DOI: 10.3901/JME.2021.01.077

基于空间几何的无伴随运动并联机构分析与综合^{*}

陈 淼 张 氢 陈文韬 秦仙蓉 孙远韬
(同济大学机械与能源工程学院 上海 201804)

摘要: 一移动两转动(1T2R)三自由度并联机构普遍存在的伴随运动对机构的运动精度及性能有不利影响,为得到一系列 1T2R 无伴随运动的并联机构,利用空间几何理论及螺旋理论对无伴随运动并联机构进行分析与综合。基于空间几何理论分析了无伴随运动并联机构的转轴条件,结合螺旋理论分析了该类机构动平台平面与约束螺旋的空间位置关系,将至少拥有 1T2R 自由度的支链分成 4 类,分析[R]-型支链在不同支链布局下的约束螺旋位置及转轴位置对伴随运动的影响,从而给出了 1T2R 无伴随运动并联机构的构型准则及结构条件,并通过构型综合得到了 105 种无伴随运动并联机构。对一种新型 2RPU-RPRU 无伴随运动并联机构进行了运动学分析,验证了该方法的正确性。

关键词: 伴随运动; 1T2R 并联机构; 螺旋理论; 结构条件

中图分类号: TH112

Analysis and Type Synthesis of Parallel Mechanisms without Parasitic Motion based on Spatial Geometry

CHEN Miao ZHANG Qing CHEN Wentao QIN Xianrong SUN Yuantao
(School of Mechanical and Energy Engineering, Tongji University, Shanghai 201804)

Abstract: Parasitic motion widely exists in general 1T2R (one translation and two rotations) parallel mechanism, which has a negative influence on motion accuracy and performances of mechanism. To obtain a series of 1T2R parallel mechanisms without parasitic motion, the analysis and type synthesis of parallel mechanisms are conducted based on spatial geometry and screw theory. The condition of rotational axes of parallel mechanism without parasitic motion is analyzed based on spatial geometry theory, then the spatial position relationship between the plane of moving platform and constraint wrenches is explored with screw theory. Branch chains with at least 1T2R degrees of freedom are divided into four types, and positions of constraint wrenches and rotational axes which cause parasitic motions directly are discussed with different [R]- branch chain layouts. The synthesis criteria and geometrical conditions of 1T2R parallel mechanism without parasitic motion are deduced, and 105 kinds of mechanism without parasitic motion are obtained through type synthesis. The kinematics of a new 2RPU-RPRU parallel mechanism without parasitic motion is analyzed to verify the correctness of the method.

Key words: parasitic motion; 1T2R parallel mechanism; screw theory; geometrical conditions

0 前言

具有结构紧凑、高承载自重比和低成本等优点的少自由度并联机构近年来成为了机器人和机械领域的研究热点,以少自由度并联机构为骨架的高端装备在智能制造^[1]、航天装配^[2]、康复医疗^[3-4]等行业中获得了广泛应用。

然而对于一般 1T2R 少自由度并联机构,除了

所允许自由度方向上的运动外,往往还存在其他自由度方向上不完全被约束的运动,该类运动被称为伴随运动^[5];也有学者指出伴随运动的实质是当动平台发生转动时,动平台平面上的所有点总会发生某个方向的移动^[6]。如图 1 所示,XU 等^[7]指出 2RPU-SPR(S 为球铰副,U 为万向节副,R 为转动副,P 为移动副)并联机构存在 1T2R 三个自由度,其转轴分别动平台坐标系的 y 轴及静平台坐标系的 X 轴,两转轴没有交点即动平台不存在转动中心,当动平台绕 X 轴旋转时,动平台上的所有点将会发生沿 Y 轴方向的移动,而该自由度方向上的平移运动并非

^{*} 上海市科委科技创新行动计划资助项目(19DZ1100202)。20191216 收到初稿,20200416 收到修改稿

所期望的运动,因此该机构存在伴随运动;另外, CARRETERO 等^[8]指出当机构发生旋转时, 3PRS 并联机构的动平台也会在 X 轴和 Y 轴方向上发生移动,即发生了伴随运动,这也是伴随运动概念的首次提出。伴随运动会给装备带来不利影响,譬如将 2RPU-SPR 并联机构应用于机床中,工件滑台需要实时补偿在 Y 轴方向上的伴随位移,这显然增加了运动控制的复杂度,此外伴随运动的发生还会给机构的运动精度及标定等方面带来不利影响^[9]。

图 1 2RPU-SPR 并联机构及其转轴

为减小或消除伴随运动对机构运动的影响,学者们进行了广泛的研究,目前的研究方法主要分为两种。第一种是通过优化并联机构的结构参数,将伴随运动控制在适宜范围内, RANJAN 等^[10]通过优化动静平台的尺寸参数比来最小化 3-RPS 并联机构的伴随运动空间; FANG 等^[11]采用微分进化算法来优化 3-PRS 并联机构的设计参数,从而使伴随运动最小化;李秦川等^[12]通过建立 3-PRS 并联机构伴随运动的运动学模型,揭示了机构几何参数与伴随运动的内在联系,指出[PP]S 类并联机构在满足一定结构条件下可以消除伴随运动。第二种是利用机构综合的方法得到无伴随运动并联机构构型, LI 等^[13]运用位移群/流行综合方法得到了一系列无伴随运动的 1T2R 并联机构及几何构成条件;陈子明等^[14]提出了一种新型 3-UPU 对称并联机构,基于螺旋理论证明了该机构动平台可以始终绕对称平面内的任意轴线或任意点发生连续转动,进而指出在只考虑机构发生转动的情况下不存在伴随运动; LONG 等^[15]提出了 2PSP-RRRU 与 2PSP-PRPU 两种可折叠的无伴随运动并联机构,指出这两种并联机构具有正运动学简单且无奇异性的良好特性。

目前大部分研究成果都是针对特定并联机构的伴随运动优化及消除,本文在 LI 等^[13]学者研究的启发下,试图基于空间几何理论和螺旋理论,以一种较为直观的方法对 1T2R 无伴随运动并联机构的转

轴及结构特征进行分析,并通过构型综合得到一类 1T2R 无伴随运动并联机构,为无伴随运动并联机构的应用奠定理论基础。

1 无伴随运动并联机构转轴位置分析

根据平面的基本性质,转轴与动平台平面存在三种空间位置关系,即转轴与平面平行,转轴与平面相交,转轴位于平面上。转轴与动平台的相对位置对机构的伴随运动特性有直接的影响,下面分三种情况分析。

1.1 转轴平行于动平台平面

如图 2 所示,在并联机构动静平台上分别建立动静直角坐标系 $Pxyz$ 与 $OXYZ$,动坐标系原点 P 在静坐标系下的 X 与 Y 坐标均为 0。现假定转轴 R_1 与动平台平面平行,且平行于 Y 轴,可以看到动平台绕转轴 R_1 旋转后,其平面上的点均相对静坐标系 $OXYZ$ 在沿 X 轴方向上产生了伴随运动;对于任意平行于动平台平面的转轴,甚至会发生沿 X 轴和 Y 轴两个方向的伴随运动。因此,当转轴平行于动平台平面时,并联机构必然存在伴随运动。

图 2 转轴与动平台平面平行

1.2 转轴与动平台平面相交

如图 3 所示,假设转轴 R_1 位于 $x=0$ 平面,与动平台相交于坐标原点 P ,且与 y 轴夹角为 φ ,动平台绕转轴 R_1 旋转 δ 。

图 3 转轴与动平台平面相交

动平台在空间中的运动过程可以利用欧拉角来

描述,即先绕 x 轴旋转 φ ,使旋转后新坐标系 $Px_1y_1z_1$ 的 y_1 轴与旋转轴 R_1 重合,随后再做绕 R_1 轴旋转 δ 的旋转变换得到 $Px_2y_2z_2$,最后再做第一步的逆变换,即绕 x_2 轴旋转 $-\varphi$,于是新坐标系 $Px_3y_3z_3$ 相对初始坐标系 $Pxyz$ 的旋转矩阵可以写成

$$T_E = R_x(\varphi)R_{y_1}(\delta)R_{x_2}(-\varphi) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= c_\delta & A_{12} &= -s_\delta s_\varphi & A_{13} &= -c_\varphi s_\delta & A_{21} &= s_\delta s_\varphi \\ A_{22} &= c_\varphi^2 + c_\delta s_\varphi^2 & A_{23} &= c_\varphi s_\varphi (c_\delta - 1) & A_{31} &= s_\delta c_\varphi \\ A_{32} &= c_\varphi s_\varphi (c_\delta - 1) & A_{33} &= c_\delta c_\varphi^2 + s_\varphi^2 \end{aligned}$$

式中, c 表示余弦函数; s 表示正弦函数。如图 4 所示,动平台旋转后的姿态与初始姿态会存在一条位于 $z=0$ 平面上且过原点 P 的交线,即脊线 k ,该线是表征方位的重要特征线^[16],动平台的最终姿态也可借助它来描述,其运动过程即为先绕脊线 k 旋转 ψ 得到新坐标系 $Px_1y_1z_1$,再绕 z_1 轴旋转 ζ 达到目标位置,如图 4 所示。

图 4 脊线与动平台姿态变换过程

假设脊线与 x 轴夹角为 ξ ,动平台新坐标系 $Px_2y_2z_2$ 相对初始坐标系 $Pxyz$ 的旋转矩阵可以写成

$$R_K = R_k(\psi)R_{z_1}(\zeta) = R_z(\xi)R_y(\psi)R_z(-\xi)R_{z_1}(\zeta) = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} B_{11} &= c_\xi (c_\psi^2 + c_\psi s_\psi^2) + s_\xi c_\xi s_\psi (1 - c_\psi) \\ B_{12} &= s_\xi (c_\psi^2 + c_\psi s_\psi^2) - c_\xi c_\xi s_\psi (1 - c_\psi) \\ B_{13} &= s_\xi s_\psi \\ B_{21} &= -s_\xi (c_\psi c_\psi^2 + s_\psi^2) - c_\xi c_\xi s_\psi (1 + c_\psi) \\ B_{22} &= c_\xi (c_\psi c_\psi^2 + s_\psi^2) - s_\xi c_\xi s_\psi (1 + c_\psi) \\ B_{23} &= c_\xi s_\psi \\ B_{31} &= c_\xi s_\psi s_\xi - s_\xi s_\psi c_\xi \\ B_{32} &= -c_\xi s_\psi c_\xi - s_\xi s_\psi s_\xi \\ B_{33} &= c_\psi \end{aligned}$$

显然两种描述方法对动平台最终姿态的描述是等效的,即矩阵 T_E 与 R_K 中各项相等,于是

$$A_{12} - A_{21} = B_{12} - B_{21} \quad (3)$$

$$A_{33} = B_{33} \quad (4)$$

联立式(3)与式(4)可以求得动平台沿平面法线方向的转角 ζ 为

$$\zeta = \arcsin \left(\frac{-2 \sin \delta \sin \varphi}{1 + \sin^2 \varphi + \cos \delta \cos^2 \varphi} \right) \quad (5)$$

可以看到,当转轴 R_1 与动平台夹角 φ 不为 0 或 π 时, $\zeta \neq 0$,即动平台绕转轴 R_1 的旋转运动总可以分解为先绕脊线 k 转动,再绕动平台法线方向的转动,即动平台存在着沿 z 轴转动自由度的伴随运动,伴随运动角度即为 ζ ;而当 $\varphi=0, \pi$ 时,即旋转轴线位于动平台上时,伴随运动角度 $\zeta=0$,动平台不存在伴随运动。

1.3 转轴位于动平台平面

根据上述分析,当 1T2R 并联机构的两条转轴均位于动平台平面上时,动平台不会发生绕 z 轴旋转和沿 X 轴、 Y 轴平动的伴随运动;绕 x 轴与绕 y 轴旋转的自由度为机构的两个独立自由度,分别让两转轴与 x, y 轴重合即可解耦,从而大大简化机构的运动学计算;倘若动平台绕着位于动平台平面且与 x 轴有一定夹角的转轴旋转,动平台会产生绕 y 轴旋转的“伴随运动”,从而导致动平台姿态描述及机构运动学更为复杂,显然这样的转轴设置在构型综合过程中是没有必要的。

上述分析证明了 1T2R 并联机构不存在伴随运动的转轴条件是两条转轴应始终位于动平台平面上;当转轴平行于动平台时,必然存在平动伴随运动,当转轴与动平台存在夹角时,必然会发生转动伴随运动。

2 约束螺旋与动平台平面位置关系分析

在螺旋理论中,单位螺旋^[17]定义如下

$$\mathcal{S} = (\mathbf{S}; \mathbf{S}_o) = (L, M, N; P, Q, R) \quad (6)$$

式中, $\mathbf{S}$ 为直线在空间中的单位方向, $\mathbf{S}_o$ 表示直线在空间中的位置, $(L, M, N; P, Q, R)$ 为直线的 Plücker 坐标。进一步地,假设 ω 为刚体旋转角速度, f 为作用力的大小,那么刚体瞬时转动的 Plücker 坐标为 $\omega(L_i, M_i, N_i; P_i, Q_i, R_i)$,刚体瞬时移动的 Plücker 坐标为 $\omega(0, 0, 0; P_i, Q_i, R_i)$,作用在刚体上的力螺旋表示为 $f(L_r, M_r, N_r; P_r, Q_r, R_r)$,力偶螺旋为 $f(0, 0, 0; P_r, Q_r, R_r)$ 。

根据螺旋理论, 力螺旋与运动螺旋的互易积即为两螺旋产生的瞬时功率, 瞬时功率为零意味着该力螺旋对运动螺旋不做功, 即刚体运动状态不改变。现假设刚体绕着螺旋 $\$i$ 做瞬时转动, 作用于其上的约束力螺旋为 $f\$j$, 则该约束力对运动螺旋的瞬时功率为^[17]

$$W = \omega \$i \circ f \$j = \omega f (L_i P_r + M_i Q_r + N_i R_r + L_r P_i + M_r Q_i + N_r R_i) = \omega f a \sin \theta \quad (7)$$

式中, a 为两线矢量的公垂线长度, θ 为两线矢量的扭角。可以看到当 $a=0$ 或 $\theta=0, \pi$ 时, 约束力对运动不做功, 此时约束力与旋转轴线是共面的。若作用于刚体上的为约束力偶, 则

$$W = \omega f (L_i P_r + M_i Q_r + N_i R_r + 0P_i + 0Q_i + 0R_i) = \omega f (L_i P_r + M_i Q_r + N_i R_r) \quad (8)$$

可以看到, 当约束力偶垂直于转动副时, 约束力偶对运动不做功。

再来考虑刚体平动的情况, 当刚体沿着螺旋 $\$i$ 做瞬时移动时, 同样作用于其上的约束力螺旋为 $f\$j$, 那么

$$W = \omega f (L_r P_i + M_r Q_i + N_r R_i) \quad (9)$$

可以看到, 当约束力垂直于该移动副时, 约束力是对运动不做功的。若作用于刚体上的为约束力偶, 则 $W=0$, 即力偶螺旋永远不会对平动运动做功。

将上述分析结果应用于并联机构可知, 在并联机构分支中, 分支的约束力与分支中所有的旋转轴线共面(相交或平行), 且与分支中所有的移动副轴线垂直; 另外, 分支的约束力偶与所有旋转轴垂直。因此, 对于 1T2R 无伴随运动并联机构, 分支的约束力与两条转轴始终共面是构型分析中必须满足的条件, 在上一节指出无伴随运动 1T2R 并联机构的两条转轴应始终位于动平台平面上, 且相互垂直, 这样一来, 分支的约束力也必须位于动平台平面, 原因如下。

(1) 若约束力平行于动平台平面, 且与其中某一转轴平行共面, 则必定与另一转轴异面。

(2) 若约束力与动平台存在夹角, 则在 z 轴方向上必有分量, 从而会限制动平台沿 z 轴方向的移动自由度。

综上, 对于 1T2R 无伴随运动并联机构, 约束力必须始终位于动平台平面内。

3 支链分析与构型综合

3.1 支链类型

对于 1T2R 三自由度并联机构, 机构约束螺旋系应含一个约束力偶和两个约束力, 而分支约束螺旋可以有三种情况: ① 2T3R 型支链, 即只含一个约束力; ② 2T2R 型支链, 即含有一个约束力及一个约束力偶; ③ 1T2R 型支链, 即含有两个约束力及一个约束力偶^[17]。这里根据支链连接静平台的运动副类型, 将以上几种支链分成 4 类, 分别为[S]-型, [U]-型, [R]-型及[P]-型。

可以看到, 对于 1T2R 并联机构, 每条支链至少有 1T2R 的三个自由度, 很显然[S]-型及[U]-型支链是可以构成所需自由度的, 但由于约束力和分支中的所有转动副共面, 含有球铰副或万向节副的支链约束力必过球铰副或万向节副, 因此[S]-型及[U]-型支链的约束力必然不存在于动平台上。简言之, 只有当球铰或万向节作为支链与动平台连接的运动副时, 支链的约束力才可能存在于动平台上, 才可能避免伴随运动。下面以[R]-型及[P]-型支链进行 1T2R 无伴随运动并联机构构型准则及结构条件分析。

3.2 [R]-型支链

根据前述结论, 该类支链约束力的方向始终平行于连接静平台的[R]副, 并不会随着动平台的转动而发生方向上的改变, 因此会出现当动平台发生运动后约束力与动平台平面不再共面的情况, 因此需要对[R]副在静平台上的位置关系进行研究。现对 3 条支链中[R]副的所有布置形式进行列举, 对可能存在的无伴随运动并联机构转轴进行分析。

(1) [R]副轴线两两交错(包括[R]副轴线汇交于一点)。

如图 5 所示, 在静平台 $B_1 B_2 B_3$ 上, [R]副支链的轴线方向 f_1 , f_2 与 f_3 在静平台中两两交错, 根据上述结论, 支链位于动平台 $A_1 A_2 A_3$ 上的约束力方向 e_1 , e_2 与 e_3 也分别与之平行。当动平台运动到空间一般位置时, 三条约束力处于 3 个不同高度的平面上, 即空间中 3 条互相交错的直线。根据转轴应与约束力共面的条件, 在空间中只可能存在相交共面的转轴, 即当 A_1 , A_2 及 A_3 三点共线时, $A_1 A_3$ 即为转轴, 然而仅存在一条转轴是不符合自由度需求的, 因此这种布置方式不成立。

图 5 [R]副轴线两两交错

(2) [R]副轴线一组平行, 两组相交。

如图 6a 所示, 假设支链 1 与支链 2 的[R]副轴线 f_1, f_2 平行布置, 支链 3 的[R]副轴线 f_3 与 f_1 及 f_2 垂直相交。当动平台处于一般位置时, 三条约束力处于 3 个不同高度的平面上, 但可以找到一条转轴 R_1 与约束力方向 e_1, e_2 平行共面且与支链 3 约束力方向 e_3 相交共面, 如图 6b 所示; 另一条转轴为与三条约束力相交共面的转轴 R_2 , 即当 A_1, A_2 及 A_3 三点共线时, A_1A_3 即为转轴 R_2 , 此时机构满足转轴条件, 即无伴随运动。需要说明的是当 f_3 与 f_1 及 f_2 仅相交但不垂直时, 同样可以满足转轴条件, 但此时转轴 R_1 与转轴 R_2 不垂直, 动平台姿态描述会相对复杂, 在构型过程中应尽量避免。

图 6 [R]副轴线一组平行, 两组垂直相交

综合以上两种情况可知, 保证连接动平台的铰

链中心共线是 1T2R 无伴随运动并联机构的必要条件, 下面以 2RPS-PRS 并联机构进行举例说明。如图 7a 所示, 两条 RPS 支链的[R]副平行布置, PRS 支链中的[R]幅轴线与之垂直, 动平台 A_1, A_2 及 A_3 三点不共线。如图 7b 所示, 当支链 3 移动副伸长, 而支链 1 与支链 2 的移动副不动时, 过 A_1 与 A_2 点的约束力存在于 Π_1 平面, 过 A_3 点的约束力存在于 Π_2 平面, 根据转轴必须与约束力共面的原则, 动平台的转轴为过 A_3 点且平行于 e_1, e_2 的直线 R_1 以及与 A_1A_2 共线的转轴 R_2 。可以看到转轴 R_1 并没有位于由 A_1, A_2 及 A_3 形成的动平台平面 Π_M 上, 而是与动平台平面 Π_M 存在夹角, 且该夹角大小会随着运动不断变化, 因此必然会有沿 z 轴转动的伴随运动。

图 7 2RPS-PRS 并联机构及伴随运动分析

(3) [R]副轴线互相平行。

此时三个约束力方向 e_1, e_2 与 e_3 在空间中平行, 这样会导致在动平台平面上垂直于该方向上的约束力消失, 机构将多出一个平动自由度, 显然不符合要求。

上述分析仅考虑了支链约束力对伴随运动的影响, 需要指出的是 1T2R 并联机构的支链约束螺旋中是可以存在一个约束力偶的, 根据前面的分析, 支链的约束力偶应与支链中所有的旋转轴垂直。如图 8 所示, 动平台 A_1 点处可以存在一条约束力偶同时与支链[R]副轴线方向 $R_{[R]}$ 与转轴 R_2 垂直, 同理 A_2 点处也可以存在, 图中空心箭头代表可能存在的约束力偶; 然而在动平台的 A_3 点处, 很显然找不到

一条直线同时与支链转轴 R_1 , R_2 及支链[R]副轴线方向 $R_{[R]}$ 垂直, 也就是说第三条支链不能存在约束力偶, 即必须为 2T3R 型支链。另外, 当支链 1 或支链 2 存在两个约束力(1T2R 型支链)时, 例如 PU 支链, 其两条约束力相互垂直, 根据几何空间关系, 不存在一条过 A_3 点且与两条约束力同时共面的转轴, 即转轴 R_1 是不存在的, 因此在 1T2R 无伴随运动并联机构的综合中不必考虑 1T2R 型支链。

图 8 支链约束力偶分析

3.3 [P]-型支链

由于支链至少拥有 1T2R 自由度, 因此[P]-型支链中需存在转动副, 这就意味着支链约束力必然平行于转动副, 所以[P]-型支链分析结果与[R]-型支链结论一致, 即构型准则为: 支链为[R]-型及[P]-型中 2T2R 型支链和 2T3R 型支链, 且第三条支链必须为 2T3R 自由度支链; 结构条件为: 三条约束力在动平台上存在一组平行且两组垂直的同时, 还必须保证三条支链连接动平台的铰链中心共线。

3.4 构型综合

根据螺旋理论, 满足构型准则条件的[R]-型及[P]-型支链类型如表 1 所示。

表 1 1T2R 无伴随运动并联机构支链类型

支链类型	支链
2T3R	RPPU, RPRU, RRRU, RRP, RPS, RRS, PRPU, PPRU, PRRU, PPS, PRS
2T2R	RPU, RRU, PRU, PPU

可以看到, 属于 2T3R 类型的支链有 11 种, 即 RPPU, RPRU, RRRU, RRP, RPS, RRS, PRPU, PPRU, PRRU, PPS, PRS, 它们对动平台的约束为过支链末端运动副, 且平行于支链中所有转动副的约束力, 因此可以当作机构中三条支链的选择。

属于 2T2R 类型的支链有 4 种, 即 RPU, RRU, PRU, PPU。它们对动平台的约束为: ① 过支链末端运动副, 且平行于支链中所有转动副的约束力; ② 垂直于万向节副的两转动轴方向的约束力偶。由于第三条支链不允许存在约束力偶, 因此该类支链只能作为第一条及第二条支链的选择。

综上所述, 对于第一条支链及第二条支链, 可

选类型有 15 种。然而对于第三条支链, 在综合过程中发现并不是所有的 11 种 2T3R 类型支链都可选, 这是因为部分构型存在局部自由度的现象。

注意到, 由于第一条支链与第二条支链均以万向节副或球铰副连接动平台, 若第三支链以球铰副连接动平台, 则必然会产生绕 y 轴旋转的局部自由度, 在构型综合时应避免。例如 2RPU-RPS 并联机构, 其三条支链连接动平台的末端关节副(U 副、U 副及 S 副)均含有绕 y 轴(直线 A_1A_2)旋转的自由度, 如图 9 所示, 此时即使驱动关节不施加驱动力, 动平台也可在外力作用下绕着 y 轴旋转, 即机构存在局部自由度, 因此 RPS 支链不能作为第三条支链。同理其他由球铰副连接动平台的支链也不可选, 而第三支链以万向节连接动平台时, 万向节只有沿 x 轴及 z 轴的旋转自由度, 因此不会产生局部自由度。于是, 在 2T3R 类型的支链中第三条支链可选的支链有 7 种, 即 RPPU, RPRU, RRRU, RRP, PRPU, PPRU, PRRU。

图 9 2RPU-RPS 并联机构的局部自由度

当上述支链满足结构条件时即可组成无伴随并联机构, 假设第一条支链与第二条支链类型相同, 第三条支链为 2T3R 型且以万向节副连接动平台的支链, 那么 1T2R 无伴随运动并联机构一共有 $105(15 \times 7 = 105)$ 种。

4 伴随运动及运动学分析

根据构型综合结果, 对一种新型 2RPU-RPRU 并联机构进行运动学分析, 证明其具有无伴随运动的特性。如图 10 所示, 机构由动静平台及三条支链组成, 动静平台满足上述结构条件, 即静平台 B_1 及 B_2 处转动副轴线平行, B_3 处转动副轴线与之垂直, 动平台上 A_1 , A_2 及 A_3 三点共线; 分支 B_1A_1 及分支 B_2A_2 为 RPU 支链, 分支 B_3A_3 为 RPRU 支链。以静平台 B_1B_2 中点为坐标原点 O 建立如图所示 $OXYZ$ 坐

标系, X 轴沿 OB_3 方向, Y 轴沿 B_1B_2 , Z 轴垂直于静平台向上, 同理以动平台 A_3 为坐标原点 P 建立 $Pxyz$ 坐标系, z 轴垂直于动平台, y 轴沿 A_1A_2 , x 轴根据右手定则确定。

图 10 2RPU-RPU 并联机构示意图

2RPU-RPU 并联机构各支链约束力及约束力偶如图 10 所示, 第一条支链对动平台施加的约束螺旋为过支链末端点 A_1 , 且平行于 B_1 处转动副的约束力以及垂直于万向节副两转动轴方向的约束力偶, 第二条支链与之类似, 第三条支链施加的约束螺旋为过 A_3 点 (P 点), 且平行于 B_3 处转动副的约束力。其两条转轴分别为: 过动坐标系原点 P 且平行于 X 轴方向的转轴 R_1 以及与动坐标系 y 轴重合的转轴 R_2 , 另外该机构还含有沿 Z 轴方向的移动自由度。因此, 动平台的运动过程可以描述为先绕 R_1 轴(此时 R_1 轴与 X 轴重合)旋转 α , 再绕旋转后坐标系的 y 轴旋转 β , 最后沿静坐标系 $-Z$ 方向移动 ρ 个单位, 于是动坐标系 $Pxyz$ 相对静坐标系 $OXYZ$ 的转换矩阵可以写成

$$T_A^B = T_Z(-\rho)R_x(\alpha)R_y(\beta) = \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta & 0 \\ s_\alpha s_\beta & c_\alpha & -s_\alpha c_\beta & 0 \\ -c_\alpha s_\beta & s_\alpha & c_\beta c_\alpha & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

可以看到, 动坐标系原点 P 在 $OXYZ$ 中的坐标为 $[0 \ 0 \ P_{Oz}]^T$, 其中 $P_{Oz} = -\rho$ 。此时, 无论另外两个旋转自由度如何变化, 其 X 与 Y 坐标均为 0, 所以该机构不存在伴随运动。假定 $OB_1 = OB_2 = OB_3 = d$, $PA_1 = PA_2 = PC_3 = a$, 对于支链 RPU, 根据闭环矢量关系可以求得支链长度与动平台位姿关系, 即

$$|l_i| = |T_a^b a_i + P - b_i| \quad (11)$$

$$T_a^b = R_x(\alpha)R_y(\beta) \quad P = OP = [0 \ 0 \ P_{Oz}]^T$$

$$a_1 = PA_1 = [0 \ -a \ 0]^T \quad a_2 = PA_2 = [0 \ a \ 0]^T$$

$$b_1 = OB_1 = [0 \ -d \ 0]^T \quad b_2 = OB_2 = [0 \ d \ 0]^T$$

如图 11 所示, 对于 RPU 支链, 其支链长度为

$$l_3 = \sqrt{(|OB_3| - |PC_3| \cos \theta)^2 + (|OP| - |PC_3| \sin \theta)^2} \quad (12)$$

式中, θ 为连杆 PC_3 与平面的夹角, 可以通过坐标变换求得。

图 11 RPU 支链示意图

以 C_3 为原点建立直角坐标系 C_3uvw , 其中 u 轴、 v 轴与 w 轴分别与静坐标系中的 X 轴、 Y 轴及 Z 轴平行。由于支链中万向节有两个旋转自由度, C_3uvw 与动平台坐标系间的转换关系可以这样描述: C_3uvw 先绕 v 轴旋转 θ , 再绕万向节中的 u 轴旋转 θ_1 , 最后绕万向节中的 w 轴旋转 θ_2 , 即

$$R_A^C = R_v(\theta)R_u(\theta_1)R_w(\theta_2) \quad (13)$$

显然, R_A^C 与此前动平台绕转轴 x 轴与 y 轴的旋转矩阵 T_a^b 应一致, 即

$$R_A^C = T_a^b \quad (14)$$

联立式(13)与式(14)可以求得

$$\theta = \arctan \frac{\tan \beta}{\cos \alpha} \quad (15)$$

联立式(11)、(12)与式(15)可得 2RPU-RPU 并联机构各驱动支链与动平台位姿的运动学关系为

$$l_1 = \sqrt{P_{Oz}^2 + a^2 + d^2 - 2a(dc_\alpha + P_{Oz}s_\alpha)}$$

$$l_2 = \sqrt{P_{Oz}^2 + a^2 + d^2 - 2a(dc_\alpha - P_{Oz}s_\alpha)}$$

$$l_3 = \sqrt{P_{Oz}^2 + a^2 + d^2 - \frac{2a(dc_\alpha c_\beta + P_{Oz}s_\beta)}{\sqrt{1 - s_\alpha^2 c_\beta^2}}} \quad (16)$$

可以看到支链长度 l_1 和 l_2 完全与 β 解耦, 这大大简化了该机构位置正反解的计算, 对后续的控制应用有重要的意义。

而对于存在伴随运动并联机构, 其运动学一般较为复杂。例如 2UPR-RPU 三自由度并联机构, 各支链约束力及约束力偶如图 12 所示, 根据约束力与转轴共面的性质, 动平台的转轴分别为沿 x 轴(R_1 轴)

和沿 Y 轴(R_2 轴)的直线, 另外该机构还有一个沿 z 轴方向的移动自由度^[18]。

图 12 2UPR-RPU 并联机构示意图

根据自由度性质, 动平台的运动过程可以描述为先绕静坐标系 $OXYZ$ 中的 Y 轴旋转 β , 再绕旋转坐标系的 x 轴旋转 α , 最后沿两次旋转后坐标系的 $-z$ 方向移动 ρ 个单位, 于是动坐标系 $Pxyz$ 相对静坐标系 $OXYZ$ 的转换矩阵可以写成

$$T_A^B = R_Y(\beta)R_X(\alpha)T_z(-\rho) = \begin{bmatrix} c_\beta & s_\alpha s_\beta & s_\beta c_\alpha & -\rho s_\beta c_\alpha \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ -s_\beta & c_\beta s_\alpha & c_\beta c_\alpha & -\rho c_\beta c_\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

此时, 动坐标系原点 P 在 $OXYZ$ 中的坐标为 $[P_{Ox} \tan \beta \quad 0 \quad P_{Oz}]$, 其中 $P_{Oz} = -\rho c_\beta c_\alpha$ 。可以看到其 X 坐标值与动平台的位姿参数 P_{Ox} 及 β 相关, 当机构绕着 Y 轴旋转时, 机构存在着沿 X 轴方向的伴随运动, 且每条驱动支链的长度均与三个位姿参数相关, 机构正运动学求解较为复杂^[18]。

分析上述两种构型可知, 支链产生的约束力位置不同将会形成不同的转轴位置, 而转轴位置对动静坐标系间的转换矩阵及并联机构伴随运动性质有直接影响, 这与前述结论相一致。

此外, 由于无伴随运动并联机构结构条件较为严苛, 安装误差等不确定因素会对机构无伴随运动的特性产生不利影响, 今后研究中需进一步探讨。

5 结论

(1) 基于空间几何理论和螺旋理论, 提出了无伴随运动并联机构的构型准则和结构条件, 构型准则为: 各支链应属于 $[R]$ -型及 $[P]$ -型中的 $2T2R$ 型支链或 $2T3R$ 型支链, 且第三条支链必须为以万向节连接动平台的 $2T3R$ 自由度支链; 结构条件为: 三

条约束力在动平台上有一组平行两组垂直相交的同时, 还必须保证三条支链连接动平台的铰链中心共线。

(2) 通过构型综合得到了 105 种 $1T2R$ 无伴随运动并联机构, 并对两类机构进行运动学分析, 验证了转轴位置会密切影响并联机构伴随运动性质的结论, 表明了该方法的正确性。

参 考 文 献

- [1] CHAI X X, ZHANG N B, HE L Y, et al. Kinematic sensitivity analysis and dimensional synthesis of a redundantly actuated parallel robot for friction stir welding[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2020, 33: 1. <https://doi.org/10.1186/s10033-019-0427-6>.
- [2] RAMIREZ J, WOLLNACK J. Flexible automated assembly systems for large CFRP-structures[J]. Procedia Technology, 2014, 15: 447-455.
- [3] WANG C, FANG Y, GUO S. Multi-objective optimization of a parallel ankle rehabilitation robot using modified differential evolution algorithm[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2015, 28(4): 702-715.
- [4] 李剑锋, 张凯, 张雷雨, 等. 并联踝康复机器人的设计与运动性能评价[J]. 机械工程学报, 2019, 55(9): 29-39. LI Jianfeng, ZHANG Kai, ZHANG Leiyu, et al. Design and kinematic performance evaluation of parallel ankle rehabilitation robot[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(9): 29-39.
- [5] MATS I, ANDERS E, SAEID N. Analysis of the inverse kinematics problem for 3-DOF axis-symmetric parallel manipulators with parasitic motion[C]// 2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Piscataway, NJ: IEEE, 2014: 5736-5743.
- [6] 张杨. 无伴随运动对称两转一移并联机构的研究[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2016. ZHANG Yang. Study on symmetrical 2R1T parallel mechanism without parasitic motion[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2016.
- [7] XU Y D, ZHOU S S, YAO J T, et al. Rotational axes analysis of the 2-RPU/SPR 2R1T parallel mechanism[J]. Mechanisms & Machine Science, 2014, 22: 113-121.
- [8] CARRETERO J A, PODHORODESKI R P, NAHON M A, et al. Kinematic analysis and optimization of a new three degree-of-freedom spatial parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Design, 2000, 122(1): 17-24.
- [9] ZHAO H, BI S, YU J. A novel compliant linear-motion

- mechanism based on parasitic motion compensation[J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 50: 15-28.
- [10] JHA R, CHABLAT D, BARON L. Influence of design parameters on the singularities and workspace of a 3-RPS parallel robot[J]. Transactions-Canadian Society for Mechanical Engineering, 2018, 42(1): 30-37.
- [11] FANG H, XIN B, ZHANG X. Workspace-constrained optimal design of three-degrees-of-freedom parallel manipulators with minimum parasitic motions by integrating interval analysis, region mapping and differential evolution[J]. Engineering Optimization, 2015, 47(3): 407-428.
- [12] LI Q, CHEN Z, CHEN Q, et al. Parasitic motion comparison of 3-PRS parallel mechanism with different limb arrangements[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2011, 27(2): 389-396.
- [13] LI Q, JACQUES M H. 1T2R parallel mechanisms without parasitic motion[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2010, 26(3): 401-410.
- [14] 陈子明, 张扬, 黄坤, 等. 一种无伴随运动的对称两转一移并联机构[J]. 机械工程学报, 2016, 52(3): 9-17.
CHEN Ziming, ZHANG Yang, HUANG Kun, et al. Symmetrical 2R1T parallel mechanism without parasitic motion[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(3): 9-17.
- [15] KANG L, YI B J. Design of two foldable mechanisms without parasitic motion[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2016, 1(2): 930-937.
- [16] 张东胜, 姚建涛, 许允斗, 等. 刚体两次转动姿态描述方法的内在联系[J]. 机械工程学报, 2015, 51(13): 86-94.
ZHANG Dongsheng, YAO Jiantao, XU Yundou, et al. The internal relations of the pose description methods of the rigid body after two successive rotations[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(13): 86-94.
- [17] 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.
HUANG Zheng, ZHAO Yongsheng, ZHAO Tieshi. Advanced spatial mechanism[M]. Beijing: Higher Education Press, 2014.
- [18] 柴馨雪, 项济南, 李秦川. 2-UPR-RPU 并联机构奇异分析[J]. 机械工程学报, 2015, 51(13): 150-157.
CHAI Xinxue, XIANG Jinan, LI Qinchuan. Singularity analysis of a 2-UPR-RPU parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(13): 150-157.

作者简介: 陈淼, 男, 1993 年出生, 博士研究生。主要研究方向为并联机器人及动力学。

E-mail: chenmiao2015@tongji.edu.cn

张氢(通信作者), 男, 1967 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为重载机械装备、机械动态设计与智能优化设计、大型工程结构与设备研究开发与监控技术。

E-mail: zhqing_tj@126.com