DOI: 10.3901/JME.2021.01.086

基于广义动平台概念的并联机构设计方法^{*}

汪从哲 杨德伟 张 毅 张亚南
(重庆邮电大学先进制造工程学院 重庆 400065)

摘要: 通过分析运动平台的本质属性, 提出广义动平台的概念。所提出的广义动平台包含输入平台、输出平台两种基本单元。借助输入平台和输出平台的运动关系, 可以将传统刚体、铰接、缩放等形式的动平台有机地统一到广义动平台的概念当中。以此为基础, 分析广义动平台和支链两个层级的各个组成要素以及典型的拓扑布局形式。基于位移子群/子流形的基本理论, 研究各个拓扑布局所对应的运动集合关系, 并提出一种基于广义动平台和支链两个层级的构型综合方法。一方面, 以提出的一种广义动平台为研究对象, 根据所提出的构型综合方法, 综合设计分别具有 1R、2R 与 3R 转动自由度的并联机构。另一方面, 探讨如何以经典的并联机构为广义动平台, 综合一类 3R3T、2R3T 并联机构。通过这两个方面的具体实施案例, 验证了广义动平台和支链两个层级划分的有效性和必要性。

关键词: 并联机构; 广义动平台; 拓扑布局; 构型综合; 李群理论

中图分类号: TH112

Design Methodology of Parallel Mechanisms Based on the Concept of Generalized Moving Platform

WANG Congzhe YANG Dewei ZHANG Yi ZHANG Yanan
(School of Advanced Manufacturing Engineering, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065)

Abstract: By means of analyzing the intrinsic attribute of moving platforms, the concept of generalized moving platform (GMP) is proposed. The proposed GMP contains two essential elements of input and output. According to the moving relation between the input and output elements, the traditional rigid platforms, articulated platforms and configurable platforms can be integrated into the concept of GMP. Based on these concepts, each element of GMP and links and the representative topology layouts are analyzed. In the light of the displacement sub-group/sub-manifold theory, the moving relations corresponding to each topology graph are researched, and one methodology of structural synthesis is established based on the two layers of GMP and links. On the one hand, according to the proposed methodology, parallel mechanisms (PM) with 1R, 2R and 3R rotational freedoms are synthesized based on the proposed GMP. On the other hand, how to synthesis a class of 3R3T and 2R3T PMs based on CMPs of typical PMs is addressed in brief. The results of the two classes of examples prove the effectiveness and necessity of the proposed two layers of GMP and links.

Key words: parallel mechanism; generalized moving platform; topology layout; structural synthesis; Li group theory

0 前言

并联机构的构型综合是并联机构相关研究的基础性工作和核心问题之一。并联机构的构型综合主要包含两个方面: 一个方面关于并联机构的拓扑布

局, 另一个方面关于构型综合的理论和方法。并联机构的拓扑布局包含了两种元素, 即运动平台以及用于连接平台而实现约束运动的支链, 运动平台与支链的连接形式即为并联机构的拓扑布局。并联机构的常规拓扑布局具有以下特点, 如包括一个动平台和一个定平台, 以及数条串联的支链, 每条支链仅有一个关节为驱动副, 首尾分别连接在动平台和定平台上, 支链的数目与动平台的自由度个数相等。针对具有常规拓扑布局的并联机构构型综合的理论

^{*} 国家自然科学基金(52005070)、重庆市教委科学技术研究(KJQN201900640, KJ1704100)和重庆市基础科学与前沿技术研究(cstc2017jcyjAX0396)资助项目。20191230 收到初稿, 20200420 收到修改稿

或方法有多种, 如位移李子群/子流形^[1]、旋量理论^[2]、单开链的构型方法^[3]、 G_F 集理论^[4]、Gogu 提出的线性变换理论^[5]等。随着对并联机构研究的深入, 并联机构的拓扑布局在不断的演化, 所对应的综合方法也层出不穷。

首先, 可以从支链的角度改变并联机构的拓扑布局。例如, 改变支链的数目, 或者改变每条支链上的驱动数目。如 GOGU 等^[6-8]在提出的冗余驱动并联机构中, 每条支链可能存在多个主动关节, 或者增加一条或数条额外的主动支链, 即支链的数目与动平台自由度的个数不再一一对应。另一方面, 也可以改变支链的结构形式。在常规并联机构中, 支链的结构通常是串联的, 即为开式链, 支链内并不存在闭环结构, 而在并联机构的创新研究当中, 支链的结构形式并不唯一, 可能是串联的, 也可能是并联的, 甚至是串并混联的。例如, ARATA 等^[9]利用含两个平行四边形的支链, 设计了一种冗余驱动 6 自由度并联机构。GOGU^[5-6]在使用线性变换理论综合并联机构时, 综合了多种含有闭环结构的支链, 构建了具有不同性质的并联机构, 如各向同性或冗余驱动各向同性。TIAN 等^[10]利用图论和螺旋理论的方法综合了含有耦合支链的并联机构。ZHAO 等^[11]通过提出多输入驱动单元, 综合和分析了一系列含有闭环子支链的并联机构。XIE 等^[12]通过使用含有闭环结构的支链, 提出了一种新型的 5 自由度并联机构, 且可用于机械加工系统。YE 等^[13]将具有奇异特性的闭链与固定自由度串联支链相结合, 设计了混联支链, 并由此综合了一类可重构并联机构。在以上的研究当中, 并联机构的拓扑布局仍采用了传统划分, 仍然是把动平台看作刚体, 只不过支链的形式要更加复杂。

其次, 可以从运动平台的角度改变并联机构的拓扑布局。例如, 设计具有不同形式的铰接动平台, 实现末端执行器的不同自由度。COMPANY 等^[14]提出的 H4 并联操作手为该类型动平台应用在并联机构设计的典型案例。在 H4 的基础上, COMPANY 等还设计了具有其他形式的铰接动平台, 如 I4L^[15]、Par4^[16]、Heli4^[17]等。黄田等也提出了三种称之为 CrossIV 高速 1R3T 并联机械手^[18-20]。此外, 针对使用铰接动平台设计其他自由度形式的并联机构的研究也零星出现在文献中。例如, KRUT 等^[21]通过设计特殊的铰接动平台, 提出了一种可以实现两个方向的大转角转动的 2R3T 并联机构。SUN 等^[22]利用一种含螺旋副的铰接动平台, 综合了一类 3R1T 并联机构。本文作者设计了具有两转动自由度和三转

动自由度的转动平台, 并由此综合了一类 2R2T、2R3T 和 3R2T、3R3T 并联机构^[23-24]。JIN 等^[25-26]设计了一类具有两转动自由度的转动平台, 综合了一类 2R2T、2R3T 并联机构。此外, 还可以设计具有缩放功能的运动平台。例如, 文献[27]提出的平面 4 自由度并联机构, 其动平台结构是一个菱形, 利用菱形结构的伸缩来完成夹取任务。LAMBERT 等^[28-29]分别设计了一个八边形和一个四边形的缩放动平台, 并由此设计了一种 5 自由度和一种 7 自由度的并联机构, 两种机构都可以完成夹取操作。

上述文献中提到的铰接动平台、缩放动平台, 与传统布局中的刚体动平台是截然不同的。但无论是具有何种形式的动平台, 该动平台都是在几条支链的作用下进行运动。如图 1 所示, 如果用一黑箱把动平台罩住, 包含动平台的黑箱在支链的作用下同样会整体运动。事实上, 黑箱可以仅包括一个刚体动平台, 也可以是上文中说的铰接动平台、缩放动平台, 甚至是某一个机构, 诸如串联、并联、混联机构等。本文将这个整体运动的黑箱定义为广义动平台。广义动平台是对传统刚体动平台概念的推广。与传统的刚体动平台相比, 广义动平台不仅可以是一个构件, 也可以是包含多个构件和运动副的运动链, 甚至是某一个机构。而上文中所说的刚体动平台、铰接动平台、缩放平台都属于广义动平台的一种类型。

图 1 运动平台的演化

如图 1c 所示, 引入广义动平台的概念后, 并联机构的拓扑布局包含基座、支链、广义动平台等三部分。由于广义动平台的内部可能含有支链, 因此, 其综合设计方法必然与针对传统拓扑布局划分的方法有所不同。然而如前所述, 在针对支链的研究中仍采用了传统的划分; 而针对运动平台设计的研究当中, 大多数是以个例的形式存在, 仍没有形成一定的综合方法。为此, 本文将在作者以前的研究基础上^[23-24, 30], 提出并联机构的构型综合设计可以包含两个层级, 即广义动平台层级和支链层级, 并建立一种基于位移子群/子流形的构型综合方法。按照该方法, 综合设计了分别具有 1R、2R 与 3R 转动自

由度的并联机构。最后简要讨论如何以经典的并联机构为广义动平台，综合一类 3R3T、2R3T 并联机构。

1 含广义动平台的并联机构的构型综合方法

1.1 典型拓扑布局

首先，需要定义广义动平台和支链两个层级的组成要素。虽然广义动平台的结构有多种多样，但广义动平台的功能是明确的，即广义动平台不仅要接受支链输入的运动或约束，又要向外输出运动。因此，从功能上划分，广义动平台应该包含两个基本平台单元，即输出平台单元和输入平台单元，其中输入平台单元接受支链的输入运动或约束，输出平台单元连接有末端执行器；通过广义动平台内部的支链，将输入平台单元的运动传递或转换到输出平台单元的运动，以实现对外做功。因此，广义动平台的拓扑布局可表述为输出平台单元与输入平台单元的连接方式。需要说明的是，输入、输出平台单元只是功能层面的一种定义，是一种抽象概念，与物理层面，即具体结构中的平台并不是一一对应的。比如，当广义动平台为传统刚体动平台时，那么动平台既是输入平台单元，也是输出平台单元。再分析支链层级，支链层的一端与基座相连，另外一端与广义动平台层相连。根据支链对广义动平台层输入的运动或约束不同，支链可分为主动约束支链、主动无约束支链、被动约束支链三类。因此，组成要素概括起来有输出平台、输入平台、主动约束支链、主动无约束支链、被动约束支链、驱动副、基座、末端执行器。

根据不同的组成要素，含广义动平台并联机构的拓扑布局可以归纳为以下四种典型类型。

(1) 第一类拓扑布局，如图 2 所示。在该类拓扑布局当中，支链层级只包含主动约束支链，所有的驱动副都位于该层级当中，广义动平台层级不包含任何的主动关节。支链不仅将运动传递到广义动平台当中，还对广义动平台提供一定的约束。

图 2 第一类拓扑布局

(2) 第二类拓扑布局，如图 3 所示。支链层级包含主动约束和主动无约束两类支链。主动约束支链对广义动平台提供一定约束。所有的驱动副仍位于支链层级中。

图 3 第二类拓扑布局

(3) 第三类拓扑布局，如图 4 所示。支链层级包含了主动无约束和被动约束两类支链，其中被动约束支链对广义动平台提供一定约束。所有的驱动副位于主动无约束支链中。

图 4 第三类拓扑布局

(4) 第四类拓扑布局，如图 5 所示。该类拓扑布局具有与第三类拓扑布局类似的支链层级，即包含主动无约束和被动约束两类支链。不同的是，该类拓扑布局中的广义动平台层级还存在有驱动副。为了保持并联机构的并联驱动的特点，主动无约束支链与输出平台相连，被动约束支链与输入平台相连。

图 5 第四类拓扑布局

若第一、二、三类拓扑布局的广义动平台含有驱动副，则驱动的方式不再是并联驱动，而是混联驱动。因此，虽然拓扑布局的方式还有很多，但考虑并联机构的驱动特点，本文着重分析以上四种典型拓扑布局类型。

1.2 表示方法

本文采用位移李群及位移流形理论描述拓扑布局各个组成要素的运动关系。借助位移李群理论的相关术语，对拓扑布局的各个组成要素进一步细化。如图 6 所示，含有广义动平台的并联机构包括广义动平台、一级支链、二级支链和基座四部分。其中，广义动平台包括了输入平台单元(记为 IMP)、输出平台单元(记为 OMP)与末端执行器(记为 EE)；末端执行器连接在输出平台单元上；输出平台单元的位移子群/子流形记作 $\{M_{OMP}\}$ 。为后面叙述方便，用术语“运动集合”来代替“位移子群/子流形”。由于广义动平台的具体结构未知，输入平台单元和输出平台单元的数量，以及相互之间的连接方式有多种情况。如果某一输入平台单元通过一条单独的链路连接到输出平台单元，则从该输入平台单元到输出平台单元的运动集合可以记为 $\{M^{IO}\}$ 。

图 6 基于位移李群理论表示的拓扑布局

支链又分为两个层级：第一层级为一级支链，第二层级为二级支链。以图 6 中的 A1、A2 构件为例，A1、A2 构件分别与广义动平台中的某一输入平台单元固接。构件 A1、A2 与基座之间的支链称为一级支链，分别记作 L_{A1} 、 L_{A2} ，所生成的运动集合则分别记作 $\{M_{A1}\}$ 、 $\{M_{A2}\}$ 。另一方面，考虑到支链分为主动约束支链、主动无约束支链、被动约束支链等三类，作以下约定：分别记主动约束支链、主动无约束支链与被动约束支链为 I、II、III 类支链。以主动约束支链(I 类支链)为例，其所对应的一级支链记为 L^I ，所生成的运动集合记作 M^I 。II、III 类支

链与之类似。

如图 6 所示，一级支链 L_{A1} 由几条支链串联组成，则称这些串联的支链为二级支链，记为 $L_{A1Si}(i = 1, 2, \dots, m)$ ，相应的运动集合记作 $\{M_{A1Si}\}$ 。若 L_{A1} 为 I 类支链，可进一步记为 L_{A1}^I ，相应运动集合记为 $\{M_{A1}^I\}$ 。显然，所有串联的二级支链所生成的运动集合的乘积等于一级支链所表示的运动集合，即

$$\{M_{A1}^I\} = \{M_{A1S1}\} \cdot \{M_{A1S2}\} \cdots \{M_{A1Sm}\} = \prod_{i=1}^m \{M_{A1Si}\} \quad (1)$$

式中，“ $\cdot$ ”表示的是群的乘积运算。

若二级支链由几条支链并联组成，如图中所示的 L_{A2} ，则将这些并联的支链记作 $L_{A2Pi}(i = 1, 2, \dots, m)$ ，所表示的运动集合记作 $\{M_{A2Pi}\}$ 。类似地，若 L_{A2} 为 I 类支链，可进一步记为 L_{A2}^I 与 $\{M_{A2}^I\}$ 。所有并联的二级支链所生成的运动集合的交集等于一级支链所表示的运动集合，即

$$\{M_{A2}^I\} = \{M_{A2P1}\} \cap \{M_{A2P2}\} \cap \cdots \cap \{M_{A2Pm}\} = \bigcap_{i=1}^m \{M_{A2Pi}\} \quad (2)$$

II、III 类支链的二级支链也有上述串联、并联两种情形，因此具有类似的结论。

1.3 运动集合关系

对于第一类拓扑布局，支链层级只包含主动约束支链，即 I 类支链。因此，输出平台单元的运动集合 $\{M_{OMP}\}$ ，不仅取决于输入平台单元与输出平台单元的连接关系，还要考虑 I 类支链施加在输入平台单元的约束集合。为保证预期的 $\{M_{OMP}\}$ ，所有一级 I 类支链所生成的运动集合的交集应该满足如下关系式

$$\{M_{OMP}\} = \{M_{A1}^I \cup M_{A1}^{IO}\} \cap \{M_{A2}^I \cup M_{A2}^{IO}\} \cap \cdots \cap \{M_{An}^I \cup M_{An}^{IO}\} \quad (3)$$

式中， $\{M_{An}^I\}$ 表示的是第 n 个输入平台单元上所连接的 I 类支链产生的运动集合； $\{M_{An}^{IO}\}$ 表示第 n 个输入平台单元到输出平台单元的运动集合。 $\{M_{An}^I\}$ 与 $\{M_{An}^{IO}\}$ 的并集还可记作 $\{M_{An}^{OT}\}$ ，表示考虑输入平台 An 的一级支链后，从该输入平台到输出平台的运动集合。值得说明的是，在该类拓扑布局当中，I 类支链的数量与输入平台单元的数量是对应的。上式成立的条件是每个输入平台通过一条单独的链路连接到输出平台单元。若存在其他连接方式，上式需要做出相应的改变。

对于第二类拓扑布局，支链层级包含主动约束

支链(I 类支链)和主动无约束(II 类支链)两类支链。其中, II 类支链对广义动平台不提供任何约束, 因此广义动平台的运动集合取决于 I 类支链。类似地, 为保证预期的 $\{M_{OMP}\}$, 需要满足式(3)。在该类拓扑布局当中, I 类支链的数量与输入平台单元的数量并不相等, 因此计算时, 只需要计入与 I 类支链连接的输入平台单元即可。

对于第三类拓扑布局, 支链层级包含主动无约束支链(II 类支链)和被动约束支链(III 类支链)。广义动平台的运动集合与被动约束支链提供的约束有关。因此为保证预期的 $\{M_{OMP}\}$, 所有 III 类支链支链所生成的运动集合的交集应该满足如下关系式

$$\{M_{OMP}\} = \{M_{A1}^{III} \cup M_1^{IO}\} \cap \{M_{A2}^{III} \cup M_2^{IO}\} \cap \cdots \cap \{M_{An}^{III} \cup M_n^{IO}\} \quad (4)$$

式中, $\{M_{An}^{III}\}$ 表示的是第 n 条 III 类支链产生的运动集合, 并输入到第 n 个输入平台单元上; 鉴于该类拓扑布局还存在与 II 类支链相连的输入平台单元, 计算时同样只需计入与 I 类支链连接的输入平台单元。

对于第四类拓扑布局, 支链层级与第三类拓扑布局相同, 只不过驱动副的布置不一样, 但驱动副的布置并不影响广义动平台的运动集合。因此, 输出平台单元的运动集合 $\{M_{OMP}\}$ 与 III 类支链的运算关系仍然需要满足式(4)。

1.4 构型综合基本步骤

根据上述对拓扑布局的分析, 结合位移李群理论, 含有广义动平台的并联机构的构型综合的具体流程如图 7 所示。各步骤详解如下。

图 7 构型综合步骤的具体流程图

(1) 广义动平台的结构设计。根据广义动平台的概念可知, 广义动平台的结构形式是多种多样的。为此, 本文将广义动平台的结构划分为三种类型: 单一构件单元、运动链单元和机构单元。单一构件

单元指的就是传统的刚体动平台, 其结构设计可以从输入平台单元的连接方式切入, 比如共线、共点等; 机构单元指的是以常见的串/并联或平面/空间机构作为广义动平台, 如 3-RRR 球面并联机构, 3-RPS 并联机构等; 运动链单元的范围要更广, 只要是包含两个及以上构件的, 都属于这个范畴。为叙述方便, 分别记单一构件单元、运动链单元和机构单元所对应的广义动平台为 I、II、III 类广义动平台。

在进行广义动平台结构设计时, 首先需要选择广义动平台的结构类型。然后根据不同的结构类型, 进行结构设计, 确定组成广义动平台的构件数量及具体的连接方式。

(2) 确定广义动平台的输入和输出关系。选择广义动平台的输出平台、输入平台; 根据自由度的要求, 确定输出平台单元的运动集合 $\{M_{OMP}\}$; 分析各输入平台到输出平台的连接方式, 确定 $\{M_i^{IO}\}$ 。

(3) 选择拓扑布局的类型。分析所设计广义动平台的运动特点, 选择合适的拓扑布局类型。

(4) 确定一级支链的运动集合。根据拓扑布局的类型, 结合式(3)与式(4), 确定各输入平台所对应一级支链的运动集合 $\{M_{Ai}\}$ 。

(5) 确定二级支链的运动集合。根据已确定的一级支链的运动集合, 寻找符合式(1)、(2)的二级支链的运动集合。由于二级支链与基座直接相连, 故其数目一般可根据 $\{M_{OMP}\}$ 自由度的个数而确定。

(6) 构造各分支运动链, 确定驱动副, 装配并联机构。确定二级支链所对应的运动支链, 以及选择驱动副。根据几何约束条件, 装配各支链到广义动平台上, 完成并联机构的构型综合。

接下来, 将重点讨论针对含 II 或 III 类广义动平台的并联机构的综合设计问题。

2 含 II 类广义动平台的并联机构的综合设计

2.1 广义动平台的结构设计

II 类广义动平台的结构类型为运动链单元。根据运动链单元类型的定义可知, 该类广义动平台的结构形式是多种多样的。为此, 提出从简单到复杂的研究路线。具体来说, 对于广义动平台的结构设计, 可以从最基本的结构出发, 比如可以分别从串联、并联, 或者平面、空间中最基本的运动链开始分析和研究。

按照以上的研究思路, II 类广义动平台的设计可以从基本的运动链出发。一种思路可以从 Assur

杆组的角度切入。根据 Assur 杆组的相关理论, 最简单的基本杆组是有 2 个构件和 3 个低副构成, 即所谓的 II 级组。从 II 级组的结构形式, 可以抽象出广义动平台的一种拓扑布局形式, 即包括两个平台和一个运动副, 其中两个平台通过运动副相连。根据这样的拓扑布局, 可以设计多种运动链; 如运动副可以是 R、P、H、平行四边形复合铰链等, 再考虑运动副轴线与两个平台的相对位置, 该类广义动平台的结构形式存在多种情况。需要说明的是, 针对含有 H 的广义动平台的综合, 已在作者以前的工作中有过研究^[30]。本文所要研究的一种广义动平台如图 8 所示, 包括平台 1 和平台 2, 两平台通过转动副相连, 转动副的轴线在图示位置时为竖直方向。

图 8 一种广义动平台的设计过程

2.2 输入和输出关系

图 8 所示的广义动平台的结构特点是可以相互转动。以结构而论, 平台 1 和平台 2 并无本质区别, 因此输出平台可以任选其一。不妨设平台 1 为输出平台, 平台 2 为输入平台, 并记平台 1 和平台 2 分别为 A1 和 A2。鉴于平台 1 的输入输出特性, 则其从输入平台单元到输出平台单元的运动集合 $\{M_1^{IO}\}$ 有下式

$$\{M_1^{IO}\} = \{\emptyset\} \quad (5)$$

对于输入平台 2, 从输入平台单元到输出平台单元的运动集合 $\{M_2^{IO}\}$ 则有

$$\{M_2^{IO}\} = \{R(O, m)\} \quad (6)$$

式中, $\{R(O, m)\}$ 表示绕轴线 (O, m) 的一维转动位移群; (O, m) 表示平行于单位矢量 m 且经过点 O 的轴线。

进一步, 如果平台 1 和平台 2 还具有其他的输入转动自由度, 输出平台 1 的转动输出将具有不同的形式。所以, 需要分析平台 1 和平台 2 的可能输入转动自由度, 从而研究输出转动自由度的可能形式。如表 1 所示, 数字 0~3 表示转动自由度的个数, 根据排列组合的知识可知, 存在 16 种情况。鉴于广义动平台具有的对称结构, 仅考虑表中的下半区。详细讨论如下。

表 1 转动自由度列举

A1	A2			
	0	1	2	3
0	R_{00}	—	—	—
1	R_{10}	R_{11}	—	—
2	R_{20}	R_{21}	R_{22}	—
3	R_{30}	R_{31}	R_{32}	R_{33}

(1) R_{00} : 当平台 1 和平台 2 都不具有输入转动自由度时, $\{M_{OMP}\}$ 不包含转动自由度。

(2) R_{10} : 平台 1 具有一个输入转动自由度, 不妨记为 $\{R(N, n)\}$, 则有 $\{M_{A1}^{OT}\} = \{R(N, n)\}$; 对于平台 2 则有, $\{M_{A2}^{OT}\} = \{R(O, m)\}$ 。当 $\{R(N, n)\}$ 与 $\{R(O, m)\}$ 的轴线互不重合时, $\{M_{OMP}\} = \{\emptyset\}$, 即无转动输出; 当两者轴线重合时, $\{M_{OMP}\} = \{R(O, m)\}$, 存在一维转动输出。

(3) R_{21} : 记平台 2 的输入转动自由度为 $\{R(N_2, n_2)\}$, 则 $\{M_{A2}^{OT}\} = \{R(N_1, n_1)\} \cdot \{R(O, m)\}$ 。平台 1 的两个输入转动自由度有多种形式, 如果两转动轴线共点, 则有 $\{M_{A1}^{OT}\} = \{R(N_2, n_2)\} \cdot \{R(N_2, n_3)\}$ 。该类 $\{M_{OMP}\}$ 的输出至多有两个转动自由度, 但所对应的几何条件非常苛刻。

(4) R_{22} : 如果平台 2 的两个输入转动的轴线交于点 O , 则 $\{M_{A2}^{OT}\} = \{R(O, m_1)\} \cdot \{R(O, m_2)\} \cdot \{R(O, m)\}$ 。当 m_1 、 m_2 和 m 线性独立时, $\{M_{A2}^{OT}\}$ 为 $\{S(O)\}$ 的等效子群。若平台 1 的两个输入转动的轴线也交于点 O 时, 则 $\{M_{A1}^{OT}\} = \{R(O, n_1)\} \cdot \{R(O, n_2)\}$, 为 $\{S(O)\}$ 的一个二维位移子流形。此时, $\{M_{OMP}\}$ 为 $\{M_{A1}^{OT}\}$ 。虽然 $\{M_{OMP}\}$ 的输出至多仍为两个转动自由度, 但几何约束条件比较简单, 容易满足。

(5) R_{32} : 如果平台 1 的三个输入转动的轴线交于点 O , 则 $\{M_{A1}^{OT}\} = \{S(O)\}$ 。若平台 2 的两个输入转动轴线也交于点 O , 则有 $\{M_{A2}^{OT}\} = \{R(O, m_1)\} \cdot \{R(O, m)\}$, 当 m_1 、 m_2 和 m 线性独立时, $\{M_{A2}^{OT}\}$ 为 $\{S(O)\}$ 的等效子群。所以, $\{M_{OMP}\} = \{S(O)\}$, 可以实现三个转动自由度的输出。

(6) R_{33} : 此时, 平台 1 和平台 2 都具有三个输入转动自由度, 若都交于点 O 时, 则为 $\{S(O)\}$ 。此时 R_M 所具有的 $\{R(O, m)\}$ 为冗余自由度, 因为 $\{M_{A2}^{OT}\} = \{S(O)\} \cdot \{R(O, m)\}$ 仍为 $\{S(O)\}$ 。为此, 不考虑此类输入情况。

其余情形可以类似地进行分析。在排除 R_{00} 和 R_{33} 两种类型之后, 根据输出转动自由度的个数, 可以对余下的 8 种类型进行归类分析。如表 2 所示, 具有一个输出转动自由度的记为 “1R”, 两个或三

个的情况依次类推；表中“Y”表示具有相应的输出转动自由度。接下来，根据表 2 的分析结果，分别探讨具有 1R、2R 和 3R 转动输出的并联机构综合设计。

表 2 输出转动自由度数目

	R ₁₀	R ₁₁	R ₂₀	R ₂₁	R ₂₂	R ₃₀	R ₃₁	R ₃₂
1R	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
2R	—	—	—	Y	Y	—	Y	Y
3R	—	—	—	—	—	—	—	Y

2.3 综合具有 1R 自由度的并联机构

考虑移动自由度，该类并联机构自由度的类型又可以分为 1R1T、1R2T 和 1R3T。接下来，仅以 1R3T 为例，阐述该类并联机构的综合步骤。

由表 2 可知，R₁₀ 可以实现 1R 转动输出。根据 R₁₀ 的输出特性可知，所综合的 1R3T 并联机构实际上是过约束机构。因为只要平台 2 保持三维平动，平台 1 的其他转动输出都会受到限制。正如表 2 中的 R₂₀ 与 R₃₀ 所示，平台 1 可以具有其他输入转动自由度。因此，可以基于不同的自由度输出类型综合非过约束的 1R3T 并联机构。接下来，以 R₂₁ 例，进行详细说明。

(1) 确定输入平台 1 与输入平台 2 一级支链的运动集合。

根据 R₂₁ 的输出特性可知，在一定条件下，可以比较容易地实现一个自由度的转动输出。由前面的讨论可知，在不考虑移动输入的情况下， $\{M_{A2}^{OT}\} = \{R(N_1, n_1)\} \cdot \{R(O, m)\}$ 以及 $\{M_{A1}^{OT}\} = \{R(N_2, n_2)\} \cdot \{R(N_3, n_3)\}$ 。由于 $\{R(O, m)\}$ 为平台 1 和平台 2 之间的固有运动副，为保证一个转动自由度的输出， $\{M_{A1}^{OT}\}$ 应该包含 m 的方向的转动自由度，即 $\{M_{A1}^{OT}\} = \{R(N_2, n_2)\} \cdot \{R(N_3, m)\}$ 。

先考虑输出平台 1 的三维平移运动， $\{M_{A1}^I\}$ 除了包括两转动之外，还应有 $\{T\}$ 。对于平台 1， $\{M_{A1}^{OT}\}$ 与 $\{M_{A1}^I\}$ 相同，并有如下表达式

$$\{M_{A1}^{OT}\} = \{M_{A1}^I\} = \{T\} \cdot \{R(N_2, n_2)\} \cdot \{R(N_3, m)\} = \{X(n_2)\} \cdot \{R(N_3, m)\} \quad (7)$$

再考虑输入平台 2 的三维平移运动， $\{M_{A2}^I\}$ 除了 $\{R(N_1, n_1)\}$ 转动之外，还应包括 $\{T\}$ ，所以 $\{M_{A2}^I\} = \{T\} \cdot \{R(N_1, n_1)\}$ 。结合 $\{M_2^{IO}\}$ ， $\{M_{A2}^{OT}\}$ 可表示为

$$\{M_{A2}^{OT}\} = \{T\} \cdot \{R(N_1, n_1)\} \cdot \{R(O, m)\} = \{X(n_1)\} \cdot \{R(O, m)\} \quad (8)$$

可以证明在 n_1 与 n_2 互不平行时， $\{M_{A1}^{OT}\}$ 与

$\{M_{A2}^{OT}\}$ 的交集满足自由度的要求。证明如下。

证明 1：根据 $\{X(n_2)\}$ 群乘法的封闭性法则， $\{T\} \cdot \{R(N_2, n_2)\}$ 与 $\{T\} \cdot \{R(O, n_2)\}$ 均是 $\{X(n_2)\}$ 等效子群。故式(7)可表示为

$$\{M_{A1}^{OT}\} = \{T\} \cdot \{R(O, n_2)\} \cdot \{R(N_3, m)\} \quad (9)$$

根据位移子群乘法的交换性法则， $\{T\} \cdot \{R(O, n_2)\}$ 与 $\{R(O, n_2)\} \cdot \{T\}$ 是等效的。则有

$$\{M_{A1}^{OT}\} = \{R(O, n_2)\} \cdot \{T\} \cdot \{R(N_3, m)\} \quad (10)$$

注意上式中的后面两项 $\{T\} \cdot \{R(N_3, m)\}$ 是 $\{X(m)\}$ 的等效子群。同理，根据 $\{X(m)\}$ 群的运算法则，可得

$$\{M_{A1}^{OT}\} = \{R(O, n_2)\} \cdot \{R(O, m)\} \cdot \{T\} \quad (11)$$

根据相似的方法， $\{M_{A2}^{OT}\}$ 也可展开为以下形式

$$\{M_{A2}^{OT}\} = \{R(O, n_1)\} \cdot \{R(O, m)\} \cdot \{T\} \quad (12)$$

比较式(11)与式(12)，后面两项相同；式(11)的第一项 $\{R(O, n_2)\}$ 与式(12)的第一项 $\{R(O, n_1)\}$ ，因转动副轴线的方向不一致，其交集为空子集，则有

$$\{M_{A1}^{OT}\} \cap \{M_{A2}^{OT}\} = \{R(O, m)\} \cdot \{T\} = \{X(m)\} \quad (13)$$

由上式可知， $\{M_{A1}^{OT}\}$ 与 $\{M_{A2}^{OT}\}$ 的交集具有三个移动和一个转动输出，符合自由度的要求。证明完毕。

(2) 确定输入平台 1 与输入平台 2 的二级支链

鉴于 $\{M_{OMP}\}$ 具有四个自由度，平台 1 和平台 2 的二级支链数目可以各是两条。

由 $\{M_{A2}^I\} = \{X(n_1)\}$ 可知，平台 2 的两条并联二级支链可以是相同的，即 $\{M_{A2P1}\} = \{X(n_1)\}$ 以及 $\{M_{A2P2}\} = \{X(n_1)\}$ 。除此之外，结合证明 1 的相关结论可知，当 $\{M_{A2P1}\} = \{X(n_1)\} \cdot \{R(N_4, n_4)\}$ ， $\{M_{A2P2}\} = \{X(n_1)\} \cdot \{R(N_5, n_5)\}$ 时，只要 n_4 与 n_5 互不平行， $\{M_{A2P1}\}$ 与 $\{M_{A2P2}\}$ 的交集仍为 $\{X(n_1)\}$ 。

根据 $\{M_{A1}^I\} = \{X(n_2)\} \cdot \{R(N_3, m)\}$ ，平台 1 的两条并联二级支链也可以是相同的，则有 $\{M_{A1P1}\} = \{X(n_2)\} \cdot \{R(N_3, m)\}$ 以及 $\{M_{A1P2}\} = \{X(n_2)\} \cdot \{R(N_3, m)\}$ 。

(3) 构造各分支运动链，确定驱动副，装配并联机构

$\{X(n_1)\}$ 的等效运动链有多种。以 $\{X(n_1)\}$ 为例，典型的运动链有 ${}^{n1}R^{n1}R^{n1}P_a^{n1}R$ ， ${}^{n1}P^{n1}R^{n1}P_a^{n1}R$ ， ${}^{n1}R^{n1}R^{n1}C$ ， ${}^{n1}P^{n1}R^{n1}C$ ，这里 P_a 表示的是通过转动副组成的平行四边形链。

$\{X(n_2)\} \cdot \{R(N_3, m)\}$ 可以在 $\{X(n_2)\}$ 的基础上，增加一个轴线平行于 m 的转动副即可。根据证明 1 的相关结论可知，该转动副只需要轴线平行于 m ，对其位置没有任何约束条件。其等效运动链可以是

$n^2R^2R^2P_a^2R^mR$, ${}^uP^2R^2P_a^2R^mR$, $n^2R^2R^2C^mR$, ${}^uP^2R^2C^mR$ 。

$\{X(n_1)\} \cdot \{R(N_4, n_4)\}$ 以及 $\{X(n_1)\} \cdot \{R(N_5, n_5)\}$ 除了通过在 $\{X(n_1)\}$ 的基础之上通过增加一个转动副实现, 还可以使用含球铰的平行四边形链实现。以 $\{X(n_1)\} \cdot \{R(N_4, n_4)\}$ 为例, 其等效运动链可以是 ${}^{n1}R^1P_5$ 或 ${}^uP^{n1}P_5$, 这里 P_5 表示的是通过球铰组成的平行四边形链。再根据相应的几何条件装配以上各支链, 并确定相关支链的驱动副, 所综合出的第二类 1R3T 并联机构如表 3 所示。图 9 所示的是其中两种构型。

表 3 1R3T 并联机构列举

组成要素	1R3T 并联机构
一级支链	A1: $\{X(N_2, n_2)\} \cdot \{R(N_3, m)\}$; A2: $\{T\} \cdot \{R(N_1, n_1)\}$
二级支链	A1: $\{X(n_2)\} \cdot \{R(N_3, m)\}$ 与 $\{X(n_2)\} \cdot \{R(N_3, m)\}$ A2: $\{X(n_1)\}$ 与 $\{X(n_1)\}$; 或者 $\{X(n_1)\} \cdot \{R(N_4, n_4)\}$ 与 $\{X(n_1)\} \cdot \{R(N_5, n_5)\}$
等效运动链	A1: $n^2R^2R^2P_a^2R^mR$, ${}^uP^{n2}R^2P_a^2R^mR$, $n^2R^2R^2C^mR$, ${}^uP^{n2}R^2C^mR$; A2: $n^1R^1R^1P_a^1R$, ${}^uP^{n1}R^1P_a^1R$, $n^1R^1R^1C$, ${}^uP^{n1}R^1C$; 或者 $n^1R^1P_5$, ${}^uP^{n1}P_5$
说明	n_1 与 n_2 互不平行, n_4 与 n_5 互不平行

图 9 1R3T 并联机构的两种构型

为扩大输出平台单元转动输出的角度, 对广义动平台做了一些改进。如图 10 所示, 在输入平台与输出平台之间, 增加一个行星齿轮增速器, 可以扩大末端执行器的转动角度。

图 10 一种含行星增速器的 1R3T 并联机构

2.4 综合具有 2R 自由度的并联机构

同样考虑移动自由度, 该类并联机构自由度的类型又可以分为 2R1T、2R2T 和 2R3T。接下来, 将首先探讨 2R1T 并联机构的综合分析, 然后再讨论 2R3T 并联机构的综合。

2.4.1 2R1T 并联机构的综合

由上文可知, R_{22} 容易实现 2R 转动输出, 所以, 接下来分析如何通过 R_{22} 实现 2R1T 的自由度输出。

(1) 确定输入平台 1 与输入平台 2 一级支链的运动集合。

根据 R_{22} 的输出特性, 转动输出平台 1 的转动自由度的形式取决于平台 1 的两个输入转动自由度。平台 1 的两个输入转动的轴线存在共点与异面等情况。讨论共点的情况, 设交于点 O , 转动轴线分别平行于 i 和 m_1 , 则 $\{M_{A1}^{OT}\} = \{R(O, i)\} \cdot \{R(O, m_1)\}$ 。在此基础上, 考虑输出平台 1 的一维平移运动, 不妨设该运动为 $\{T(k)\}$ 。输出平台 1 的输出运动 $\{M_{OMP}\}$ 则可进一步表示为

$$\{M_{OMP}\} = \{T(k)\} \cdot \{R(O, i)\} \cdot \{R(O, m_1)\} \quad (14)$$

上式表明了平台 1 的输出特性, 而平台 1 的输入运动所对应的情况要复杂得多, 即 $\{M_{A1}^I\}$ 有多种选择, 如表 4 所示, 表中的“Y”表示具有相应的自由度。第一类情形, $\{M_{A1}^I\}$ 与 $\{M_{OMP}\}$ 相同, 但对应运动链的选择非常有限; 第三类情形, $\{M_{A1}^I\}$ 包含了两个冗余的移动自由度, 需要平台 2 的支链进行约束; 相比之下, 第二类情形要更简单, $\{M_{A1}^I\}$ 只包含一个冗余移动自由度。所以, 选择第二类情形作为研究对象。再考虑 $\{M_{A1}^{OT}\}$ 与 $\{M_{A1}^I\}$ 相同, 有如下关系式

表 4 平台 1 输入运动的类型

	$\{R(O, i)\}$	$\{R(O, m_1)\}$	$\{T(k)\}$	$\{T(j)\}$	$\{T(i)\}$
类 1	Y	Y	Y	—	—
类 2	Y	Y	Y	Y	—
类 3	Y	Y	Y	Y	Y

$$\{M_{A1}^{OT}\} = \{M_{A1}^I\} = \{T(j)\} \cdot \{T(k)\} \cdot \{R(O, i)\} \cdot \{R(O, m_1)\} \quad (15)$$

式中, $\{T(j)\} \cdot \{T(k)\} \cdot \{R(O, i)\}$ 为 $\{G(i)\}$ 的等效子群。上式还可表示为

$$\{M_{A1}^I\} = \{G(i)\} \cdot \{R(O, m_1)\} \quad (16)$$

对于输入平台 2, 鉴于 $\{M_2^{IO}\} = \{R(O, m)\}$, $\{M_{A2}^I\}$ 还应包括其余两个转动自由度。再考虑移动自由度, $\{M_{A2}^I\}$ 具有如下形式

$$\{M_{A2}^I\} = \{T(i)\} \cdot \{T(k)\} \cdot \{R(O, j)\} \cdot \{R(O, m_2)\} \quad (17)$$

式中 $\{T(i)\} \cdot \{T(k)\} \cdot \{R(O, j)\}$ 为 $\{G(j)\}$ 的等效子群。

上式也可表示为

$$\{M_{A2}^1\} = \{G(j)\} \cdot \{R(O, m_2)\} \quad (18)$$

结合 $\{M_2^{10}\}$, $\{M_{A2}^{0T}\}$ 可表示为

$$\{M_{A2}^{0T}\} = \{T(i)\} \cdot \{T(k)\} \cdot \{R(O, j)\} \cdot \{R(O, m_2)\} \cdot \{R(O, m)\} \quad (19)$$

式中, j 、 m_2 和 m 线性独立。因此, 上式中的后面三项为 $\{S(O)\}$ 的等效子群, 故上式也可表示为

$$\{M_{A2}^{0T}\} = \{T(i)\} \cdot \{T(k)\} \cdot \{S(O)\} \quad (20)$$

对式(15)与式(20)作交运算, 由于 i 与 j 线性独立, 前两项的交集为 $\{T(k)\}$; 式(23)的后两项 $\{R(O, i)\} \cdot \{R(O, m_1)\}$ 为 $\{S(O)\}$ 的二维位移子流形。因此, 交运算的结果如下

$$\{M_{A1}^{0T}\} \cap \{M_{A2}^{0T}\} = \{T(k)\} \cdot \{R(O, i)\} \cdot \{R(O, m_1)\} \quad (21)$$

显然, 上式的结果与式(14)表示的 $\{M_{OMP}\}$ 相同, 因此满足自由度的要求, 输入平台 1 与输入平台 2 的一级支链设定合理。

(2) 确定输入平台 1 与输入平台 2 的二级支链。

由式(16)可知, 平台 1 的两条并联二级支链可以是相同的, 即 $\{M_{A1P1}\} = \{G(i)\} \cdot \{R(O, m_1)\}$ 以及 $\{M_{A1P2}\} = \{G(i)\} \cdot \{R(O, m_1)\}$ 。根据群的运算, 可推出另一种形式, 即 $\{M_{A1P1}\} = \{G(i)\} \cdot \{R(N_1, k)\} \cdot \{R(O, m_1)\}$ 以及 $\{M_{A1P2}\} = \{G(i)\} \cdot \{R(N_2, k)\} \cdot \{R(O, m_1)\}$ 。因为 $\{R(N_1, k)\}$ 与 $\{R(N_2, k)\}$ 轴线位置不同, 其交集为空集, 仍然满足条件。

根据自由度的个数, 平台 2 的二级支链的个数应该只有一条, 且其对应的运动集合为 $\{G(j)\} \cdot \{R(O, m_2)\}$ 。考虑到机构的受力关系以及对称布置所带来的优势, 平台 2 的二级支链设为两条, 且有 $\{M_{A2P1}\} = \{G(j)\} \cdot \{R(O, m_2)\}$ 以及 $\{M_{A2P2}\} = \{G(j)\} \cdot \{R(O, m_2)\}$ 。同理, 另一种形式为 $\{M_{A2P1}\} = \{G(j)\} \cdot \{R(N_3, k)\} \cdot \{R(O, m_2)\}$ 以及 $\{M_{A2P2}\} = \{G(j)\} \cdot \{R(N_4, k)\} \cdot \{R(O, m_2)\}$ 。

(3) 构造各分支运动链, 确定驱动副, 装配并联机构。

以 $\{G(i)\} \cdot \{R(O, m_1)\}$ 为例, $\{G(i)\}$ 的等效运动链有多种, 如 ${}^kP^iR^iR$ 、 ${}^iR^kP^iR$ 、 ${}^iR^iR^iR$ 等; $\{R(O, m_1)\}$ 的等效运动链为轴线过点 O 的转动副; 结合两部分, 等效运动链可以是 ${}^kP^iRU$ 、 ${}^iR^kPU$ 、 ${}^iR^iRU$ 等, 其中 U 副需要包含一个轴线过点 O 的转动副。再分析 $\{G(i)\} \cdot \{R(N_1, k)\} \cdot \{R(O, m_1)\}$, 其在 $\{G(i)\} \cdot \{R(O, m_1)\}$ 的基础上增加了一转动群, 因此, 其等效运动链可以是 ${}^kP^iRS$ 、 ${}^iR^kPS$ 、 ${}^iR^iRS$ 等, 为保证运动关系, 要求同一输入平台的两条二级支链的 S 副的连线过

点 O 。

再根据相应的几何条件装配以上各支链, 并确定相关支链的驱动副, 所综合出的 2R1T 并联机构如表 5 所示。该类并联机构虽然均为一种冗余驱动构型, 但是具有四条对称布置的驱动支链, 可保证具有较好的各向同性。其中的两种构型如图 11 所示。在图中所示的位形时, 与基座相邻的四个 R 副中, 相对的两个 R 副轴线重合, 如图中虚线所示。通过对转动副进行这种轴线重合的布置, 使得图 11 所示的两种构型具有较大的转动角度。

表 5 2R1T 并联机构列举

组成要素	2R1T 并联机构
一级支链	A1: $\{G(i)\} \cdot \{R(O, m_1)\}$; A2: $\{G(j)\} \cdot \{R(O, m_2)\}$
二级支链	A1: $\{G(i)\} \cdot \{R(O, m_1)\}$ 与 $\{G(i)\} \cdot \{R(O, m_1)\}$; 或者 $\{G(i)\} \cdot \{R(N_1, k)\} \cdot \{R(O, m_1)\}$ 与 $\{G(i)\} \cdot \{R(N_2, k)\} \cdot \{R(O, m_1)\}$ A2: $\{G(j)\} \cdot \{R(O, m_2)\}$ 与 $\{G(j)\} \cdot \{R(O, m_2)\}$; 或者 $\{G(j)\} \cdot \{R(N_3, k)\} \cdot \{R(O, m_2)\}$ 与 $\{G(j)\} \cdot \{R(N_4, k)\} \cdot \{R(O, m_2)\}$
等效运动链	${}^kP^iRU$ 、 ${}^iR^kPU$ 、 ${}^iR^iRU$ ${}^kP^iRS$ 、 ${}^iR^kPS$ 、 ${}^iR^iRS$
说明	i 与 j 互不平行: i 与 j 可以垂直(图 12a), 也可以不垂直(图 12b); U 副需要包含一个轴线过点 O 的转动副; 同一输入平台的两条二级支链的 S 副的连线过点 O

图 11 2R1T 并联机构的两种构型

图 12 两种布置方式

在如图 11 所示构型的基础上, 还提出了一种冗余驱动三自由度并联动力头机构。如图 13 所示, 主轴头安装在了输出平台上。为了增加支链的刚度,

在支链中增加了一个三角形闭环结构。该三角形闭环结构包括一个 RPR 被动约束支链。通过运动学分析可知,该新型并联动力头具有固定的转动中心,无伴随运动。以该并联动力头为核心加工单元,再配合 X/Y 长行程导轨,可以搭建一种如图 13d 所示的五轴混联卧式加工中心。

图 13 并联动力头

2.4.2 2R3T 并联机构的综合

仍然选择转动输出类型 R_{22} , 实现 2R3T 并联机构的综合。根据 R_{22} 的输出特性, 转动输出平台 1 具有两个转动自由度, 不妨记两个转动自由度为 $\{R(N_1, i)\}$ 与 $\{R(N_2, m_1)\}$ 。为实现输出平台 1 的 2R3T 运动, 还需要对平台 1 输入三维平移运动 $\{T\}$ 。 $\{M_{A1}^I\}$ 则可表示为

$$\{M_{A1}^I\} = \{T\} \cdot \{R(N_1, i)\} \cdot \{R(N_2, m_1)\} \quad (22)$$

根据证明 1 的相关结论可知, 以及考虑 $\{M_{A1}^{OT}\} = \{M_{A1}^I\}$, 上式还具有如下形式

$$\{M_{A1}^{OT}\} = \{M_{A1}^I\} = \{T\} \cdot \{R(O, i)\} \cdot \{R(O, m_1)\} \quad (23)$$

式中, $\{T\} \cdot \{R(O, i)\}$ 为 $\{X(i)\}$ 的等效子群, 所以 $\{M_{A1}^{OT}\}$ 或 $\{M_{A1}^I\}$ 还可写为 $\{X(i)\} \cdot \{R(O, m_1)\}$ 。由式 (22) 与式 (23) 可知, 在三维移动群 $\{T\}$ 的作用下, 转动副轴线的具体位置与转动中心没有关系。

对于输入平台 2, 已知 $\{M_2^{IO}\} = \{R(O, m)\}$, 其余两个转动自由度不妨记为 $\{R(N_3, j)\}$ 与 $\{R(N_4, m_2)\}$ 。再考虑三维移动 $\{T\}$, $\{M_{A2}^I\}$ 可写为

$$\{M_{A2}^I\} = \{T\} \cdot \{R(N_3, j)\} \cdot \{R(N_4, m_2)\} \quad (24)$$

式中, $\{T\} \cdot \{R(N_3, j)\}$ 为 $\{X(j)\}$ 的等效子群。考虑 $\{T\}$ 的作用, $\{M_{A2}^I\}$ 可进一步表示为

$$\{M_{A2}^I\} = \{X(j)\} \cdot \{R(O, m_2)\} \quad (25)$$

结合 $\{M_2^{IO}\}$ 与 $\{M_{A2}^I\}$, $\{M_{A2}^{OT}\}$ 有如下关系式

$$\{M_{A2}^{OT}\} = \{T\} \cdot \{R(N_3, j)\} \cdot \{R(N_4, m_2)\} \cdot \{R(O, m)\} \quad (26)$$

式中, j 、 m_2 与 m 线性独立。显然, $\{M_{A2}^{OT}\} = \{D\}$, 即空间的一般运动。因此, $\{M_{A1}^{OT}\} \subseteq \{M_{A2}^{OT}\}$, $\{M_{A1}^{OT}\}$ 与 $\{M_{A2}^{OT}\}$ 的交集仍为 $\{M_{A1}^{OT}\}$, 满足自由度的要求。

根据自由度的个数, 该类并联机构的二级支链数目应该是 5 条, 但是为最大程度地减少干涉, 提高转动的输出能力, 平台 1 和平台 2 的二级支链数目仍设为 2。考虑对称性, 平台 1 的两条并联二级支链设为相同, 即 $\{M_{A1P1}\} = \{X(i)\} \cdot \{R(O, m_1)\}$ 以及 $\{M_{A1P2}\} = \{X(i)\} \cdot \{R(O, m_1)\}$ 。同理, 平台 2 也具有两条相同的二级支链, 且有 $\{M_{A2P1}\} = \{X(j)\} \cdot \{R(O, m_2)\}$ 以及 $\{M_{A2P2}\} = \{X(j)\} \cdot \{R(O, m_2)\}$ 。

关于 $\{X(i)\} \cdot \{R(O, m_1)\}$ 或 $\{X(j)\} \cdot \{R(O, m_2)\}$ 的等效运动链在第 2.5 节中已有说明。以 $\{X(i)\} \cdot \{R(O, m_1)\}$ 为例, 其等效运动链可以是 ${}^iR^iR^iP_a^iR^mR$, ${}^iP^iR^iP_a^iR^mR$, ${}^iR^iR^iC^mR$, ${}^iP^iR^iC^mR$ 。为完成五个驱动副的配置, 可使用五杆机构驱动其中一条支链的前两个运动副。根据以上条件, 可得到如表 6 所列出的 2R3T 并联机构。图 14 所示的为两种对称布置的冗余驱动构型, 四条二级支链的前两个驱动副均由五杆机构进行驱动。

表 6 2R3T 并联机构列举

组成要素	2R3T 并联机构
一级支链	$A1: \{X(i)\} \cdot \{R(O, m_1)\}; A2: \{X(j)\} \cdot \{R(O, m_2)\}$
二级支链	$A1: \{X(i)\} \cdot \{R(O, m_1)\}$ 与 $\{X(i)\} \cdot \{R(O, m_1)\}$ $A2: \{X(j)\} \cdot \{R(O, m_2)\}$ 与 $\{X(j)\} \cdot \{R(O, m_2)\}$
等效运动链	${}^iR^iR^iP_a^iR^mR$, ${}^iP^iR^iP_a^iR^mR$, ${}^iR^iR^iC^mR$, ${}^iP^iR^iC^mR$ ${}^jR^jR^jP_a^jR^mR$, ${}^jP^jR^jP_a^jR^mR$, ${}^jR^jR^jC^mR$, ${}^jP^jR^jC^mR$
说明	i 与 j 互不平行; 需用五杆机构驱动某条支链的前两个运动副

图 14 2R3T 并联机构的两种构型

该类并联机构不仅具有较大的移动工作空间,

而且也具有较大的转动工作空间。图 15 所示的即是输出平台在不同位姿时的情况, 由于视角的原因, 图中所示的支链并没有发生干涉。

图 15 不同位姿时的输出平台

2.5 综合具有 3R 自由度的并联机构

考虑移动自由度, 该类并联机构自由度的类型可以分为 3R1T、3R2T 和 3R3T。接下来, 仅探讨 3R2T 并联机构的综合分析。

由表 2 可知, R_{32} 可以实现 3R 转动输出。拓扑布局类型选择第二类拓扑布局。输出平台 1 与 II 类支链(主动无约束支链)连接, 输入平台 2 与 I 类支链(主动约束支链)连接。根据第二类拓扑布局的特性可知, 运动集合 $\{M_{OMP}\}$ 取决于主动约束支链所提供的约束。因此, 需要重点讨论与平台 2 相连的一级和二级支链。

根据 R_{32} 的输入特性可知, 对于输入平台 2, 已知 $\{M_2^{IO}\}=\{R(O, m)\}$, 其余两个转动自由度可以记为 $\{R(O, j)\}$ 与 $\{R(O, m_2)\}$ 。考虑二维移动, $\{M_{A2}^I\}$ 可表示为

$$\{M_{A2}^I\}=\{T(u)\} \cdot \{T(v)\} \cdot \{R(O, j)\} \cdot \{R(O, m_2)\} \quad (27)$$

式中, u, v 均垂直于 j , 则有 $\{T(u)\} \cdot \{T(v)\} \cdot \{R(O, j)\}$ 为 $\{G(j)\}$ 等效子群。上式还可写为

$$\{M_{A2}^I\}=\{G(j)\} \cdot \{R(O, m_2)\} \quad (28)$$

结合 $\{M_2^{IO}\}$ 与 $\{M_{A2}^I\}$, $\{M_{A2}^{OT}\}$ 有如下关系式

$$\{M_{A2}^{OT}\}=\{G(j)\} \cdot \{R(O, m_2)\} \cdot \{R(O, m)\} \quad (29)$$

根据群的运算法则可知, 上式又可表示为

$$\{M_{A2}^{OT}\}=\{T(u)\} \cdot \{T(v)\} \cdot \{S(O)\} \quad (30)$$

由于输出平台 1 与 II 类支链连接, $\{M_{A1}^{OT}\}=\{D\}$ 。

因此, $\{M_{A1}^{OT}\}$ 与 $\{M_{A2}^{OT}\}$ 的交集仍为 $\{M_{A2}^{OT}\}$, 满足自由度的要求。

输入平台 2 的二级支链数目设为 2 条, 根据式

(28) 以及考虑对称性, 令 $\{M_{A2P1}\}=\{G(j)\} \cdot \{R(O, m_2)\}$ 以及 $\{M_{A2P2}\}=\{G(j)\} \cdot \{R(O, m_2)\}$ 。平台 1 的二级支链数目可设为 3 条, 也可以设置更多的支链, 构造冗余驱动。

关于 $\{G(j)\} \cdot \{R(O, m_2)\}$ 的等效运动链在 2.6.1 节中已有说明。平台 1 的二级支链由于是 II 类支链, 任意 6 自由度支链均满足条件。综合以上条件, 可以综合一类 3R2T 并联机构。图 16a、16b 分别表示了非冗余驱动构型与冗余驱动构型的一种布置方式, 其中 II 类支链均采用了 6 自由度 UPS 支链。

图 16 3R2T 并联机构

3 含 III 类广义动平台的并联机构的综合设计

本节将简要介绍含 III 类广义动平台的并联机构的综合设计问题。以经典的 3-RRR、3-RPS 并联机构为基础, 探讨一类 3R3T、2R3T 并联机构的综合问题。

3.1 综合一类 3R3T 并联机构

3-RRR 球面并联机构可以实现 3 自由度的球面转动, 具有三条对称的 RRR 支链, 每条支链的三个转动副的轴线交于一公共点, 不妨记该点为 O , 该公共点 O 即为机构的转动中心。以 3-RRR 球面并联机构为广义动平台, 根据其运动输出特性, 该广义动平台可以简化为一个球面转动副, 其运动可以记为 $\{S(O)\}$ 。若再串联 UP 支链, 即可组合为 UPS 支链。再选取 3-RRR 并联机构的动平台作为广义动平台的输出平台, 将具有 3R3T 的输出自由度。

为综合 3R3T 并联机构, 可以选择第三类拓扑布局。选择 UP 为被动约束支链(III 类支链), 与广义动平台串联, 一端与基座相连, 另一端与 3-RRR 并联机构的定平台相连。根据自由度的要求, 需要 6 条 II 类支链(主动无约束支链)与广义动平台连接。需要解决的问题是选取广义动平台的哪些构件作为这 6 条 II 类支链的输入平台。一种方案是选取

3-RRR 并联机构的动平台作为输入平台; 另一种方案是选取 3-RRR 并联机构中与定平台相连的第一个构件作为输入平台。这里选择第二种方案。为实现输入平台的转动运动, 采用了第 2.4.1 节中 2R1T 并联机构的支链布置方式, 即两条支链一组, 交叉布置, 可有效提高转动角度的输入能力。基于上述条件, 可以综合出一类以 3-RRR 并联机构为广义动平台的 3R3T 并联机构。其中一种构型如图 17 所示。

图 17 3R3T 并联机构

3.2 综合一类 2R3T 并联机构

3-RPS 并联机构可以实现一维平移和两维转动运动, 具有三条对称的 RPS 支链。以 3-RPS 并联机构为基础, 搭建的并联动力头具有良好的动力学性能, 并已在工业中得到应用。但该类机构在运动中没有固定的转动中心, 存在伴随运动。以 3-RPS 并联机构为广义动平台, 并选择 3-RPS 并联机构的动平台作为输出平台。根据 3-RPS 并联机构的输出特性, 输出平台的运动可表示为 $\{T(k)\} \cdot \{R(N_1, i)\} \cdot \{R(N_2, j)\}$ 。若再串联一个 U 副, 记该 U 副的运动为 $\{R(N_3, i)\} \cdot \{R(N_3, j)\}$ 。输出平台的运动集合 $\{M_{OMP}\}$ 则有

$$\{M_{OMP}\} = \{R(N_3, i)\} \cdot \{R(N_3, j)\} \cdot \{T(k)\} \cdot \{R(N_1, i)\} \cdot \{R(N_2, j)\} \quad (31)$$

式中, 前三项 $\{R(N_3, i)\} \cdot \{R(N_3, j)\} \cdot \{T(k)\}$ 可等效为 UP 链, 如果 P 副可以无限移动, UP 链的末端可以到达空间上的任何一点。因此, 在一定的工作空间范围内, $\{R(N_3, i)\} \cdot \{R(N_3, j)\} \cdot \{T(k)\}$ 生成的运动集合与三维移动群 $\{T\}$ 是等效的。所以, 式(39)可进一步表示为

$$\{M_{OMP}\} = \{T\} \cdot \{R(N_1, i)\} \cdot \{R(N_2, j)\} \quad (32)$$

根据证明 1 的结论可知, 在 $\{T\}$ 的作用下, 可以改变转动轴线的位置。所以, $\{M_{OMP}\}$ 还可表示为 $\{T\} \cdot \{R(O, i)\} \cdot \{R(O, j)\}$ 。换言之, 再串联 U 副后, 输出平台具有 2R3T 的输出运动, 且可消除伴随运

动。

可以选择第四类拓扑布局, 进行该类 2R3T 并联机构的综合。选择 U 副为被动约束支链(III 类支链), 与广义动平台串联, 一端与基座相连, 另一端与 3-RPS 并联机构的定平台相连。根据第四拓扑布局的特点, 广义动平台的内部可以存在驱动副, 不妨选择 3-RPS 并联机构中的 P 副为驱动副。根据自由度的要求, 需要至少 2 条 II 类支链(主动无约束支链)与广义动平台的输出平台连接。

根据以上条件, 可以综合出一类以 3-RPS 并联机构为广义动平台的 2R3T 并联机构。其中一种构型如图 18 所示。为获得对称布置, 使用了 3 条 II 类支链。

图 18 2R3T 并联机构

4 结论

(1) 本文提出了广义动平台的概念。通过分析运动平台的本质属性, 从运动关系的层面上定义了输入平台、输出平台两种单元。该定义与具体的结构没有关系, 与物理层面的平台也不是一一对应的。可以得出结论: 输入和输出是运动平台的本质属性, 刚体、铰接、缩放等形式只是运动平台的一种外在表现形式而已。

(2) 提出了一种基于广义动平台和支链两个层级的构型综合方法。该构型综合方法的主要内容包含了如何确定广义动平台的输入和输出关系, 以及一级、二级支链的运动集合等。通过后面的具体实施案例, 即针对 II、III 类广义动平台的综合设计, 验证了广义动平台和支链两个层级划分的有效性和必要性。

(3) 本文所提出的如图 10、图 13、图 14、图 18 等机构具有潜在的应用价值, 有待进一步研究。

另一方面, 广义动平台的结构设计仍有许多工作要做, 本文的工作以及前期的工作仅仅是针对含有一个转动副或螺旋副的广义动平台, 可以期待或研究的是, 如何设计含有移动副或者具有更加复杂结构形式的广义动平台以及与之相关的构型。

参 考 文 献

- [1] HERVÉ J M. The Lie group of rigid body displacements, a fundamental tool for mechanism design[J]. Mechanism and Machine theory, 1999, 34(5): 719-730.
- [2] FANG Y, TSAI L W. Structure synthesis of a class of 4-DoF and 5-DoF parallel manipulators with identical limb structures[J]. International Journal of Robotics Research, 2002, 21(9): 799-810.
- [3] 杨廷力. 机器人机构拓扑结构学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2004.
YANG Tingli. Topology structure design of robot mechanisms[M]. Beijing: China Machine Press, 2004.
- [4] GAO F, YANG J, GE Q J. Type synthesis of parallel mechanisms having the second class GF sets and two dimensional rotations[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2011, 3(1): 011003.
- [5] GOGU G. Structural synthesis of fully-isotropic parallel robots with Schönflies motions via theory of linear transformations and evolutionary morphology[J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2007, 26(2): 242-269.
- [6] GOGU G. Fully-isotropic T1R3-type redundantly-actuated parallel manipulators[M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007.
- [7] SAGLIA J A, TSAGARAKIS N G, DAI J S, et al. Control strategies for patient-assisted training using the ankle rehabilitation robot (ARBOT)[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2013, 18(6): 1799-1808.
- [8] KIM S H, JEON D, SHIN H P, et al. Design and analysis of decoupled parallel mechanism with redundant actuator[J]. International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, 2009, 10(4): 93-99.
- [9] ARATA J, KONDO H, IKEDO N, et al. Haptic device using a newly developed redundant parallel mechanism[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2011, 27(2): 201-214.
- [10] TIAN C, FANG Y, GE Q J. Structural synthesis of parallel manipulators with coupling sub-chains[J]. Mechanism and Machine Theory, 2017, 118: 84-99.
- [11] ZHAO X, ZHAO T, WANG C, et al. Type synthesis and analysis of parallel mechanisms with sub-closed-loops[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 120: 140-165.
- [12] XIE F, LIU X J, WANG J, et al. Kinematic optimization of a five degrees-of-freedom spatial parallel mechanism with large orientational workspace[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2017, 9(5): 051005.
- [13] YE W, FANG Y, ZHANG K, et al. Mobility variation of a family of metamorphic parallel mechanisms with reconfigurable hybrid limbs[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2016, 41: 145-162.
- [14] COMPANY O, MARQUET F, PIERROT F. A new high-speed 4-DOF parallel robot synthesis and modeling issues[J]. IEEE Transactions on Robotics & Automation, 2003, 19(3): 411 - 420.
- [15] KRUT S, BENOIT M, OTA H, et al. I4: A new parallel mechanism for Scara motions[C]// Proc. of the Int. Conf. on Robotics & Automation, 2003: 1875-1880.
- [16] PIERROT F, NABAT V, COMPANY O, et al. Optimal design of a 4-DOF parallel manipulator: From academia to industry[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2009, 25(2): 213-224.
- [17] KRUT S, COMPANY O, NABAT V, et al. Heli4: A parallel robot for scara motions with a very compact traveling plate and a symmetrical design[C]// Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2006: 1656-1661.
- [18] 黄田, 宋轶民, 赵学满, 等. 一种具有三维平动一维转动的并联机构: 中国, ZL200910228105.1[P]. 2010.
HUANG T, SONG Y, ZHAO X, et al. A parallel mechanism with three translations and one rotation: China, ZL200910228105.1[P]. 2010.
- [19] LIU S, HUANG T, MEI J, et al. Optimal design of a 4-DOF SCARA type parallel robot using dynamic performance indices and angular constraints[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2012, 4(3): 031005.
- [20] 李玉航, 梅江平, 刘松涛, 等. 一种新型 4 自由度高速并联机械手动力尺度综合[J]. 机械工程学报, 2014, 50(19): 32-40.
LI Yuhang, MEI Jiangping, LIU Songtao, et al. Dynamic dimensional synthesis of a 4-DOF high-speed parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(19): 32-40.
- [21] KRUT S, COMPANY O, RANGSRI S, et al. Eureka: A new 5-degree-of-freedom redundant parallel mechanism with high tilting capabilities[C]// IEEE/RSJ

- International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2003: 3575-3580.
- [22] SUN T, SONG Y, GAO H, et al. Topology synthesis of a 1-translational and 3-rotational parallel manipulator with an articulated traveling plate[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2015, 7(3): 031015.
- [23] WANG C, FANG Y, GUO S. Design and analysis of 3R2T and 3R3T parallel mechanisms with high rotational capability[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2016, 8(1): 011004.
- [24] WANG C, FANG Y, FANG H. Novel 2R3T and 2R2T parallel mechanisms with high rotational capability[J]. Robotica, 2015, 1-18.
- [25] JIN X, FANG Y, QU H, et al. A class of novel 2T2R and 3T2R parallel mechanisms with large decoupled output rotational angles[J]. Mechanism and Machine Theory, 2017, 114: 156-169.
- [26] JIN X, FANG Y, ZHANG D. Design of a class of generalized parallel mechanisms with large rotational angles and integrated end-effectors[J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 134, 117-134.
- [27] L YI B J, NA H Y, LEE J H, et al. Design of a parallel-type gripper mechanism[J]. The International Journal of Robotics Research, 2002, 21(7): 661-676.
- [28] LAMBERT P, LANGEN H, SCHMIDT R M. A novel 5 DOF fully parallel robot combining 3T1R motion and grasping[C]// ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. American Society of Mechanical Engineers, 2010: 1123-1130.
- [29] LAMBERT P, HERDER J. A novel parallel haptic device with 7 degrees of freedom[C]// IEEE World Haptics Conference (WHC), 2015: 183-188.
- [30] 汪从哲, 张毅. 基于动平台铰接的概念设计一类含有螺旋副的并联机构[J]. 机械工程学报, 2018, 54(5): 84-93.
- WANG Congzhe, ZHANG Yi. Design a series of parallel mechanisms with a helical joint based on the concept of articulated moving platform[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(5): 84-93.

作者简介: 汪从哲, 男, 1985 年出生, 博士, 讲师。主要研究方向为并联机构和康复机器人。

E-mail: wangcz@cqupt.edu.cn

杨德伟(通信作者), 男, 1984 年出生, 博士, 讲师。主要研究方向为机器人与智能控制算法。

E-mail: dwyanghi@163.com

张毅, 男, 1966 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为智能系统及机器人。

E-mail: zhangyi@cqupt.edu.cn

张亚南, 男, 1995 年出生, 硕士研究生。主要研究方向为智能系统及机器人。

E-mail: 453611734@qq.com