

DOI: 10.3901/JME.2021.01.128

集中荷载作用下双层弹性悬臂梁动力学分析*

何 威¹ 魏彦京²

(1. 燕山大学建筑工程与力学学院 秦皇岛 066004;
2. 中国科学院大学 北京 100049)

摘要: 通过研究动集中荷载对双层弹性悬臂梁的动力学影响,旨在探讨悬臂式电磁发射装置的轨道及壁板的受力及振动规律。采用双层弹性基础梁理论,对悬臂式双层弹性基础梁在动集中荷载作用下的受力和振动情况进行了分析,将电磁发射装置的轨道及壁板简化为双层弹性悬臂梁力学模型,采用 Dirac 函数表示运动状态下电枢作用在轨道上的集中力,得出了内梁和外梁的动力学微分方程,应用模态函数正交性,求得了内外梁弯矩和应力的解析解。通过算例,分析了内梁和外梁的动力响应,并在相同条件下应用 ANSYS 进行了数值模拟,最后将解析解与数值解进行了比较,解析解的可靠性得到验证。将电磁发射装置简化为双层弹性悬臂梁要比单层弹性悬臂梁更加接近实际工况。研究成果有助于电磁发射装置的理论研究,可供相关工程设计参考。

关键词: 悬臂梁; 动力强度分析; 双层弹性悬臂梁; 动集中荷载; ANSYS

中图分类号: TB121

Dynamic Analysis of Two-layered Elastic Cantilever Beam under the Action of Concentrated Load

HE Wei¹ WEI Yanjing²

(1. College of Civil Engineering and Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao 066004;
2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049)

Abstract: The dynamic effect of the moving concentrated load on the two-layered elastic cantilever is studied, which aims to investigate the force and vibration of the rails and wall panels of the cantilever electromagnetic device. The research is based on the two-layered elastic cantilever beam theory, analyzes the stress and vibration of two-layered elastic cantilever beam subjected to moving concentrated load, taking the electromagnetic launch device rails and wall panels as a two-layered elastic foundation beam, establishing a mechanical model, using the Dirac function to express the action of concentrated force on the rails due to the armature's movement, and establishing the dynamic differential equation of upper beam and lower beam. The analytical solution of bending moment and stress of upper and lower beam is obtained according to modal orthogonality. In a case of given motion parameters and structural parameters, the dynamic response of the upper beam and the lower beam are analyzed; then the numerical simulation is carried out under the same conditions by ANSYS. Finally, the practicability of analytical solution is verified by comparisons with the numerical solution. The two-layered elastic cantilever beam model, which is more applicable to the actual working condition than the single-layered elastic cantilever beam model. It will contribute to the theoretical research on the electromagnetic launch device and can be used for reference of the engineering design in related fields.

Key words: cantilever beam; dynamic strength analysis; two-layered elastic cantilever beam; moving concentrated load; ANSYS

0 前言

电磁炮的提出已有百余年的历史,尤其是冷战后期,是一项急迫的技术课题,当时大量专家意识到电磁炮将成为军事领域中竞争的的决定性因素。然

而,当前的作战环境改变了原来的技术重点,电磁炮新的应用前景正在引发全球对该技术的再次关注。电磁炮按工作原理分为轨道炮、线圈炮和重接炮。最新的报道显示,美国、欧洲和日本等许多国家,正在针对电磁轨道炮实施强有力的研究计划。以往的研究人员对于电磁轨道炮的导轨计算有了长足的进展,然而这类问题往往被简化为单层的、无限长或半无限长的弹性基础梁来计算,这显然与实

* 国家自然科学基金资助项目(50875230)。20191212 收到初稿,20200624 收到修改稿

际工况存在相当大的差距。因此, 分析双层有限长度弹性基础梁, 将更有助于电磁炮领域以及其他工程领域的理论研究。

以往对于单层弹性基础梁的静、动态作用力以及梁组件的强度、刚度的理论分析及计算方法已经做了大量的研究工作。TZENG^[1-2]对电磁轨道炮的结构和动力响应进行了一些研究, 其中轨道的结构响应被简化为单层弹性地基梁。TZENG 和 SUN^[3]采用弹性基础梁作为电磁发射装置轨道的力学模型, 推导了控制方程, 并利用 ANSYS 软件模拟了在 101 MPa 的磁场压力下轨道炮内膛的应变场和应力场。JOHNSON 等^[4]同样将电磁轨道发射装置的轨道简化为弹性地基梁, 运用材料力学的方法进行计算, 初步分析了电磁轨道在电磁压力作用下的应力波的传递特性。CHE 等^[5]同样基于 Bernoulli-Euler 梁理论将电磁炮轨道简化为单层梁, 讨论了不同约束及预应力对轨道振动及刚度的影响。CAO 等^[6]运用 Winkler 梁模型分析了轨道的变形。LEE 等^[7]运用 Timoshenko 地基梁分析了轨道的动态响应。张永胜等^[8]采用混合有限元—边界元法建立了电磁轨道发射器电磁—结构—运动多物理场耦合动力计算模型。轨道被简化为具有不同边界条件的单层地基梁的分析也有相应的报道^[9-11]。近年来, 也有研究人员基于双层弹性地基梁模型对方口径电磁发射装置的动态响应进行了研究^[12-14], 研究也多集中于简支双层弹性梁。然而, 电磁轨道炮的实际结构更近似于悬臂梁, 因此, 应建立更为合适的力学模型对电磁发射装置的动态响应进行研究(电磁发射装置模型如图 1 所示)。

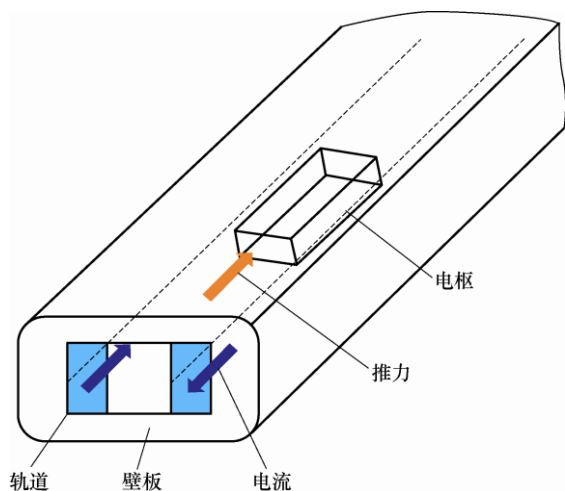


图 1 电磁轨道发射模型

本文研究的重点内容是集中载荷在运动状态下对双层弹性悬臂梁的动力学影响。文章在力学分析

过程中以方口径电磁轨道发射装置为研究对象(外观截面图如图 2 所示), 轨道与壁板之间的绝缘层相当于一层弹性基础, 而壁板通常利用螺栓与盖板连

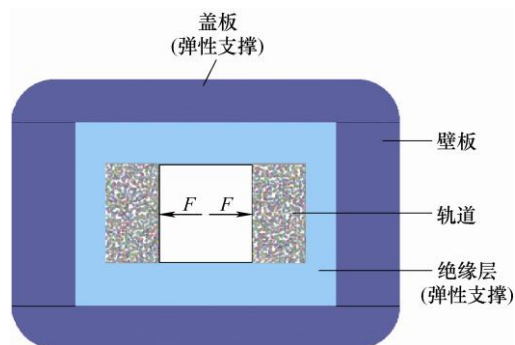


图 2 电磁轨道炮截面

接, 盖板及螺栓在工作状态下的变形, 对于壁板来说相当于另一层弹性基础, 因此要计算在发射过程中的轨道及壁板的变形和应力状态。在发射过程中, 当电流通入轨道后, 电枢受到强大的推力作用, 在焦耳热的作用下电枢开始膨胀, 膨胀时周围的轨道对其会有约束。在周围约束的作用下, 则可得到电枢对轨道的作用力, 由此, 发射轨道即可简化为电枢力 F 作用下的双层弹性悬臂基础梁的力学问题。

1 理论模型

1.1 双层弹性悬臂梁模型

电磁轨道发射装置的轨道和外包壁板可以简化成 Winkler 弹性地基上的双层悬臂梁, 如图 3 所示。 l 为梁长, l_1 为电枢运动的位置; F 为电枢对轨道的作用力, v 为电枢运动速度, 内梁抗弯刚度为 $E_1 I_1$, 外梁抗弯刚度为 $E_2 I_2$, c_1 为内外两梁之间支撑的弹性常数; c_2 为外梁与地基间的弹性常数, 根据模型可以分析, 当外部载荷介入后, 内、外梁的变形便取决于 $E_1 I_1$ 、 $E_2 I_2$ 、 c_1 和 c_2 。如果 w_1 表示内梁的挠度, w_2 表示外梁的挠度, 令内梁所承受的地基压力为 $p_1 = c_1(w_1 - w_2)$, 外梁承受的地基压力为 $p_2 = c_2 w_2$ 。

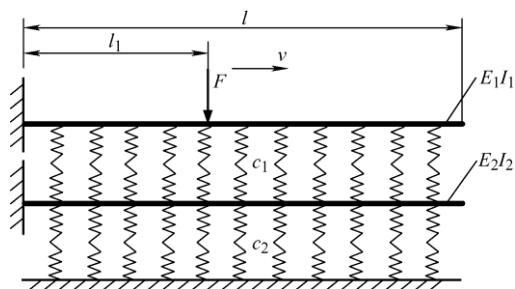


图 3 双层悬臂梁力学模型图

内、外梁的动力学平衡方程为

$$\begin{cases} E_1 I_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + m_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + c_1 (w_1 - w_2) = f(x, t) \\ E_2 I_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + m_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + c_2 w_2 = -c_1 (w_2 - w_1) \end{cases} \quad (1)$$

式中 m_1 、 m_2 ——内、外梁单位长度的质量,

$$m_1 = \rho_1 S_1, \quad m_2 = \rho_2 S_2;$$

ρ_1 、 ρ_2 ——内、外梁密度;

S_1 、 S_2 ——内、外梁截面面积;

$f(x, t)$ ——电枢作用力, 为集中载荷;

t ——时间。

1.2 自由振动响应分析

在无载荷作用的情况下, 内、外梁的动力学方程为

$$E_1 I_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + m_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + c_1 (w_1 - w_2) = 0 \quad (2)$$

$$E_2 I_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + m_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + (c_1 + c_2) w_2 - c_1 w_1 = 0 \quad (3)$$

由式(2)得

$$w_2 = \frac{E_1 I_1}{c_1} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \frac{m_1}{c_1} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + w_1 \quad (4)$$

将式(4)代入式(3), 化简后有

$$\begin{aligned} & E_1 I_1 E_2 I_2 \frac{\partial^8 w_1}{\partial x^8} + (E_2 I_2 m_1 + E_1 I_1 m_2) \frac{\partial^6 w_1}{\partial x^4 \partial t^2} + \\ & [c_1 E_2 I_2 + (c_1 + c_2) E_1 I_1] \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + m_1 m_2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial t^4} + \\ & [c_1 m_2 + (c_1 + c_2) m_1] \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + c_1 c_2 w_1 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

根据梁的振动形式, 设 w_1 和 w_2 的通解形式为

$$w_1 = \sum_{i=1}^{\infty} X_i (A_i \sin P_i t + B_i \cos P_i t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i Y_{1i} \quad (6)$$

$$w_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{E_1 I_1}{c_1} \frac{\partial^4 X_i}{\partial x^4} + \left(1 - \frac{m_1 P_i^2}{c_1} \right) X_i \right] Y_{2i} = \sum_{i=1}^{\infty} Z_i Y_{2i} \quad (7)$$

式中 P_i ——圆频率;

$$Y_{ji} = A_i \sin P_i t + B_i \cos P_i t, \quad j = 1, 2;$$

$$Z_i = \frac{E_1 I_1}{c_1} \frac{\partial^4 X_i}{\partial x^4} + \left(1 - \frac{m_1 P_i^2}{c_1} \right) X_i。$$

将式(6)代入式(5), 可得

$$\alpha_i \frac{\partial^8 X_i}{\partial x^8} + \beta_i \frac{\partial^4 X_i}{\partial x^4} + \gamma_i X_i = 0 \quad (8)$$

式中 $\alpha_i = E_1 I_1 E_2 I_2$;

$$\beta_i = c_1 E_2 I_2 + (c_1 + c_2) E_1 I_1 -$$

$$P_i^2 (E_2 I_2 m_1 + E_1 I_1 m_2);$$

$$\gamma_i = m_1 m_2 P_i^4 + c_1 c_2 - P_i^2 [c_1 m_2 + (c_1 + c_2) m_1]。$$

式(8)可以写成

$$\begin{aligned} X_i = & C_1 \cos M_i x + C_2 \sin M_i x + C_3 \operatorname{ch} M_i x + C_4 \operatorname{sh} M_i x + \\ & C_5 \cos N_i x + C_6 \sin N_i x + C_7 \operatorname{ch} N_i x + C_8 \operatorname{sh} N_i x \end{aligned} \quad (9)$$

式中 $C_1 \sim C_8$ ——待定系数;

$$M_i = \left(-\frac{\beta_i + (\beta_i^2 - 4\alpha_i \gamma_i)^{\frac{1}{2}}}{2\alpha_i} \right)^{\frac{1}{4}};$$

$$N_i = \left(-\frac{\beta_i - (\beta_i^2 - 4\alpha_i \gamma_i)^{\frac{1}{2}}}{2\alpha_i} \right)^{\frac{1}{4}}。$$

将式(9)代入式(7), 得到 w_2 的表达式中的 Z_i 为

$$\begin{aligned} Z_i = & C_1 J_i \cos M_i x + C_2 J_i \sin M_i x + C_3 J_i \operatorname{ch} M_i x + \\ & C_4 J_i \operatorname{sh} M_i x + C_5 K_i \cos N_i x + C_6 K_i \sin N_i x + \\ & C_7 K_i \operatorname{ch} N_i x + C_8 K_i \operatorname{sh} N_i x \end{aligned} \quad (10)$$

式中 $J_i = \frac{E_1 I_1 M_i^4 + c_1 - m_1 P_i^2}{c_1}$;

$$K_i = \frac{E_1 I_1 N_i^4 + c_1 - m_1 P_i^2}{c_1}。$$

内、外梁的弯矩、转角以及剪切应力分别为

$$\begin{aligned} M_{upper} = & E_1 I_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = E_1 I_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial^2 X_i}{\partial x^2} Y_{1i} = \\ & \sum_{i=1}^{\infty} [E_1 I_1 (-C_1 M_i^2 \cos M_i x - C_2 M_i^2 \sin M_i x + \\ & C_3 M_i^2 \operatorname{ch} M_i x + C_4 M_i^2 \operatorname{sh} M_i x - C_5 N_i^2 \cos N_i x - \\ & C_6 N_i^2 \sin N_i x + C_7 N_i^2 \operatorname{ch} N_i x + C_8 N_i^2 \operatorname{sh} N_i x) \\ & (A_i \sin P_i t + B_i \cos P_i t)] \end{aligned} \quad (11)$$

$$M_{lower} = E_2 I_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = E_2 I_2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial^2 Z_i}{\partial x^2} Y_{2i} =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} [E_2 I_2 (-C_1 J_i M_i^2 \cos M_i x - \\ & C_2 J_i M_i^2 \sin M_i x + C_3 J_i M_i^2 \operatorname{ch} M_i x + \\ & C_4 J_i M_i^2 \operatorname{sh} M_i x - C_5 K_i N_i^2 \cos N_i x - \\ & C_6 K_i N_i^2 \sin N_i x + C_7 K_i N_i^2 \operatorname{ch} N_i x + \\ & C_8 K_i N_i^2 \operatorname{sh} N_i x) (A_i \sin P_i t + B_i \cos P_i t)] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\theta_1 = \frac{\partial w_1}{\partial x} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial X_i}{\partial x} Y_{li} = \sum_{i=1}^{\infty} [(-C_1 M_i \sin M_i x + C_2 M_i \cos M_i x + C_3 M_i \operatorname{sh} M_i x + C_4 M_i \operatorname{ch} M_i x - C_5 N_i \sin N_i x + C_6 N_i \cos N_i x + C_7 N_i \operatorname{sh} N_i x + C_8 N_i \operatorname{ch} N_i x) \cdot (A_i \sin P_i t + B_i \cos P_i t)] \quad (13)$$

$$\theta_2 = \frac{\partial w_2}{\partial x} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial Z_i}{\partial x} Y_{2i} = \sum_{i=1}^{\infty} [(-C_1 J_i M_i \sin M_i x + C_2 J_i M_i \cos M_i x + C_3 J_i M_i \operatorname{sh} M_i x + C_4 J_i M_i \operatorname{ch} M_i x - C_5 K_i N_i \sin N_i x + C_6 K_i N_i \cos N_i x + C_7 K_i N_i \operatorname{sh} N_i x + C_8 K_i N_i \operatorname{ch} N_i x) \cdot (A_i \sin P_i t + B_i \cos P_i t)] \quad (14)$$

$$Q_1 = E_1 I_1 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} = E_1 I_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial^3 X_i}{\partial x^3} Y_{li} = \sum_{i=1}^{\infty} [(C_1 M_i^3 \sin M_i x - C_2 M_i^3 \cos M_i x + C_3 M_i^3 \operatorname{sh} M_i x + C_4 M_i^3 \operatorname{ch} M_i x + C_5 N_i^3 \sin N_i x - C_6 N_i^3 \cos N_i x + C_7 N_i^3 \operatorname{sh} N_i x + C_8 N_i^3 \operatorname{ch} N_i x) \cdot (A_i \sin P_i t + B_i \cos P_i t)] \quad (15)$$

$$Q_2 = E_2 I_2 \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} = E_2 I_2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial^3 Z_i}{\partial x^3} Y_{2i} = \sum_{i=1}^{\infty} [E_2 I_2 (C_1 J_i M_i^3 \sin M_i x - C_2 J_i M_i^3 \cos M_i x + C_3 J_i M_i^3 \operatorname{sh} M_i x + C_4 J_i M_i^3 \operatorname{ch} M_i x + C_5 K_i N_i^3 \sin N_i x - C_6 K_i N_i^3 \cos N_i x + C_7 K_i N_i^3 \operatorname{sh} N_i x + C_8 K_i N_i^3 \operatorname{ch} N_i x) \cdot (A_i \sin P_i t + B_i \cos P_i t)] \quad (16)$$

以上各式中的系数 $C_1 \sim C_8$ 由内、外梁的边界条件确定, 对照所建立的双层梁分析模型, 则在内、外梁的一端约束一端自由的条件下, 所得到的双层梁左、右两端的边界条件为

$$\begin{cases} w_1|_{x=0} = 0, w_2|_{x=0} = 0, M_1|_{x=l} = 0, M_2|_{x=l} = 0 \\ \theta_1|_{x=0} = 0, \theta_2|_{x=0} = 0, Q_1|_{x=l} = 0, Q_2|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

将式(6)、式(7)、式(13)、式(14)代入式(17)的左端边界条件可解得

$$\begin{cases} C_1 + C_3 + C_5 + C_7 = 0 \\ C_2 M_i + C_4 M_i + C_6 N_i + C_8 N_i = 0 \\ C_1 J_i + C_3 J_i + C_5 K_i + C_7 K_i = 0 \\ C_2 J_i M_i + C_4 J_i M_i + C_6 K_i N_i + C_8 K_i N_i = 0 \end{cases} \quad (18)$$

由此可得到关于内、外梁的模式函数

$$\begin{aligned} X_i &= -\cos M_i x + \operatorname{ch} M_i x - \frac{\operatorname{sh} M_i l - \sin M_i l}{\operatorname{ch} M_i l + \cos M_i l} (\operatorname{sh} M_i x - \sin M_i x) - \\ &\quad \cos N_i x + \operatorname{ch} N_i x - \frac{\operatorname{sh} N_i l - \sin N_i l}{\operatorname{ch} N_i l + \cos N_i l} (\operatorname{sh} N_i x - \sin N_i x) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} Z_i &= -J_i \cos M_i x + J_i \operatorname{ch} M_i x - \frac{\operatorname{sh} M_i l - \sin M_i l}{\operatorname{ch} M_i l + \cos M_i l} J_i (\operatorname{sh} M_i x - \sin M_i x) - \\ &\quad K_i \cos N_i x + K_i \operatorname{ch} N_i x - \frac{\operatorname{sh} N_i l - \sin N_i l}{\operatorname{ch} N_i l + \cos N_i l} K_i (\operatorname{sh} N_i x - \sin N_i x) \end{aligned} \quad (20)$$

因此, w_1 和 w_2 可以表示为

$$w_1 = \sum_{i=1}^{\infty} [-\cos M_i x + \operatorname{ch} M_i x - \zeta (\operatorname{sh} M_i x - \sin M_i x) - \cos N_i x + \operatorname{ch} N_i x - \xi (\operatorname{sh} N_i x - \sin N_i x) \cdot (A_i \sin P_i t + B_i \cos P_i t)] \quad (21)$$

$$w_2 = \sum_{i=1}^{\infty} [-J_i \cos M_i x + J_i \operatorname{ch} M_i x - \zeta J_i (\operatorname{sh} M_i x - \sin M_i x) - K_i \cos N_i x + K_i \operatorname{ch} N_i x - \xi K_i (\operatorname{sh} N_i x - \sin N_i x) \cdot (A_i \sin P_i t + B_i \cos P_i t)] \quad (22)$$

$$\text{式中, } \zeta = \frac{\operatorname{sh} M_i l - \sin M_i l}{\operatorname{ch} M_i l + \cos M_i l}; \quad \xi = \frac{\operatorname{sh} N_i l - \sin N_i l}{\operatorname{ch} N_i l + \cos N_i l}。$$

1.3 内梁受迫振动动态响应

设内梁受到的载荷为 $f(x, t)$, 将其代入式(2)则有

$$E_1 I_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + m_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + c_1 (w_1 - w_2) = f(x, t) \quad (23)$$

令 $w_1 = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) Y_{li}(t)$, 则有

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[E_1 I_1 X_i^{(4)} Y_{li} + m_1 Y_{li}'' X_i + c_1 \left(X_i Y_{li} - \frac{1}{J_i} X_i Y_{2i} \right) \right] = f(x, t) \quad (24)$$

式(24)两边分别乘以 $X_j(x)$, 并对全梁积分, 同时根据式(19)及内梁模态函数的正交性, 可得到

$$Y_{li}'' + P_i^2 Y_{li} = Q_{li}(t) \quad (25)$$

式中 $Q_{li}(t)$ ——内梁第 i 阶的广义载荷;

$$Q_{li}(t) = \int_0^l f(x, t) X_i(x) dx。$$

解方程(25)可得到其一般形式解为

$$Y_{li}(t) = \frac{1}{P_i} \int_0^t Q_{li}(\tau) \sin P_i(t - \tau) d\tau \quad (26)$$

解方程式(26), 并由此可得到内梁在受载下的动力响应为

$$w_1(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\cos M_i x + \operatorname{ch} M_i x - \zeta(\operatorname{sh} M_i x - \sin M_i x) - \cos N_i x + \operatorname{ch} N_i x - \xi(\operatorname{sh} N_i x - \sin N_i x)}{P_i} \times \right. \\ \left. \int_0^l [-\cos M_i x + \operatorname{ch} M_i x - \zeta(\operatorname{sh} M_i x - \sin M_i x) - \cos N_i x + \operatorname{ch} N_i x - \xi(\operatorname{sh} N_i x - \sin N_i x)] \int_0^t f(x, t) \sin P_i(t - \tau) d\tau dx \right\} \quad (27)$$

1.4 外梁受迫振动动态响应

对于外梁来说, 整个系统的载荷加载在内梁, 外梁受载的载荷为内梁的向下压力, 则根据式(3)有

$$E_2 I_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + m_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + (c_1 + c_2) w_2 - c_1 w_1 = 0 \quad (28)$$

式中 $c_1 w_1$ ——外梁所加载荷, 由式(27)确定。

令 $w_2 = \sum_{i=1}^{\infty} Z_i(x) Y_{2i}(t)$, 则有

$$w_2 \sum_{i=1}^{\infty} [E_2 I_2 Z_i^{(4)} Y_{2i} + m_2 Y_{2i}'' Z_i + (c_1 + c_2) Z_i Y_{2i}] = c_1 w_1 \quad (29)$$

式(29)两边分别乘以 $Z_j(x)$, 并对全梁积分, 同时根据式(20)及外梁模态函数的正交性, 可得到

$$Y_{2i}'' + \left(P_i^2 + \frac{c_1}{J_i m_2} \right) Y_{2i} = Q_{2i}(t) \quad (30)$$

$$w_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{m_1 [-J_i \cos M_i x + J_i \operatorname{ch} M_i x - \zeta J_i (\operatorname{sh} M_i x - \sin M_i x)] + m_1 [-K_i \cos N_i x + K_i \operatorname{ch} N_i x - \xi K_i (\operatorname{sh} N_i x - \sin N_i x)]}{n_i m_2 J_i^2} \times \right. \\ \left. \int_0^l c_1 [-J_i \cos M_i x + J_i \operatorname{ch} M_i x - \zeta J_i (\operatorname{sh} M_i x - \sin M_i x) - K_i \cos N_i x + K_i \operatorname{ch} N_i x - \xi K_i (\operatorname{sh} N_i x - \sin N_i x)] \int_0^t w_1(x, \tau) \sin n_i(t - \tau) d\tau dx \right\} \quad (32)$$

式中, w_1 为式(27)所得的载荷下内梁的振动响应。

1.5 受迫振动下载荷的定义

根据双层梁模态函数的正交性, 可将多自由度系统模态叠加法的思想应用于连续系统, 即将弹性体的振动表示为各阶模态的线性组合, 用于计算系统在激励作用下的振动规律。则根据内外梁的受载状态, 其载荷函数为

$$p_{F(x,t)} = -F \delta(x - vt) \left(0 \leq t \leq \frac{l}{v} \right) \quad (33)$$

式中 F ——电枢对轨道的作用力;

$\delta(x)$ ——Dirac 函数。

$$w_{1F(x,t)} = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\cos M_i x + \operatorname{ch} M_i x - \zeta(\operatorname{sh} M_i x - \sin M_i x) - \cos N_i x + \operatorname{ch} N_i x - \xi(\operatorname{sh} N_i x - \sin N_i x)}{P_i} \right. \\ \left. \int_0^l [-\cos M_i x + \operatorname{ch} M_i x - \zeta(\operatorname{sh} M_i x - \sin M_i x) - \cos N_i x + \operatorname{ch} N_i x - \xi(\operatorname{sh} N_i x - \sin N_i x)] \int_0^t p_{F(x,t)} \sin P_i(t - \tau) d\tau dx \right\} \quad (35)$$

根据 Dirac 函数的性质, 并将 $p_{F(x,t)} = -F \delta(x - vt)$ 代入式(35), 并积分可得内梁在集中载荷 F 作用下

式中 $Q_{2i}(t)$ ——外梁第 i 阶的广义载荷; $Q_{2i}(t) =$

$$\frac{m_t}{J_i^2 m_2} \int_0^l c_1 w_1 Z_i dx, \quad m_t \text{ 为梁的总体质量。}$$

则令 $n_i = \left(P_i^2 + \frac{c_1}{J_i m_2} \right)^{\frac{1}{2}}$, 式(30)解的一般形式为

$$Y_{2i}(t) = \frac{1}{n_i} \int_0^t Q_{2i}(\tau) \sin n_i(t - \tau) d\tau \quad (31)$$

将 $Q_{2i}(t)$ 、式(20)、式(31)代入 $w_2 = \sum_{i=1}^{\infty} Z_i(x) Y_{2i}(t)$,

则有外梁在受载情况下的动力响应为

2 集中载荷作用下双层悬臂梁动态响应

2.1 内梁动态挠度求解

根据式(1)在集中载荷 F 作用下内梁的动力平衡方程为

$$E_1 I_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + m_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + c_1 (w_1 - w_2) = p_{F(x,t)} \quad (34)$$

即式(1)中载荷函数 $f(x, t) = p_{F(x,t)} = -F \delta(x - vt)$ 。

根据内梁受载下动力响应函数的推导, 将 $p_{F(x,t)}$ 代入式(21), 则有

的动态响应为

$$w_{1F(x,t)} = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ -\frac{F}{P_i} \left[-\cos M_i x + \operatorname{ch} M_i x - \zeta (\operatorname{sh} M_i x - \sin M_i x) - \cos N_i x + \operatorname{ch} N_i x - \xi (\operatorname{sh} N_i x - \sin N_i x) \right] \times \right. \\ \left. \left[\frac{P_i (\cos P_i t - \cos M_i vt)}{P_i^2 - M_i^2 v^2} - \frac{P_i (\cos P_i t - \operatorname{ch} M_i vt)}{P_i^2 + M_i^2 v^2} - \frac{\zeta (P_i \operatorname{sh} M_i vt - M_i v \sin P_i t)}{P_i^2 + M_i^2 v^2} + \frac{\zeta (P_i \sin M_i vt - M_i v \sin P_i t)}{P_i^2 - M_i^2 v^2} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{P_i (\cos P_i t - \cos N_i vt)}{P_i^2 - N_i^2 v^2} - \frac{P_i (\cos P_i t - \operatorname{ch} N_i vt)}{P_i^2 + N_i^2 v^2} - \frac{\xi (P_i \operatorname{sh} N_i vt - N_i v \sin P_i t)}{P_i^2 + N_i^2 v^2} + \frac{\xi (P_i \sin N_i vt - N_i v \sin P_i t)}{P_i^2 - N_i^2 v^2} \right] \right\} \quad (36)$$

2.2 外梁动态挠度求解

在集中荷载下内梁的振动响应函数 $w_{1F(x,t)}$ 确定

的条件下, 根据式(22), 在受集中力条件下, 外梁

的动力响应为

$$w_{2F(x,t)} = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{m_i [-J_i \cos M_i x + J_i \operatorname{ch} M_i x - \zeta J_i (\operatorname{sh} M_i x - \sin M_i x)] + m_i [-K_i \cos N_i x + K_i \operatorname{ch} N_i x - \xi K_i (\operatorname{sh} N_i x - \sin N_i x)]}{n_i m_2 J_i^2} \times \right. \\ \left. \int_0^l c_1 [-J_i \cos M_i x + J_i \operatorname{ch} M_i x - \zeta J_i (\operatorname{sh} M_i x - \sin M_i x) - K_i \cos N_i x + K_i \operatorname{ch} N_i x - \xi K_i (\operatorname{sh} N_i x - \sin N_i x)] \int_0^t w_{1F(x,\tau)} \sin n_i (t - \tau) d\tau dx \right\} \quad (37)$$

2.3 内梁弯矩应力的动态响应

在已知内梁在集中荷载下动态挠曲线方程的情

况下, 根据内梁弯矩 M_1 和应力 σ_1 的数值表达式, 可

由式(36)直接得到

$$M_1 = E_1 I_1 \frac{d^2 w_{1F}}{dx^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ -FE_1 I_1 \left[\frac{M_i^2 \cos M_i x + M_i^2 \operatorname{ch} M_i x - \zeta M_i^2 (\operatorname{sh} M_i x + \sin M_i x)}{P_i} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{N_i^2 \cos N_i x + N_i^2 \operatorname{ch} N_i x - \xi N_i^2 (\operatorname{sh} N_i x + \sin N_i x)}{P_i} \right] \left[\frac{P_i (\cos P_i t - \cos M_i vt)}{P_i^2 - M_i^2 v^2} - \frac{P_i (\cos P_i t - \operatorname{ch} M_i vt)}{P_i^2 + M_i^2 v^2} - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\zeta (P_i \operatorname{sh} M_i vt - M_i v \sin P_i t)}{P_i^2 + M_i^2 v^2} + \frac{\zeta (P_i \sin M_i vt - M_i v \sin P_i t)}{P_i^2 - M_i^2 v^2} + \frac{P_i (\cos P_i t - \cos N_i vt)}{P_i^2 - N_i^2 v^2} - \frac{P_i (\cos P_i t - \operatorname{ch} N_i vt)}{P_i^2 + N_i^2 v^2} - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\xi (P_i \operatorname{sh} N_i vt - N_i v \sin P_i t)}{P_i^2 + N_i^2 v^2} + \frac{\xi (P_i \sin N_i vt - N_i v \sin P_i t)}{P_i^2 - N_i^2 v^2} \right] \right\} \quad (38)$$

$$\sigma_1 = \frac{E_1 h_1}{2} \frac{d^2 w_{1F}}{dx^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ -\frac{FE_1 h_1}{2} \left[\frac{M_i^2 \cos N_i x + M_i^2 \operatorname{ch} N_i x - \xi M_i^2 (\operatorname{sh} M_i x + \sin M_i x)}{P_i} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{N_i^2 \cos N_i x + N_i^2 \operatorname{ch} N_i x - \xi N_i^2 (\operatorname{sh} N_i x + \sin N_i x)}{P_i} \right] \left[\frac{P_i (\cos P_i t - \cos M_i vt)}{P_i^2 - M_i^2 v^2} - \frac{P_i (\cos P_i t - \operatorname{ch} M_i vt)}{P_i^2 + M_i^2 v^2} - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\zeta (P_i \operatorname{sh} M_i vt - M_i v \sin P_i t)}{P_i^2 + M_i^2 v^2} + \frac{\zeta (P_i \sin M_i vt - M_i v \sin P_i t)}{P_i^2 - M_i^2 v^2} + \frac{P_i (\cos P_i t - \cos N_i vt)}{P_i^2 - N_i^2 v^2} - \frac{P_i (\cos P_i t - \operatorname{ch} N_i vt)}{P_i^2 + N_i^2 v^2} - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\xi (P_i \operatorname{sh} N_i vt - N_i v \sin P_i t)}{P_i^2 + N_i^2 v^2} + \frac{\xi (P_i \sin N_i vt - N_i v \sin P_i t)}{P_i^2 - N_i^2 v^2} \right] \right\} \quad (39)$$

2.4 外梁弯矩应力的动态响应

与内梁相类似, 已知外梁在集中荷载下动态挠曲线方程的情况下, 根据外梁弯矩 M_2 和应力 σ_2 的数值表达式, 可由式(37)直接得到

$$M_2 = -\frac{E_2 I_2 F c_1 m_t}{n_i m_2 J_i^2} (X_1'' + X_2'') (T_1 + T_2) (H_1 + H_2) \quad (40)$$

$$\sigma_2 = -\frac{E_2 h_2 F c_1 m_t}{2 n_i m_2 J_i^2} (X_1'' + X_2'') (T_1 + T_2) (H_1 + H_2) \quad (41)$$

式中 $X_1'' = M_i^2 J_i^2 (\operatorname{h} M_i x + \cos M_i x) -$

$$\zeta M_i^2 J_i (\operatorname{h} M_i x + \sin M_i x);$$

$$X_2'' = N_i^2 K_i^2 (\operatorname{h} N_i x + \cos N_i x) -$$

$$\xi N_i^2 K_i (\operatorname{h} N_i x + \sin N_i x);$$

$$T_1 = \frac{P_i \operatorname{Im} 11 + M_i v \operatorname{Im} 12}{M_i (P_i^2 - M_i^2 v^2)} + \frac{P_i \operatorname{Im} 21 + M_i v \operatorname{Im} 22}{M_i (P_i^2 + M_i^2 v^2)} +$$

$$\zeta \left(\frac{M_i^2 v^2 \operatorname{Im} 31 + P_i^2 \operatorname{Im} 32}{M_i P_i^2 (P_i^2 + M_i^2 v^2)} + \frac{M_i^2 v^2 \operatorname{Im} 41 + P_i^2 \operatorname{Im} 42}{M_i (P_i^3 - P_i M_i^2 v^2)} \right);$$

$$T_2 = \frac{P_i \operatorname{In} 11 + N_i v \operatorname{In} 12}{N_i (P_i^2 - N_i^2 v^2)} + \frac{P_i \operatorname{In} 21 + N_i v \operatorname{In} 22}{N_i (P_i^2 + N_i^2 v^2)} +$$

$$\xi \left(\frac{N_i^2 v^2 \operatorname{In} 31 + P_i^2 \operatorname{In} 32}{N_i P_i^2 (P_i^2 + N_i^2 v^2)} + \frac{N_i^2 v^2 \operatorname{In} 41 + P_i^2 \operatorname{In} 42}{N_i (P_i^3 - P_i N_i^2 v^2)} \right);$$

$$H_1 = \frac{J_i}{P_i} (a11 + a21 + a31 + a41 + c11 + c21 + c31 + c41);$$

$$H_2 = \frac{K_i}{P_i} (b11 + b21 + b31 + b41 + d11 + d21 + d31 + d41)。$$

3 算例分析

本文对悬臂式双层弹性基础梁的计算实例是以方口径电磁轨道发射装置为计算对象, 由于真实炮管基本都是悬臂式的, 电磁轨道炮在战争中也不例外的会采用悬臂炮管, 因此使得本研究内容更具有现实实用性。算例如下。

3.1 参数

电磁发射轨道的双层梁在集中载荷下的动力学模型如图 3 所示, 截面尺寸如图 4 所示。其中梁的长度 $l=3\ 000\text{ mm}$, 内梁的截面尺寸 $H_1=45\text{ mm}$, $h_1=15\text{ mm}$; 外梁的截面尺寸 $H_2=75\text{ mm}$, $h_2=30\text{ mm}$ 。内梁材料为铜, 其弹性模量 $E_1=110\text{ GPa}$, 密度 $\rho_1=8\ 290\text{ kg/m}^3$; 外梁材料为尼龙, 其弹性模量 $E_2=28.3\text{ GPa}$, 密度 $\rho_2=980\text{ kg/m}^3$ 。内、外梁之间的基础的弹性常数 $c_1=3\text{ MPa}$, 外梁与固定板的基础的弹性常数 $c_2=6\text{ MPa}$ 。在内梁作用的集中载荷 $F=10\ 000\text{ N}$ 。电枢的移动速度设为 $1\ 000\text{ m/s}$ 。

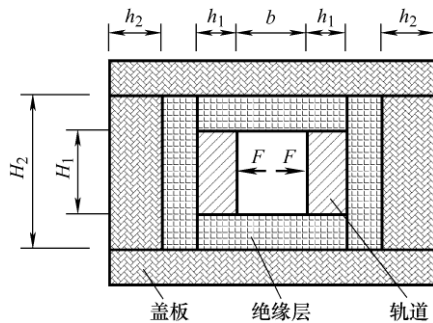


图 4 电磁轨道发射装置横断面图

3.2 计算结果与分析

悬臂式双层弹性地基梁动态位移与应力的数值与解析解如图 5~12 所示。

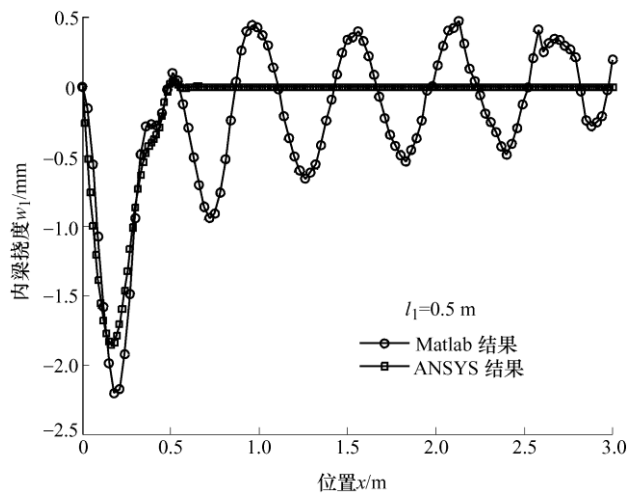


图 5 内梁挠度的解析解与数值解

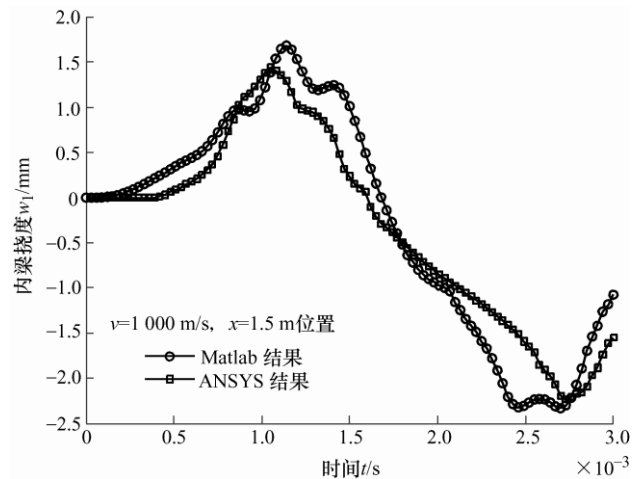


图 6 内梁 $x=1.5\text{ m}$ 位置响应解析解与数值解

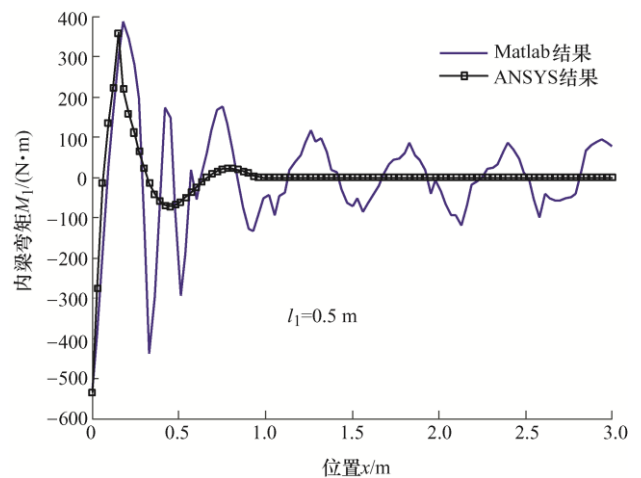


图 7 内梁弯矩分布解析解与数值解

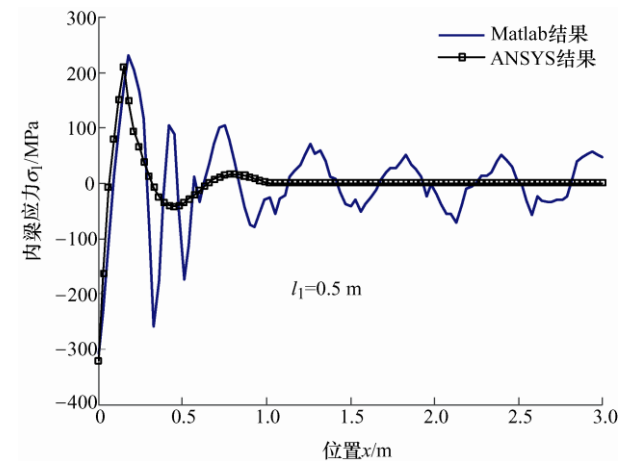


图 8 内梁应力分布解析解与数值解

图 5 和图 9 分别为内、外梁挠度数值解与解析解的对比。两种解吻合较好, 最大值相近, 并且其发生的位置都位于 $0\sim 0.5\text{ m}$ 范围内。图 6 和图 10 展示的是在 $x=1.5\text{ m}$ 处, 挠度随时间的变化曲线, 可以看到数值解与解析解变化趋势一致。

图 7、8、11 和 12 给出了内、外梁弯矩和应力解, 弯矩和应力在轨道设计时十分重要。如图所示, 两种解的趋势一致, 在 $x=0\sim 0.5\text{ m}$ 范围内达到峰

值。同时在 $x=1\sim 3\text{ m}$ 范围内, 解析解在内外梁出现一些波动, 数值解趋于稳定。内梁的峰值和波动大于外梁的峰值和波动, 这可能是由内梁(轨道)相较于外梁(壁板)耗散了大部分的振动能量所致。

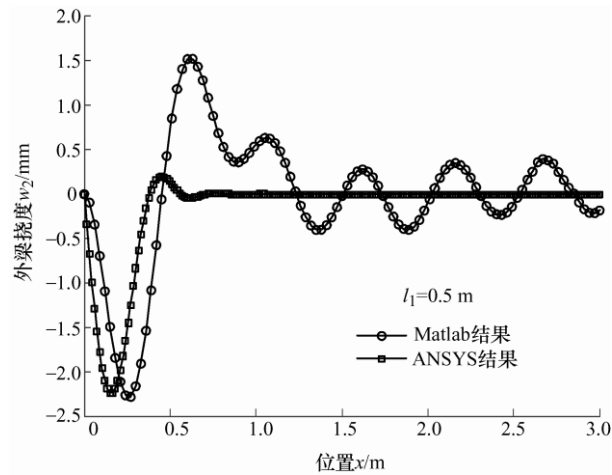


图 9 外梁挠度的解析解与数值解

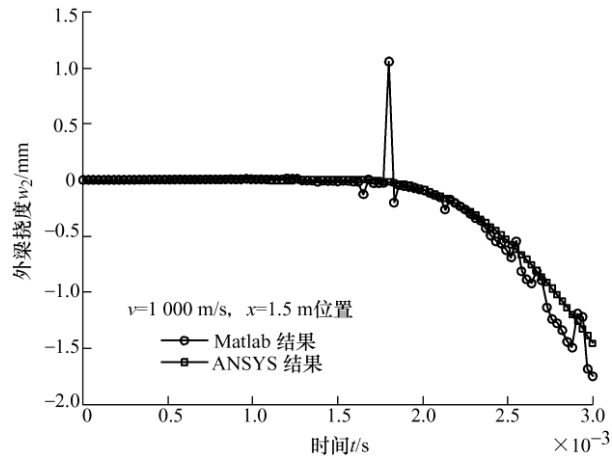


图 10 外梁 $x=1.5\text{ m}$ 位置响应解析解与数值解

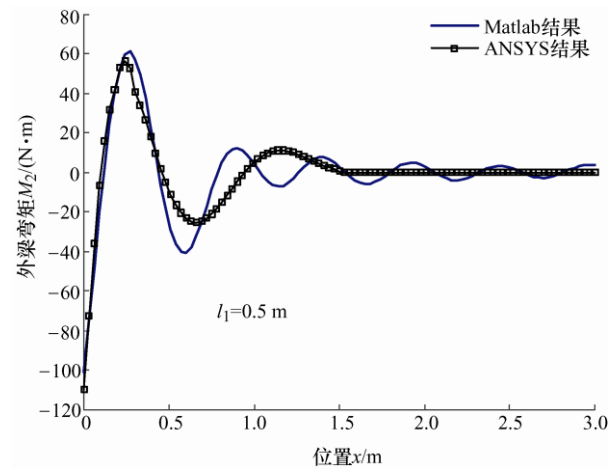


图 11 外梁弯矩分布解析解与数值解

为了更好地说明双层梁的动态响应特性, 以及确定解析解的准确性, 在表 1 和表 2 中分别选择图 5~12 中的最大和最小响应值进行比较。如表 1 所示, 解析

解与数值解最大绝对值的相对误差稳定在 5% 左右。

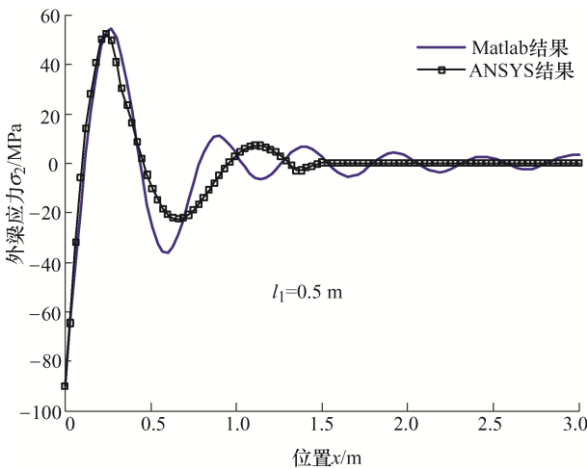


图 12 外梁应力分布解析解与数值解

表 1 双层梁的最大动态响应解析解与数值解对比

图号	最大动态响应	数值解	解析解	相对误差(%)
5	内梁挠度 w_1/mm	0.039	0.473	—
6	内梁挠度 w_1/mm	1.609	1.684	4.66
7	内梁弯矩 $M_1/(\text{N}\cdot\text{m})$	369.6	388.7	5.17
8	内梁应力 σ_1/MPa	219.7	230.3	4.83
9	外梁挠度 w_2/mm	0.196	1.518	—
10	外梁挠度 w_2/mm	0.027	0	—
11	外梁弯矩 $M_2/(\text{N}\cdot\text{m})$	58.32	61.21	4.95
12	外梁应力 σ_2/MPa	51.36	54.41	5.08

表 2 双层梁的最小动态响应解析解与数值解对比

图号	最小动态响应	数值解	解析解	相对误差(%)
5	内梁挠度 w_1/mm	-2.096	-2.201	5.01
6	内梁挠度 w_1/mm	-2.452	-2.331	4.93
7	内梁弯矩 $M_1/(\text{N}\cdot\text{m})$	-546.4	-521.5	4.56
8	内梁应力 σ_1/MPa	-324.9	-309.1	4.86
9	外梁挠度 w_2/mm	-2.165	-2.278	5.22
10	外梁挠度 w_2/mm	-1.669	-1.751	4.91
11	外梁弯矩 $M_2/(\text{N}\cdot\text{m})$	-105.9	-101.0	4.63
12	外梁应力 σ_2/MPa	-94.45	-89.79	4.93

基于上述分析可知, 除去一些误差外, 解析解与数值解吻合较好, 解析解的适用性得到了验证。

为了充分展示双层梁的动力响应, 绘制了图 13~18, 用以描绘梁的挠度、弯矩和应力分布随时间和位置的变化。图 13、14 和 15 为内梁的响应, 图 16、17 和 18 为外梁的响应。

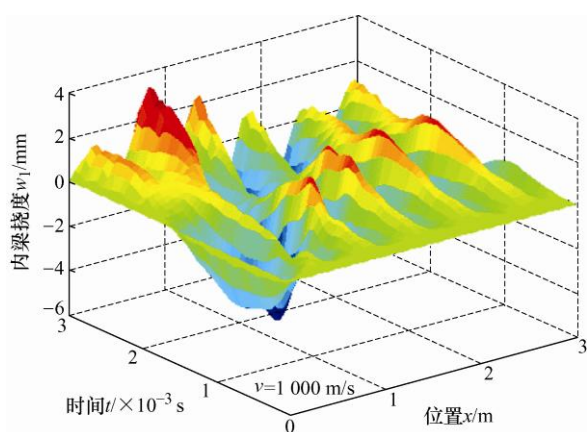


图 13 内梁挠度随时间和位置的变化曲面

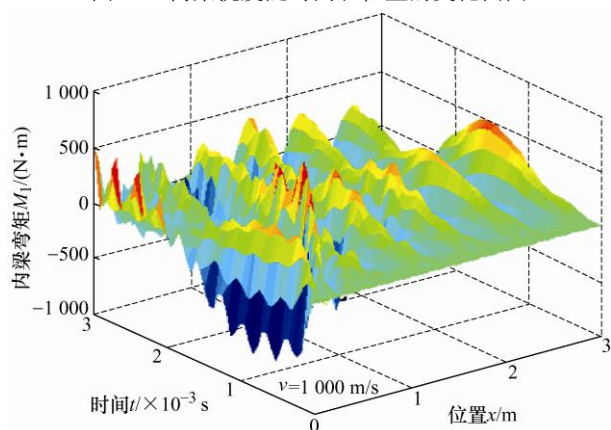


图 14 内梁弯矩随时间和位置的变化曲面

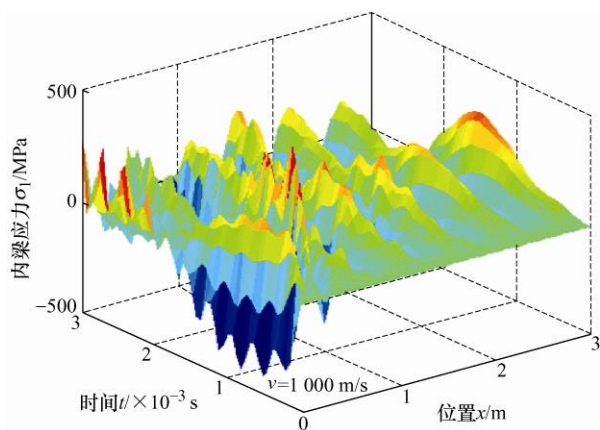


图 15 内梁应力随时间和位置的变化曲面

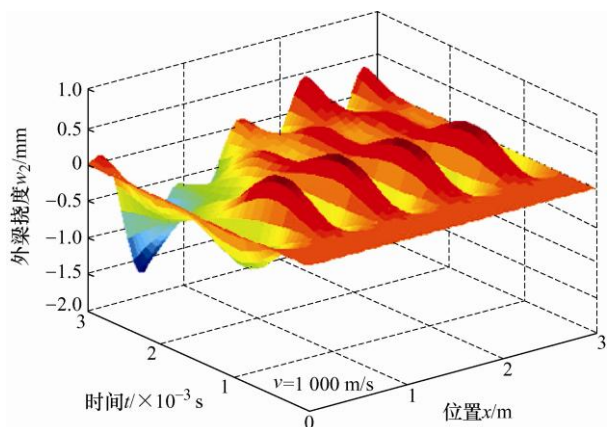


图 16 外梁挠度随时间和位置的变化曲面

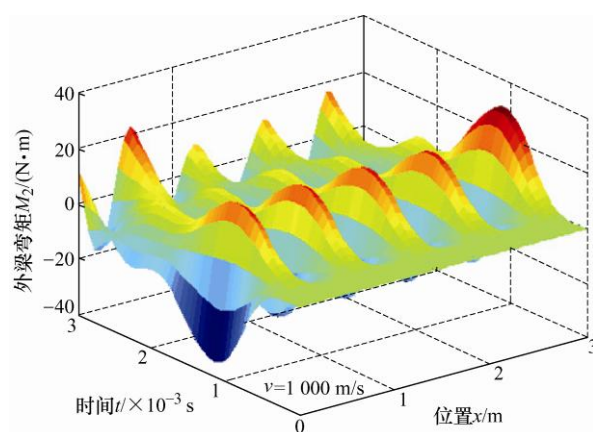


图 17 外梁弯矩随时间和位置的变化曲面

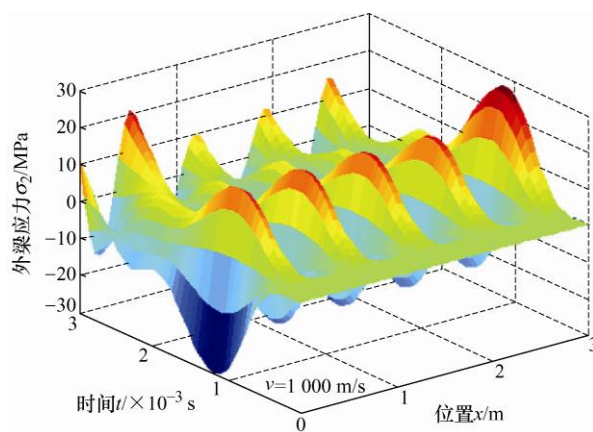


图 18 外梁应力随时间和位置的变化曲面

4 结论

本文对动集中荷载下双层弹性悬臂梁的动力响应进行了研究, 并对悬臂式电磁发射装置轨道和壁板的受迫振动进行了研究, 得到如下结果:

(1) 给出了双层悬臂梁的动态响应特征, 包括最大值出现的位置, 以及内梁响应值高于外梁响应值的特点, 可为电磁轨道炮的设计计算提供参考。

(2) 提出了适用于电磁轨道炮实际工作条件的双层弹性悬臂梁力学模型和经验证的动力学分析方法, 可为电磁发射装置的理论研究提供依据。

参 考 文 献

- [1] TZENG J T. Structural mechanics for electromagnetic railguns[J]. Journal of Transactions on Magnetics, 2005, 41(1): 246-250.
- [2] TZENG J T. Dynamic response of electromagnetic railgun due to projectile movement[J]. Journal of Transactions on Magnetics, 2003, 39(1): 472-475.
- [3] TZENG J T, SUN W. Dynamic response of cantilevered rail guns attributed to projectile/gun interaction-theory[J].

- Journal of Transactions on Magnetics, 2006, 43(1) : 207-213.
- [4] JOHNSON A J, MOON F C. Elastic waves and solid armature contact pressure in electromagnetic launchers[J]. Journal of Transactions on Magnetics, 2006, 42(3) : 422-429.
- [5] CHE Yunlong, YUAN Weiqun, XU Weidong, et al. The influence of different constraints and pretightening force on vibration and stiffness in railgun[J]. IEEE Transactions on Plasma Science, 2017, 45(7) : 1154-1160.
- [6] CAO Bin, GE Xia, GUO Wei, et al. Analysis of rail dynamic deformation during electromagnetic launch[J]. Journal of Transactions on Plasma Science, 2017, 45(7) : 1269-1273.
- [7] LEE Y H, KIM S H, An S, et al. Dynamic response of an electromagnetic launcher accelerating a C-shaped armature[J]. Journal of Transactions on Plasma Science, 2017, 45(7) : 1639-1643.
- [8] 张永胜, 鲁军勇, 谭赛, 等. 电磁轨道发射中内弹道动力响应特性分析[J]. 国防科技大学学报, 2019, 41(4) : 18-24.
- ZHANG Yongsheng, LU Junyong, TAN Sai, et al. Analysis of dynamic response of internal ballistics in electromagnetic orbit launch[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2019, 41 (4) : 18-24.
- [9] 陈铁宁, 白春艳, 张益男, 等. 电枢运动引起电磁发射轨道的动态响应[J]. 动力学与控制学报, 2010, 8(4) : 360-364.
- CHEN Tiening, BAI Chunyan, ZHANG Yinan, et al. Dynamic response of electromagnetic railgun due to armature movement[J]. Journal of Dynamics and Control, 2010, 8(4) : 360-364.
- [10] LI Shizhong, CAO Ronggang, ZHOU Yu, et al. Performance analysis of electromagnetic railgun launch system based on multiple experimental data[J]. IEEE Transactions on Plasma Science, 2019, 47(1) : 524-534.
- [11] YIN Qiang, ZHANG He, LI Haojie, et al. Analysis of in-bore magnetic field in C-shaped armature railguns[J]. Defence Technology, 2019, 15(1) : 83-88.
- [12] 何威, 白象忠. 电磁发射装置轨道及壁板的物性参数选择对其力学性能影响的分析[J]. 机械强度, 2014, 64(8) : 755-767.
- HE Wei, BAI Xiangzhong. Analysis of the influence of physical parameters on the mechanical properties of the rail and panel of electromagnetic launcher[J]. Mechanical Strength, 2014, 64(8) : 755-767.
- [13] 何威, 白象忠. 方口径电磁轨道发射装置导轨及壁板的动力响应[J]. 振动与冲击, 2013, 32(15) : 144-148.
- HE Wei, BAI Xiangzhong. Dynamic responses of rails and panels of rectangular electromagnetic rail launcher[J]. Journal of Vibration and Shock, 2013, 32(15) : 144-148.
- [14] 蔡喜元, 鲁军勇, 谭赛, 等. 基于双层梁模型的电磁轨道发射身管动力学研究[J]. 舰船科学技术, 2019, 41(5) : 101-107.
- CAI Xiyuan, LU Junyong, TAN Sai, et al. Study on the dynamics of the electromagnetic orbital launch tube based on the double beam model[J]. Ship Science and Technology, 2019, 41 (5) : 101-107.
-
- 作者简介: 何威(通信作者), 男, 1976 年出生, 博士, 副教授, 硕士研究生导师。主要研究方向为工程力学。
E-mail: hewei@ysu.edu.cn
魏彦京, 男, 1992 年出生, 硕士研究生。主要研究方向为岩土工程。
E-mail: weiyanjing17@mails.ucas.ac.cn