法,可求出动平台基点处于工作空间内任一点时的转角范围。现取 $z=800\text{ mm}$,基于 Matlab,计算该机构在工作空间内 OXY 平面上各点转角 α 的范围,如图 10 所示;其最小值($\alpha_{\min}$)、最大值($\alpha_{\max}$)的分布,如图 11 所示。

图 10 机构工作空间内各点的转角 α 范围($z=800\text{ mm}$ 时)

图 11 $z=800\text{ mm}$ 时机构工作空间内各点的转动能力

从图 10 可看出,当 $z=800\text{ mm}$ 时,由该机构工作空间内各点转角的取值范围呈螺旋状立体。

图 11 中,区域 $\{(x,y)|-50\leq x\leq 50, 20\leq y\leq 120\}$ 为重叠区域。当动平 1 处于工作空间区域的点 $A(-50, 50)$ 时,由图 11a、11b 知,动平台转角的最小值、最大分别为 0° , 即其转角范围为 $[0^\circ, 90^\circ]$; 同样,当动平台 1 处于点 $B(75, 50)$ 时,其转角范围为 $[-160^\circ, -90^\circ]$ 。

采用同样方法,可计算出工作空间内其他各点处的转角范围。

5 样机的 CAD 建模

4 自由度 3T1R 操作手 2-(RPa3R)3R 的虚拟样机设计,如图 12 所示,它包含静平台、动平台、两条复杂支链,以及标准驱动控制系统等四大部件;作者已完成单元部件、整机的 CAD 三维图及其机械结构设计。其中,支链是并联操作手传递运动、承受载荷的重要单元,支链的结构设计须在满足刚度和强度的前提下,应尽量减小其质量。为此,主动臂均采用密度小、强度高、易加工的铝材 7075;而从动臂选用质地轻、强度高以及抗拉性高的碳纤维管,其结构如图 13 所示。

图 12 4 自由度 2-(RPa3R)3R 并联操作手的 CAD 图

图 13 2-(RPa3R)3R 操作手的支链结构设计

目前,零部件已加工完毕,有待进行整机组装与调试。

6 结论

针对目前大部分3T1R并联机构,因耦合度高且不具有运动解耦性,导致位置正解求解、运动控制与轨迹规划较为复杂等问题,提出了一种零耦合度且运动解耦的新型三平移一转动并联操作手2-(RPa3R)3R。

(1) 该机构包含3个零耦合度BKC,基于序单开链的运动学建模原理,给出了该机构位置正解的封闭方程,并求得其位置正解,其中,两个零耦合度的子并联机构(RPa3R)末端位置可得到解析解。

(2) 基于机构位置反解,对机构工作空间进行了分析,表明:有效工作空间呈柱状、规则、连续,且具有很好的对称性;工作空间的大小,以及上部的空洞,可通过优化机构的几何尺寸避免。

(3) 机构动平台转动能力分析表明:当 $z=800$ mm时,该机构工作空间内各点转角取值范围较小,转动能力一般。

(4) 基于导出的机构位置反解公式,推导其雅可比矩阵,得到了该机构发生三种奇异位形的条件及其位置。

参考文献

- PIERROT F. H4: A new family of 4-DOF parallel robots[C]// Advanced Intelligent Mechatronics, 1999. IEEE, 1999: 508-513.
- KRUT S, BENOIT M, OTA H, et al. I4: A new parallel mechanism for Scara motions[C]// Robotics and Automation, 2003, Proceedings of ICRA'03, IEEE International Conference on. IEEE, 2003: 1875-1880.
- KRUT S, NABAT V, PIERROT F. A high-speed parallel robot for Scara motions[C]// Robotics and Automation, 2004, Proceedings of ICRA'04, 2004 IEEE International Conference on. IEEE, 2004: 4109-4115.
- NABAT V, RODRIGUEZ M, COMPANY O, et al. Par4: Very high speed parallel robot for pick-and-place[C]// Intelligent Robots and Systems 2005 (IROS 2005), 2005 IEEE/RSJ International Conference on. IEEE, 2005: 553-558.
- KRUT S, NABAT V, PIERROT F. Heli4: A parallel robot for Scara motions with a very compact traveling plate and a symmetrical design[C]// Intelligent Robots and Systems 2006, IEEE/RSJ International Conference on. IEEE, 2006: 1656-1661.
- 赵铁石, 黄真. 欠秩空间并联机器人输入选取的理论和应用[J]. 机械工程学报, 2000, 36(10): 81-85.
- ZHAO Tieshi, HUANG Zhen. Theory and application of selecting actuating components of spatial parallel mechanisms[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2000, 36(10): 81-85.
- YANG T L, JIN Q, LIU A X, et al. Structure synthesis of 4-dof (3-Translation and 1-Rotation) parallel robot mechanisms based on the units of single-opened-chain[C]// Proceedings of the ASME 2001 Design Engineering Technical Conference and Computers and Information in Engineering Conference, 2001, ASME, 2001: DETC2001/DAC-21152.
- KONG X W, GOSSELIN C M. Type synthesis of 3T1R 4-DOF parallel manipulators based on screw theory[J]. Robotics and Automation, IEEE Transactions, 2004, 20(2): 181-190.
- 黄田, 赵学满, 梅江平, 等. 一种具有三维平动一维转动的并联机构: 中国, ZL201220007884.X[P]. 2012-11-14. HUANG Tian, ZHAO Xueman, MEI Jiangping, et al. A parallel mechanism with three translations and one rotation: China, ZL201220007884.X[P]. 2012-11-14.
- 刘辛军, 谢富贵. 一种可实现 SCARA 运动的四自由度单动平台并联机构: 中国, 201210435375.1[P]. 2012. LIU Xinjun, XIE Fugui. A kind of four degrees of freedom of moving platform parallel mechanism with SCARA exercise: China, 201210435375.1[P]. 2012.
- 侯雨雷, 卢文娟, 曾达幸, 等. 运动解耦的两自由度转动并联机构: 中国, 201010617042[P]. 2010-12-24. HOU Yulei, LU Wenjuan, ZENG Daxing, et al. Motion decoupling two rotational degrees of freedom parallel mechanism: China, 201010617042[P]. 2010-12-24.
- JIN Q, YANG T L. Synthesis and analysis of a group of 3-degree-offreedom partially decoupled parallel manipulators[J]. Journal of Mechanical Design, 2004, 126: 301-306.
- KONG X W, GOSSELIN C M. A class of 3-DOF translational parallel manipulators with linear input-output equations[C]// Proceedings of the Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators, Quebec, Canada, October 3-4, 2002: 25-32.
- AWTAR S, USTICK J, SEN S. An XYZ parallel-kinematic flexure mechanism with geometrically decoupled degrees of freedom[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2013, 5(1): 015001.
- 杭鲁滨, 王彦, 吴俊, 等. 基于拓扑解耦准则的球面并联机构解耦条件研究[J]. 机械工程学报, 2005, 41(9): 28-32. HANG Lubin, WANG Yan, WU Jun. Research on decoupling conditions of spherical parallel mechanism

- based on the topological decoupling rules[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(9): 28-32.
- [16] ZENG Q, FANG Y F, EHMANN K F. Design of a novel 4-dof kinematic tropic hybrid parallel manipulator[J]. Mechanical Design, 2011, 133(12): 1.
- [17] CARRICATO M. Fully-isotropic four-degree-of-freedom parallel mechanisms for Schoenflies motion[J]. International Journal of Robotics Research, 2005, 24(5): 397-414.
- [18] 石志新, 罗玉峰, 叶梅燕. 一类新型 5 自由度解耦并联机器人机构及位置分析[J]. 机床与液压, 2010, 38(17): 5-8.
- SHI Zhixin, LUO Yufeng, YE Meiyuan. Configuration design and displacement analysis for a class of novel fully decoupling 5 dof parallel manipulators[J]. Machine Tool & Hydraulics, 2010, 38(17): 5-8.
- [19] JIN Y, CHEN I M, YANG G. Kinematic design of a 6-dof parallel manipulator with decoupled translation and rotation[J]. IEEE Transactions of Robotics, 2006, 22(3): 545-551.
- [20] 沈惠平, 熊坤, 孟庆梅, 等. 并联机构运动解耦设计方法及其应用[J]. 农业机械学报, 2016, 47(6): 348-356.
- SHEN Huiping, XIONG Kun, MENG Qingmei, et al. Design methods for kinematic decoupled parallel mechanisms and applications[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(6): 348-356.
- [21] 廖斌. 面向高速拾放操作的大工作空间并联机构研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2012.
- LIAO Bin. A large workspace parallel manipulator for high-speed pick-and-place applications[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2012.
- [22] 杨廷力. 机器人机构拓扑结构学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2004.
- YANG Tingli. Theory of robot mechanism topology[M]. Beijing: China Machine Press, 2004.
- [23] 杨廷力, 刘安心, 罗玉峰, 等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- YANG Tingli, LIU Anxin, LUO Yufeng, et al. Theory and application of robot mechanism topology[M]. Beijing: Science Press, 2012.
- [24] YANG T L, LIU A X, SHEN H P, et al. Topology design of robot mechanisms[M]. Singapore: Springer Publishing Company, 2018.
- [25] 沈惠平, 杨廷力, 李云峰, 等. 一种三平移—转动并联机器人平台机械手: 中国, 201610404955.2[P]. 2016-06-08.
- SHEN Huiping, YANG Tingli, LI Yunfeng, et al. A kind of parallel manipulator with three translation and one rotation: China, 201610404955.2[P]. 2016-06-08.
- [26] 沈惠平, 尹洪波, 王振, 等. 基于拓扑结构分析的求解 6-SPS 并联机构位置正解的研究[J]. 机械工程学报, 2013, 49(21): 70-80.
- SHEN Huiping, YIN Hongbo, WANG Zhen, et al. Research on forward position solutions for 6-SPS parallel mechanisms based on topology structure analysis[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(21): 70-80.
- [27] 刘平松. I4R 型并联机器人全域性能及其优化研究[D]. 南京: 南京理工大学, 2013.
- LIU Pingsong. Global performance and optimization of I4R Parallel robot[D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2013.
- [28] 黄真, 孔令富, 方跃法. 并联机器人机构学理论及控制[M]. 北京: 机械工业出版社, 1997.
- HUANG Zhen, KONG Lingfu, FANG Yuefa. Parallel robot mechanism theory & control[M]. Beijing: China Machine Press, 1997.
- [29] XIE F G, LIU X J. Design and development of a high-speed and high-rotation robot with four identical arms and a single platform[J]. Mechanisms and Robotics, 2015, 7: 041015-1.

作者简介: 沈惠平, 男, 1965 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为并联机构、机器人机构学。已发表研究论文 260 余篇, 授权发明专利 67 项。
E-mail: shp65@126.com