DOI: 10.3901/JME.2020.23.150

非线性耦合同向回转的双偏心转子振动系统 同步行为研究*

杜明俊¹ 侯勇俊¹ 吴毅² 余成³ 侯度宇¹

- (1. 西南石油大学机电工程学院 成都 610500;
2. 攀枝花学院智能制造学院 攀枝花 610700;
3. 成都工业学院智能制造学院 成都 611730)

摘要: 随着振动系统逐渐朝着大型化、重型化的方向发展,大激振力振动系统是未来发展一个较热的趋势。基于这一特殊背景,提出了非线性(拉簧)耦合同向回转的双偏心转子振动系统及其同步问题。首先基于拉格朗日方程建立了系统动力学方程;随后采用运动分离法建立系统慢变参数的积分方程,推导出了系统实现同步的同步条件和稳定性准则;其次,通过数值分析研究了系统结构参数对系统同步能力及同步特性的影响;继而,采用龙格库塔法建立了非线性耦合同向回转的双偏心转子振动系统的机电耦合仿真模型,开展了系统的同步状态与系统机电耦合的动力特性的仿真分析;最后设计了相关试验装置,开展了同步试验测试。研究表明,系统的同步行为主要受拉簧和支撑弹簧的刚度系数、激振电机的位置参数等的影响;激振电机的相位差随着拉簧刚度系数的增加逐渐稳定在零度附近,相应地系统同步状态从反相同步逐渐变成同相同步,理论研究和试验结果能较好地吻合。所有研究为研发高效节能的大型振动机械提供指导作用,同时研究成果也对振动同步领域共性问题的解决具有促进作用。

关键词: 双偏心转子;非线性耦合;同步特性;稳定性;试验

中图分类号: TH113

Synchronization Behavior of Two Co-rotating Rotors in a Nonlinear Coupled System

DU Mingjun¹ HOU Yongjun¹ WU Yi² YU Cheng³ HOU Duyu¹

- (1. School of Mechanical Engineering, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500;
2. School of intelligent manufacturing, Panzhihua University, Panzhihua 610700;
3. School of Intelligent Manufacturing, Chengdu Technological University, Chengdu 611730)

Abstract: With the vibrating system are evolving towards designing large-sized and heavy-duty, a large exciting force of the system is one big developmental tendency. Based on the special background, a synchronization issue of a new mechanism driven by two co-rotating motors coupled with a tensile-spring is proposed. Firstly, the differential equations of the dynamic system are derived by using Lagrange's equations; Then, the integral equations of the slow-changing parameters are obtained by adopting the method of direct separation of motions, and the synchronization condition and the stability criterion of the system are acquired; Next, analyzing influence of the parameters on the synchronous capacity and the synchronous characteristics of the system by the numerical analysis; Additionally, an electromechanical coupling model of the vibrating system is established by applying the Runge-Kutaa routine with adaptive stepsize control, some simulation analysis with the relationship between the synchronous state of the system and the dynamical characteristics of the electromechanical coupling system are carried out; Finally, an experimental model is designed, and some synchronous tests are carried out. It is found that the synchronous behavior of the vibrating system is mainly influenced by the stiffness of the tensile-spring and the supporting springs, the mounting position of two motors, etc. The stable phase difference

* 四川省科技创新苗子工程重点项目(2018RZ0101)和四川省科技计划项目(2019YFG0317)资助项目。20191119收到初稿,20200731收到修改稿

between the two rotors gradually tends to zero with the increase of the stiffness of coupling spring, and the antiphase synchronization is converted into the in-phase synchronization, the theoretical results quite coincide with experiment results. All these researches will provide guidance for developing design the energy-efficient large-sized vibrating screens, and which can improve the solution to common problems in the field of vibrating synchronization.

Key words: two co-rotating rotors; nonlinear coupled system; the synchronous characteristics; stability; experiment

0 前言

自同步现象是非线性现象中一种特殊现象, 它广泛地存在于网络、生物^[1]、化学^[2]、生活^[3]等各个领域。在工程应用中, 利用同步现象的振动特性可以完成许多工艺工程, 提高振动机器的工作效率, 如振动筛分、振动输送、振动打桩等。同步现象最早是由荷兰学者 HUYGENS 于 1665 年通过钟摆同步发现的, 当两个钟摆悬挂在同一横梁上, 它们能实现反相同步, 即便给其中一钟摆施加任意扰动, 经过一段时间后, 它们仍能恢复初始的反相同步状态^[4]。1960 年, BLEKHMAN 提出了两(或多)个激励器振动机械的同步理论^[5-6], 采用运动分离法将系统的动力学方程转变成“快运动”和“慢运动”两部分, 而在自同步振动系统中, 快运动的振荡随着时间的推移逐渐消失, 但慢运动部分至始至终影响着振动系统。因而振动系统的动力学方程最终转化为慢变参数的二阶或高阶的积分方程, 通过渐进稳态解的方法研究了振动机械同步特性, 解决了许多工程问题^[7-9]。方潘等提出了转子耦合摆模型, 并对该结构处于超共振状态的同步行为做了理论研究^[10-11]。张学良等应用修正的小参数法研究了两(或三)个转子系统的同步特性^[12-13], 发现由于振动系统自同步特性的影响, 同向回转的偏心转子的相位差在稳态时趋于反相同步, 难以实现同相同步, 导致在工程应用上振动系统的振幅等运动参数难以得到保证。为了提高振动系统的激振力, 期望同向回转两激振电机的相位差在零度附近同步。基于此背景, 侯勇俊等人提出了在同向旋转的两激振电机同侧偏心块相同的径向位置安装耦合单元, 实现同向旋转的两激振电机近似零相位同步^[14-15]。研究发现耦合单元具有一定的质量, 且在结构安装时要求具有较高的对称性, 导致同向旋转的两激振电机在系统启动阶段负载加重, 出现卡顿现象, 启动困难; 同时同步过程中, 由于耦合单元受到离心惯性力, 影响着系统的同步行为^[16]。基于以上的问题我们提出了非线性(拉簧)耦合同向回转的双偏心转子振动系统, 能有效减轻耦合单元的

质量。在同步过程中由于拉簧固有的非线性特性, 当其长度超过自由长度时, 拉簧才受到轴向负载的作用, 否则拉簧始终处于自由状态。导致了系统同步状态的多样性。拉簧对系统的同步特性和稳定性影响是怎样的? 为了探明振动系统中非线性拉簧与系统的同步状态的关系、系统的同步状态与系统机电耦合的动力特性的关系。本文从理论分析、数值讨论、计算机仿真、试验研究上开展了一系列研究。

1 理论及模型

1.1 基本理论

对于转子同步问题, 假设旋转系统的动力学方程为^[5-6]

$$J_s \ddot{\phi}_s = L_s(\dot{\phi}_s) - R_s(\dot{\phi}_s) + Z_s(\phi_s, \dot{\phi}_s, \ddot{\phi}_s, x, \dot{x}, \ddot{x}, t) \quad (1)$$

$$\ddot{x} + 2\zeta_x \omega_{nx} \dot{x} + \omega_{nx}^2 x = \sum_{s=1}^k F_s(\omega_m t, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k) \quad (2)$$

式中, J_s , L_s 和 R_s 表示第 s 个转子的转动惯量、电磁转矩和机械阻尼矩; ϕ_s , $\dot{\phi}_s$ 和 $\ddot{\phi}_s$ 分别是第 s 个转子的角位移, 机械转速及角加速度; x , $\dot{x}$ 和 $\ddot{x}$ 分别表示振动系统在 x 方向的位移、速度及加速度; ζ_x 为振动系统在 x 方向的阻尼系数; ω_{nx} 为系统在 x 方向自然频率。

当所有转子在恒定转速 ω_m 附近运转时, 其第 s 个转子的输出扭矩在转速 ω_m 附近(即 $\dot{\phi}_s = \sigma_s \omega_m$) 线性化为

$$L_s(\dot{\phi}_s) - R_s(\dot{\phi}_s) = L_s(\sigma_s \omega_m) - \sigma_s R_s(\omega_m) - k_{es}(\dot{\phi}_s - \sigma_s \omega_m) \quad (3)$$

式中, k_{es} 是第 s 个转子的机械阻尼系数; σ_s 表示第 s 个转子的旋转方向(值为 1 或 -1, 分别表示转子顺时针方向旋转和逆时针方向旋转)。

由于振动系统是弱的非线性系统, 系统的阻尼是非常小的, 根据式(3)与式(1), 并引入小参数 μ ($\mu > 0$), 则转子关于小参数形式的动力学方程为

$$J_s \ddot{\phi}_s + k_s (\dot{\phi}_s - \sigma_s \omega_m) = \mu \Phi(\phi_s, x)$$

$$\ddot{x} + 2\zeta_x \omega_{nx} \dot{x} + \omega_{nx}^2 x = \sum_{s=1}^k F_s(\omega_m t, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k) \quad (4)$$

式中

$$\mu \Phi(\phi_s, x) = L_s(\sigma_s \omega_m) - \sigma_s R_s(\omega_m) + Z_s(\phi_s, \dot{\phi}_s, \ddot{\phi}_s, x, \dot{x}, \ddot{x}, t)$$

当所有转子以相同的速度同频同步时, 振动系统动力学方程式(4)的稳态响应为

$$x = x(\omega_m t), \phi_s = \sigma_s [\omega_m t + \alpha_s + \phi_s(\omega_m t)] \quad (5)$$

式中, ω_m 与 α_s 分别表示所有转子的平均转速与第 s 个转子的初相位, 并且 ω_m 与 α_s 是关于时间变化的慢变参数, 因此被定义为慢变参量。而 ϕ_s 为第 s 个转子的振荡位移, 并且 ϕ_s 和 x 是关于时间 t 的周期函数($T=2\pi/\omega$), 因此 x_s , ϕ_s 被视为快变参量。快变参量在单个周期 T 内对时间积分的平均值为零, 即

$$\langle x(t, \tau) \rangle = 0, \langle \phi_s(t, \tau) \rangle = 0 \quad (6)$$

式中, 尖括号 $\langle f(t) \rangle$ 表示在一个周期内对函数 $f(t)$ 的积分取平均值, 即 $\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (f(t)) dt$ 。根据

Blekhman 提出的直接运动分离法, 将转子的运动学微分方程转变成“快速运动”(快变参量 ϕ_s 的运动学微分方程)和“慢运动”(慢变参量 α_s 的运动学微分方程)两部分, 即

$$J_s \ddot{\alpha}_s + k_s \dot{\alpha}_s = \mu \langle [\Phi_s] \rangle \quad (7)$$

$$J_s \ddot{\phi}_s + k_s \dot{\phi}_s = \mu (\Phi_s - \langle [\Phi_s] \rangle) \quad (8)$$

式(7)和式(8)是积分形式的运动学微分方程, 由于“快速运动”部分运动学微分方程(8)存在渐近周期的稳态解 ϕ_s , 并且满足式(6), 因此 $\dot{\phi}_s = 0$ 。随着时间的推移, 慢变参量的变化是很小的, 相应慢变参量对应的“慢运动”的运动形式是明确的, 所以 α_s 近似为一常数, 即: $\dot{\alpha}_s \approx 0$ 。定义同步判定指数 P_s , 满足

$$P_s = \mu \langle [\Phi_s] \rangle \approx 0 \quad (9)$$

根据式(9), P_s 是关于转子初相位 α_k 的积分方程, 因此振动系统的稳定性主要是由参数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 决定的。如果某组参数 $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_k^0$ 满足 $(k-1)$ 阶代数方程

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial(P_1 - P_k)}{\partial \alpha_1} - \lambda & \frac{\partial(P_1 - P_k)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial(P_1 - P_k)}{\partial \alpha_{k-1}} \\ \frac{\partial(P_2 - P_k)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial(P_2 - P_k)}{\partial \alpha_2} - \lambda & \dots & \frac{\partial(P_2 - P_k)}{\partial \alpha_{k-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial(P_{k-1} - P_k)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial(P_{k-1} - P_k)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial(P_{k-1} - P_k)}{\partial \alpha_{k-1}} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

的所有根 λ 的实部都是负的, 那么在 μ 足够小的情况下, $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_k^0$ 这组值是唯一的, 此时方程式(1)存在渐近稳定的周期解; 如果所有根 λ 中至少有一个实部为正, 那么式(1)相应的解是不稳定的; 如果所有根 λ 中, 某一些根的实部为负, 其他根的实部为零, 则式(1)的解可能是稳定的, 也可能是不稳定的, 周期解的稳定性可以利用中心流形定理判定。

1.2 力学模型及动力学方程

图1所示为非线性(拉簧)耦合同向回转的双偏心转子振动系统的力学模型, 该系统主要是由两个激振电机, 振动质体 m_0 , 支撑弹簧, 拉簧, 电机座等组成。振动质体通过四个支撑弹簧与地基连接, 并且弹簧的刚度系数和阻尼系数在 j -($j=x, y, \psi$) 方向分别为 k_j 和 f_j 。激振电机的偏心转子考虑为一质量为 m_i ($i=1, 2$), 旋转半径为 r_i 的质点。两个激振电机轴线平行对称地安装在振动质体上, 并且它们同侧偏心块的相同径向位置安装拉簧, 拉簧的刚度系数为 k , 拉簧与偏心块的连接点到激振电机旋转中心轴的距离为 a 。激振电机到振动系统质心的距离为 l_i , 激振电机的安装角为 β_i 。设第 i 转子转角为 ϕ_i 。振动系统的三个参考坐标系设置如下, 坐标系 oxy 是固定坐标系, 坐标系 $o'x'y'$ 是绕着点 o' 做旋转运动的旋转坐标系, 坐标系 $o''x''y''$ 始终与固定坐标系在 j -($j=x, y, \psi$) 方向保持平行的移动坐标系。振动系统质心的运动是平面运动, x 、 y 、 ψ 分别为振动质体在水平方向、垂直方向和摆动方向的位移。

图1 振动系统动力学模型

非线性耦合同向回转的双偏心转子振动系统是一个完整系统, 选取广义坐标矩阵 $\mathbf{q} = [x \ y \ \psi \ \phi_1 \ \phi_2]$, 振动系统在 j -($j=x, y, \psi, \phi_1, \phi_2$) 方向上的广义力为 $\mathbf{Q} = [0 \ 0 \ 0 \ L_{e1} - R_{e1} \ L_{e2} - R_{e2}]$ 。 L_{ei} 和 R_{ei} 分别为激振电机的驱动力矩和电机轴系摩擦产生的阻力矩。

由于系统参数满足 $m_i \ll m_0, \psi \ll 1$, 所以转子的不对称和摆动造成惯性耦合矩可以忽略不计, 同时考虑

$$M = m_0 + \sum_{i=1}^2 m_i, \quad J = J_0 + \sum_{i=1}^2 m_i l_i^2 + \sum_{i=1}^2 m_i r_i^2$$

$$J_{o1} \approx m_1 r_1^2, \quad J_{o2} \approx m_2 r_2^2$$

根据一般系统的拉格朗日方程建立系统的运动学微分方程为

$$M\ddot{x} + f_x \dot{x} + k_x x = \sum_{i=1}^2 m_i r_i (\ddot{\phi}_i \cos \phi_i - \dot{\phi}_i^2 \sin \phi_i)$$

$$M\ddot{y} + f_y \dot{y} + k_y y = -\sum_{i=1}^2 m_i r_i (\ddot{\phi}_i \sin \phi_i + \dot{\phi}_i^2 \cos \phi_i)$$

$$J\ddot{\psi} + f_\psi \dot{\psi} + k_\psi \psi = \sum_{i=1}^2 \left(m_i l_i r_i [\ddot{\phi}_i \sin(\phi_i + \beta_i) + \dot{\phi}_i^2 \cos(\phi_i + \beta_i)] \right)$$

$$J_{o1} \ddot{\phi}_1 + f_1 \dot{\phi}_1 = L_{e1} - R_{e1} + m_1 r_1 \ddot{x} \cos \phi_1 - m_1 r_1 \ddot{y} \sin \phi_1 + m_1 l_1 r_1 \ddot{\psi} \sin(\phi_1 + \beta_1) - m_1 l_1 r_1 \dot{\psi}^2 \cos(\phi_1 + \beta_1) - f_1(k, \phi_1, \beta_1, l_1, a)$$

$$J_{o2} \ddot{\phi}_2 + f_2 \dot{\phi}_2 = L_{e2} - R_{e2} + m_2 r_2 \ddot{x} \cos \phi_2 - m_2 r_2 \ddot{y} \sin \phi_2 + m_2 l_2 r_2 \ddot{\psi} \sin(\phi_2 + \beta_2) - m_2 l_2 r_2 \dot{\psi}^2 \cos(\phi_2 + \beta_2) - f_2(k, \phi_2, \beta_2, l_2, a) \quad (11)$$

其中

$$k = \begin{cases} c & l - \ell \geq 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\ell = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos(\beta_2 - \beta_1)}$$

$$l = (\ell^2 + 2a^2 - 2a^2 \cos(\phi_2 - \phi_1) - 2l_1 a \sin(\phi_1 + \beta_1) + 2al_2 \sin(\phi_1 + \beta_2) + 2l_1 a \sin(\phi_2 + \beta_1) - 2al_2 \sin(\phi_2 + \beta_2))^{0.5}$$

$$f_1(k, \phi_1, \beta_1, l_1, a) = ka \left(\frac{\ell}{l} - 1 \right) \times [l_1 \cos(\phi_1 + \beta_1) - l_2 \cos(\phi_1 + \beta_2) + a \sin(\phi_2 - \phi_1)]$$

$$f_2(k, \phi_2, \beta_2, l_2, a) = ka \left(1 - \frac{2\ell}{l} \right) \times [l_1 \cos(\phi_2 + \beta_1) - l_2 \cos(\phi_2 + \beta_2) + a \sin(\phi_2 - \phi_1)]$$

式中, l 为拉簧与两激振电机偏心块的连接点在任意时刻的距离; ℓ 为弹簧的自由长度; $f_i(k, \phi_i, \beta_i, l_i, a)$ 为系统拉簧耦合项。

2 同步理论研究

2.1 系统稳态近似解

由系统动力学方程式(11)可以看出振动系统是关于转子的转角 ϕ_i 与自由度 x, y, ψ 的非线性方程。由于异步电机的工作频率低于同步转速, 系统

在稳态时激振电机转子的转速波动非常小, 所以动力学方程中的 $\dot{\phi}_i$ 可以忽略不计, 并引入以下的无量纲参数

$$\omega_{nx} = \sqrt{k_x/M}, \omega_{ny} = \sqrt{k_y/M}, \omega_{n\psi} = \sqrt{k_\psi/J},$$

$$\zeta_x = \frac{f_x}{2\omega_{nx}M}, \zeta_y = \frac{f_y}{2\omega_{ny}M}, \zeta_\psi = \frac{f_\psi}{2\omega_{n\psi}J} \quad (12)$$

$$n_x = \frac{\omega_m}{\omega_{nx}}, n_y = \frac{\omega_m}{\omega_{ny}}, n_\psi = \frac{\omega_m}{\omega_{n\psi}},$$

$$\eta_{12} = \frac{m_1}{m_2}, r_m = \frac{m_2}{M}, l_e = \sqrt{\frac{J}{M}}, r_{li} = \frac{l_i}{l_e}, r_0 = \frac{r}{l_e}$$

式中, $\omega_{nj}, \zeta_j, n_j (j=x, y, \psi)$ 分别为系统在 j 方向的固有频率, 相对阻尼系数和频率比。其中 $\zeta_j > 1$ 为过阻尼系统; $\zeta_j = 1$ 为临界阻尼系统; $0 < \zeta_j < 1$ 为欠阻尼系统。

将式(12)代入式(11)得到振动系统无量纲形式的动力学方程

$$\ddot{x} + 2\zeta_x \omega_{nx} \dot{x} + \omega_{nx}^2 x = -\omega_m^2 r_m r [\eta_{12} \sin \phi_1 + \sin \phi_2]$$

$$\ddot{y} + 2\zeta_y \omega_{ny} \dot{y} + \omega_{ny}^2 y = -\omega_m^2 r_m r [\eta_{12} \cos \phi_1 + \cos \phi_2] \quad (13)$$

$$\ddot{\psi} + 2\zeta_\psi \omega_{n\psi} \dot{\psi} + \omega_{n\psi}^2 \psi = \omega_m^2 r_0 r_m [\eta_{12} r_{l1} \cos(\phi_1 + \beta_1) + r_{l2} \cos(\phi_2 + \beta_2)]$$

采用复数的方法^[17], 式(13)的近似稳态响应为

$$x = -\mu_x r_m r [\eta_{12} \sin(\phi_1 - \gamma_x) + \sin(\phi_2 - \gamma_x)]$$

$$y = -\mu_y r_m r [\eta_{12} \cos(\phi_1 - \gamma_y) + \cos(\phi_2 - \gamma_y)] \quad (14)$$

$$\psi = \mu_\psi r_m r [\eta_{12} r_{l1} \cos(\phi_1 + \beta_1 - \gamma_\psi) + r_{l2} \cos(\phi_2 + \beta_2 - \gamma_\psi)]$$

其中

$$\mu_j = \frac{n_j^2}{\sqrt{(1-n_j^2)^2 + (2\zeta_j n_j)^2}}$$

$$\gamma_j = \begin{cases} \arctan\left(\frac{2\zeta_j n_j}{1-n_j^2}\right) & 1-n_j^2 \geq 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{2\zeta_j n_j}{1-n_j^2}\right) & 1-n_j^2 < 0 \end{cases} \quad (j=x, y, \psi) \quad (15)$$

式中, γ_j 为系统在 j 方向的滞后相位角。

2.2 系统同步条件

根据文献[18], 当两个激振电机同向回转时, 在转速 $\dot{\phi}_i = \omega_m$ 附近, 激振电机的输出扭矩 T_{ei} 线性化为

$$T_{ei} = L_i(\dot{\phi}_i) - R(\dot{\phi}_i) = \frac{n_p L_{mi}^2 U_{so}^2}{\omega_m L_i^2 R_{ri}} (\omega_s - \omega_m) \quad (16)$$

式中, n_p 是激振电机极对数, ω_s 是电网供电频率, L_{mi} 是第 i 个激振电机定子与转子之间的互感系数, L_i 是第 i 个激振电机定子电感系数, R_{ri} 是转子的等效电阻, U_{so} 是定子电压幅值。

考虑拉簧在整个同步过程中均受到拉力的作用, 若 $2a/l_0 \ll 1$, 弹簧的形变量简化为 $\Delta = |a(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2)|$ 。在转子的动力学方程式(11)中引入小参数 $\mu (\mu > 0)$, 形如式(4)的转子运动学微分方程为

$$\begin{aligned} m_1 r_1^2 \ddot{\varphi}_1 + f_1 \dot{\varphi}_1 &= \mu \phi \\ m_2 r_2^2 \ddot{\varphi}_2 + f_2 \dot{\varphi}_2 &= \mu \phi_2 \end{aligned} \quad (17)$$

式中

$$\begin{aligned} \mu \phi_1 &= T_{e1} + m_1 r_1 \ddot{x} \cos \varphi_1 - m_1 r_1 \ddot{y} \sin \varphi_1 + \\ & m_1 l_1 r_1 \ddot{\psi} \sin(\varphi_1 + \beta_1) - m_1 l_1 r_1 \ddot{\psi}^2 \cos(\varphi_1 + \beta_1) - \\ & ka^2 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) \cos \varphi_1 \\ \mu \phi_2 &= T_{e2} + m_2 r_2 \ddot{x} \cos \varphi_2 - m_2 r_2 \ddot{y} \sin \varphi_2 + \\ & m_2 l_2 r_2 \ddot{\psi} \sin(\varphi_2 + \beta_2) - m_2 l_2 r_2 \ddot{\psi}^2 \cos(\varphi_2 + \beta_2) + \\ & ka^2 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) \cos \varphi_2 \end{aligned} \quad (18)$$

根据式(7), 采用运动分离法, 转子的“慢运动”部分的动力学方程为

$$m_i r_i^2 \ddot{\alpha}_i + f_i \dot{\alpha}_i = \mu [\Phi_i] (i=1, 2) \quad (19)$$

当振动系统处于稳态时, 两转子以相同的速度同步运转, 设 α 为两转子的相位差, 即满足

$$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \quad (20)$$

若两偏心转子的旋转半径 $r_1 = r_2 = r$ 。由式(14)得到 $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ 和 $\ddot{\psi}$, 将之代入式(18), 并考虑式(9), 因此振动系统同步判定指数 P_i 为

$$\begin{aligned} P_1 &= \langle \mu \Phi_1 \rangle = T_{e1}(\omega_m) + \frac{1}{2} m_2 r^2 \omega_m^2 [-\eta_{12}^2 W_{s1} + \\ & \eta_{12} W_{a1} \sin \alpha - \eta_{12} W_{b1} \cos \alpha + \frac{ka^2}{m_2 r^2 \omega^2} \sin \alpha] = 0 \\ P_2 &= \langle \mu \Phi_2 \rangle = T_{e2}(\omega_m) + \frac{1}{2} m_2 r^2 \omega_m^2 [-W_{s2} - \\ & \eta_{12} W_{a2} \sin \alpha - \eta_{12} W_{b2} \cos \alpha - \frac{ka^2}{m_2 r^2 \omega^2} \sin \alpha] = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} W_{b1} &= r_m [\mu_x \sin \gamma_x + \mu_y \sin \gamma_y - \mu_\psi r_{l1} r_{l2} \sin(\beta_2 - \beta_1 - \gamma_\psi)] \\ W_{a2} &= r_m [\mu_x \cos \gamma_x + \mu_y \cos \gamma_y + \mu_\psi r_{l1} r_{l2} \cos(\beta_2 - \beta_1 + \gamma_\psi)] \\ W_{b2} &= r_m [\mu_x \sin \gamma_x + \mu_y \sin \gamma_y + \mu_\psi r_{l1} r_{l2} \sin(\beta_2 - \beta_1 + \gamma_\psi)] \\ W_{s1} &= r_m [\mu_x \sin \gamma_x + \mu_y \sin \gamma_y + \mu_\psi r_{l1}^2 \sin \gamma_\psi] \\ W_{s2} &= r_m [\mu_x \sin \gamma_x + \mu_y \sin \gamma_y + \mu_\psi r_{l2}^2 \sin \gamma_\psi] \end{aligned}$$

$$W_{a1} = r_m [\mu_x \cos \gamma_x + \mu_y \cos \gamma_y + \mu_\psi r_{l1} r_{l2} \cos(\beta_2 - \beta_1 - \gamma_\psi)]$$

式中, W_{si} 和 W_{bi} 为滞后相位 $\gamma_j (j=x, y, \psi)$ 的正弦系数, W_{ai} 为滞后相位 γ_j 的余弦系数。在工程应用上, 一般振动系统的相对阻尼系数满足 $\zeta_j \ll 0.07$ [19-20], 因此 W_{si} 和 W_{bi} 的值很小。将式(21)中的同步指数 P_1 和 P_2 分别相加与相减得

$$\begin{aligned} [T_{e1}(\omega_m) + T_{e2}(\omega_m)] + \frac{1}{2} m_2 r^2 \omega_m^2 [-\eta_{12}^2 W_{s1} + W_{s2} + \\ \eta_{12} (W_{a1} - W_{a2}) \sin \alpha - \eta_{12} (W_{b1} + W_{b2}) \cos \alpha] = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} [T_{e1}(\omega_m) - T_{e2}(\omega_m)] + \frac{1}{2} m_2 r^2 \omega_m^2 [-\eta_{12}^2 W_{s1} + W_{s2} + \\ \eta_{12} (W_{a1} + W_{a2}) \sin \alpha + \eta_{12} (W_{b2} - W_{b1}) \cos \alpha + \\ \frac{2ka^2}{m_2 r^2 \omega_m^2} \sin \alpha] = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

式(22)是振动系统的力矩平衡表达式, $T_{e1}(\omega_m) + T_{e2}(\omega_m)$ 表示的是两激振电机的输出电磁转矩之和, 第二项是振动系统作用在两激振电机上的负载转矩之和。式(23)是同步转矩的差分方程, 当振动系统处于同步状态, 由于两激振电机的性能参数是完全一样的, 他们输出扭矩在稳态时几乎维持在平衡状态, 即 $T_{e1}(\omega_m) - T_{e2}(\omega_m) \approx 0$, 因此通过式(23)可以数值地求解出两激振电机的相位差。另外根据式(22)与式(23), 可以看出拉簧的存在不会造成系统能量的增加, 但是它的刚度值及安装位置会直接影响两激振电机稳态相位差值。同步扭矩 T_{SYS} 和两激振电机的残余扭矩 T_{Dif} 定义为

$$T_{Dif} = T_{Res2} - T_{Res1} \quad (24)$$

$$T_{SYS} = |W_s| \quad (25)$$

$$\text{式中 } T_{Res1} = T_{e1}(\omega_m) - \frac{1}{2} m_2 r^2 \omega_m^2 \eta_{12}^2 W_{s1};$$

$$T_{Res2} = T_{e2}(\omega_m) - \frac{1}{2} m_2 r^2 \omega_m^2 W_{s2};$$

$$W_s = \sqrt{a_s^2 + b_s^2};$$

$$a_s = \frac{1}{2} m_2 r^2 \omega_m^2 \eta_{12} (W_{a1} + W_{a2}) + ka^2;$$

$$b_s = \frac{1}{2} m_2 r^2 \omega_m^2 \eta_{12} (W_{b2} - W_{b1}).$$

联立式(24)、式(25)与式(23), 能得到转子的同步角速度和两转子的稳态相位差

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{T_{Dif}}{W_s} \right) - \theta_s \quad (26)$$

式中

$$\theta_s = \begin{cases} \arctan \frac{b_s}{a_s} & a_s \geq 0 \\ \pi + \arctan \frac{b_s}{a_s} & a_s < 0 \end{cases}$$

由式(26)知两激振电机的稳态相位差主要是由激振电动机的安装位置参数, 拉簧的刚度系数, 振动系统的结构参数等决定的。由于有界函数 $|\sin(\alpha + \theta_s)| \leq 1$, 拉簧耦合的双偏心转子振动系统的同步条件满足

$$|T_{\text{Dif}}| \leq T_{\text{SYS}} \quad (27)$$

式(27)表明只有两激振电机残余转矩的绝对值小于或等于系统的同步扭矩时, 式(23)才有稳态的相位差值 α , 振动系统实现稳定的同步运动。为了进一步描述拉簧连接同向回转的双偏心转子振动系统的同步性能力, 引入同步性能力指数 ξ

$$\xi = \left| \frac{T_L}{T_{\text{SYS}}} \right| \quad (28)$$

其中

$$T_L = \frac{1}{2} m_2 r r_m \omega^2 [(-\eta_{12}^2 W_{s1} - W_{s2}) + \eta_{12} \sqrt{(W_{a1} - W_{a2})^2 + (W_{b1} + W_{b2})^2}]$$

同步性能力指数 ξ 描述的是两激振电机的耦合力矩的最大值与振动系统同步扭矩的比值。当同步性指数的绝对值越接近于零, 两激振电机越容易实现稳定的同步运动。

2.3 系统稳定性判据

联立式(10)与式(21), 拉簧连接同向回转的双偏心转子振动系统的稳定性准则为

$$\frac{\partial(p_1 - p_2)}{\partial \alpha_1} = b_s \sin \alpha - a_s \cos \alpha < 0 \quad (29)$$

由式(29)可以看出, 振动系统的同步稳定性主要是由系统的结构参数, 拉簧的刚度系数等决定的。只有当系统参数同时满足系统的平衡方程和稳定性判据时, 振动系统才能实现稳定的同步运动, 即式(26)的解 α^0 是唯一的, 此时 α^0 被称为稳定的相位差。

3 数值分析

上述部分从理论上推导出了拉簧在整个同步过程中均受到负载作用时, 振动系统的同步条件和稳定性判据。下面将采用数值法定量的讨论系统参数对系统同步状态的影响, 进一步揭示系统振动参数

与系统同步状态的关系。为了简化计算, 考虑两激振电机对称地安装在振动体上, 即 $l_1 = l_2$, $r_1 = r_{11} = r_{12}$, $\beta_1 = \pi - \beta_2$ 。

表 1 振动系统参数值

参数		数值
激振电力学 参数 $i=1,2$	电机质量 m_i / kg	2
	旋转半径 r_i / m	0.04
	同步角速度 $\omega_m / (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$	150~157
	阻尼系数 $f_i / (\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$	0.02
	电机 1 安装角度 $\beta_1 / (^\circ)$	75, 60, 45, 30
振动质体	电机 2 安装角度 $\beta_2 / (^\circ)$	15, 30, 45, 60
	系统总质量 M / kg	70
	系统总惯性矩 $J / (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	6.8
	x 方向的阻尼 $f_x / (\text{N} \cdot (\text{m/s})^{-1})$	100
	y 方向的阻尼 $f_y / (\text{N} \cdot (\text{m/s})^{-1})$	100
	ψ 方向的阻尼 $f_\psi / (\text{N} \cdot (\text{m/s})^{-1})$	100
	x 方向的刚度系数 $k_x / (\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	0~10 ⁸
	y 方向的刚度系数 $k_y / (\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	0~10 ⁸
拉簧	ψ 方向的刚度系数 $k_\psi / (\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	0~10 ⁸
	拉簧刚度系数 $k / (\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	0~1.2×10 ⁵
	安装位置距电机旋转中心 a / m	0.02
激振电机性能 参数	电网供电频率 ω_s / Hz	50
	定子电压幅值 U_{s0} / V	380
	电机极对数 n_p	2
	转子的等效电阻 R_r / Ω	0.54
	电子与转子互感系数 L_m / H	0.13
	定子电感系数 L_l / H	0.2

工程上根据振动系统频率比值的不同取值范围, 常将振动系统定义为超共振系统、亚共振系统、锐共振系统。锐共振系统(n_j 的值在 1 附近, 一般 $0.95 \leq n_j \leq 1.05$)对外界的扰动敏感, 容易造成各激振电机对称负载分配不均匀, 导致振动系统的振幅发生剧烈变化。锐共振系统中振动系统的结构参数和激振电机的电气参数都直接影响着系统的同步特性; 亚共振系统($n_j < 0.95$)中, 支撑弹簧的刚度系数非常大导致振动系统在稳态时振幅非常小, 常用于煤炭和矿石行业中提高振动机械的工作效率; 超共振系统($n_j > 3$)中系统的运转频率远远大于其固有频率, 主要用于物料的筛分、运输、干燥等。本文的数值分析主要探讨了振动系统在超共振系统中的同步机理。

3.1 同步能力分析

根据式(28)知, 系统的同步扭矩和残余扭矩共同决定系统同步能力, 而系统残余扭矩和同步扭矩是由两激振电机的安装位置参数, 拉簧的刚度系数, 振动系统结构参数等共同决定的。考虑两激振电机的安装角度为一常数, 探讨了振动系统在不同的拉簧的刚度系数和频率比下, 激振电机的安装距离参数 r_i 对系统同步能力的影响, 其他参数与表 1 中的

参数相同。图2所示,当 $\beta_2 = 5\pi/12$ 时,对于振动系统频率比分别取3.8, 4.5, 5.2, 6.5, 拉簧的刚度值分别为0, 800 N/m, 6 000 N/m, 18 000 N/m时, r_l 对稳态相位差的影响。若 $r_l = \sqrt{2}$ 时,同步指数出现一个跳跃,也就是说当 $r_l > \sqrt{2}$ 时,系统的稳定性能力比 $r_l < \sqrt{2}$ 时大。此外,图3所示对于 k 取不同

的刚度系数时,激振电机的安装角度和振动系统的频率比对系统同步能力的影响。给定 $r_l = 2.57$,在 $n_x = n_y = n_\psi = 1$ 附近时,系统的激振频率和系统的固有频率接近时,即锐共振系统,系统出现不稳定的同步状态($\xi > 1$),也就是说系统没有稳定的相位差。

图2 当 $\beta_2 = 5\pi/12$ 时的振动系统同步能力

图3 当 $r_l = 2.57$ 时的振动系统同步能力

3.2 数值讨论

当系统参数同时满足同步条件式(27)和稳定性判据式(29)时, 可以根据式(26)数值地求解出两激振电机的稳态相位差。图 4 所示为系统频率比取不同值时, 拉簧刚度系数 k 及两激振电机的位置参数 r_l 对稳定相位差值的影响。从图中可以看出, 当 $k=0$ 时, 两激振电机的相位差 $\alpha \in (-\pi/2, -\pi)$, 即两激振电机趋于反相同步。另外发现当两激振电机的安装角一定时, 他们的水平安装距离越近, 越趋向于反相同步。若不考虑拉簧对激振电机性能的影响, 随着拉簧刚度系数的

增加, 两激振电机的相位差逐渐趋于零度。

图 5 揭示了耦合单元的刚度系数 k , 激振电机的安装角度以及频率比对稳定相位差的影响。当 $r_l = 0.57$ ($l_1 = l_2 = 0.8$ m), 若不考虑拉簧对激振电机性能的影响, 两激振电机的相位差随着拉簧的刚度系数增加而逐渐趋于零度同步; 耦合拉簧的刚度增大致 6 000 N/m 时, 电机安装位置对同步相位的几乎不产生影响。此外, 研究发现系统频率比对相位差的大小影响甚微, 但耦合单元的刚度系数、激振电机的安装位置直接决定了系统的同步行为。

图 4 当 $\beta_2 = \pi/3$ 时, 相位差的近似稳态理论值

图 5 当 $r_l = 2.57$ 时, 相位差的近似稳态理论值

4 振动系统机电耦合模拟

为了进一步验证上述理论推导及数值讨论的正确性,本文建立了系统的机电耦合模型,进一步探讨了系统在线性拉簧始终受到负载的作用时和间断性的受到负载的作用时振动系统同步状态与机电耦合动力特性的关系。

4.1 线性耦合振动系统仿真

4.1.1 参数 $k=0$, $r_l=2.57$, $\beta_2=5\pi/12$, $n_x=n_y=n_\psi=4.5$ 时的仿真结果

考虑拉簧在整个同步过程中均受到线性负载的作用,当系统参数为 $k=0$, $r_l=2.57$, $\beta_2=5\pi/12$, $n_x=n_y=n_\psi=4.5$ 时,此时系统的位置参数为

$l_1=l_2=0.8$ m, 以及弹簧刚度系数分别为 $k_x=k_y=8.52\times 10^4$ N/m, $k_\psi=8.28\times 10^3$ N/m, 其他参数与表1中参数一致,振动系统的仿真结果如图6所示。由于两激振电机的参数是完全一样的,所以它们的加速度相同。当同时给两激振电机提供驱动力时,振动质体的质量较大而作用在两激振电机上的力矩非常小,导致了在系统初始阶段,两激振电机不能以相同的速度同步启动,两激振电机的输出扭矩逐渐增加。大约经过3s后,两激振电机的输出扭矩维持在一个平衡的状态,激振电机一和激振电机二的输出电磁转矩分别为3.75 N.m与3.4 N.m,如图6a所示。此时两激振电机以相同的速度153 rad/s实现同频振动,如图6b所示。图6d为激振系统在同步

图6 系统参数为 $k=0$, $r_l=2.57$, $\beta_2=5\pi/12$, $n_x=n_y=n_\psi=4.5$ 时的仿真结果

过程中的相位差情况, 当系统处于稳态时两激振电机的相位差近似为 3.436 rad , 实现了两激振电机的反相同步, 进而导致系统的激振力大部分抵消, 造成系统的振幅偏小。振动系统质心在 x 、 y 及 ψ 方向的振幅分别为 $3.51 \times 10^{-4} \text{ m}$, $3.52 \times 10^{-4} \text{ m}$, $1.545 \times 10^{-3} \text{ rad}$, 如图 6e 所示。计算机仿真结果与数值计算结果是吻合的, 如图 5b 所示, 当系统参数与仿真参数一致时, 两激振电机的相位差的理论值为 -2.819 rad ($-2.819 \text{ rad} = (3.46 - 2\pi) \text{ rad}$)。

4.1.2 参数 $k = 6 \times 10^4 \text{ N/m}$, $r_l = 2.57$, $\beta_2 = 5\pi/12$, $n_x = n_y = n_\psi = 4.5$ 时的仿真结果

当拉簧的刚度系数 $k = 6 \times 10^4 \text{ N/m}$, 其仿真结果如图 6 所示。当两激振电机以相等的速度 151 rad/s

作同步运转时, 振动系统处于同步状态, 如图 6b 所示。两激振电机在稳态时克服摩擦转矩后的输出扭矩分别为 $4.9 \text{ N}\cdot\text{m}$ 与 $4.6 \text{ N}\cdot\text{m}$, 使两激振电机的相位差稳定在 -0.36 rad 。与图 5b 结果进行对比, 可以看出计算机模拟的结果与理论分析的结果是基本吻合的, 图 5b 所示相位差的理论计算值为 -0.28 rad 。在同步状态, 振动系统质心的运动轨迹也为一椭圆, 其在振动方向的振幅分别为 $2.37 \times 10^{-3} \text{ m}$, $2.4 \times 10^{-4} \text{ m}$, $8 \times 10^{-3} \text{ rad}$ 。对比图 5 的结果发现选择合适刚度系数的拉簧, 可以使同向旋转的两激振电机的相位差趋近于零度, 进而提高了系统的激振力, 增大系统的振幅。

图 7 系统参数为 $k = 6 \times 10^4 \text{ N/m}$, $r_l = 2.57$, $\beta_2 = 5\pi/12$, $n_x = n_y = n_\psi = 4.5$ 时的仿真结果

4.2 非线性拉簧振动系统仿真

在实际的工程应用中, 拉簧只能承受轴向拉力, 当其长度超过其自由长度时, 拉簧将受到轴向负载

的作用, 否则拉簧所受载荷为零。因此在同步过程中, 拉簧将间断地受到负载的作用。考虑拉簧在同步过程中的非线性特性对激振电机性能的影响, 针

对 4.1 节仿真模型的参数,建立了拉簧耦合振动系统机电耦合仿真模型,对不同刚度系数的耦合单元进行了动态仿真,仿真结果如图 8~13 所示。

从非线性系统分析可以看出,对于小刚度的拉簧($k=1\times 10^3$ N/m),即弱非线性耦合振动系统,其仿真结果与上述理论分析的结果是一致的。经过一段时间后,振动系统处于同步状态,此时两转子的平均转速为 154.5 rad/s,但值得注意的是,两转子的速度具有较大的幅值波动(激振电机 1 的幅值波动为 ± 1.05 rad/s,而激振电机 2 的幅值波动为 ± 2.7 rad/s),如图 9a 所示。由于拉簧的存在,使其均匀且周期的受到负载作用,受力状态从不受力逐渐增大到 40 N,然后减为 0,又到不受力状态,依次交替呈周期性地发生变化,分别如图 12a 与图 13a 所示。另外,在同步状态时,两激振电机的输出扭矩在 2.28 N.m 附近周期波动,使两转子的相位差稳定于 9.85 rad ($9.85 \text{ rad} = (-2.72 - 4\pi) \text{ rad}$),如图 11a 所示,将计算结果与图 5b 进行对比,可以看出对于小刚度的耦合拉簧非线性系统,计算机模拟所得的相位差值与理论计算是吻合的。

对于临界刚度的拉簧($k=4.2\times 10^3$ N/m)。由于在同步过程中,拉簧的非线性特性的强度还不足以破坏系统的同步能力。当系统处于同步状态时,振动质体的质心仍为一椭圆,但值得注意的是椭圆的幅值在一定范围内做微摆动,如图 10b 所示。在稳态时,拉簧周期但不均匀地受到负载的作用,使两激振电机的角速度在较大幅值范围内波动,激振电机 1 的角速度为 117~185 rad/s,激振电机 2 的角速度为 135.6~167 rad/s,如图 9b 所示。此外在同步状态时激振电机 1 的电磁转矩在 -10~11.7 N/m 内波动,而激振电机 2 的电磁转矩在 -3~10 N/m 内波动,如图 8b 所示。在这种情况下,两转子执行同相同步行为,转子的同步相位差角在 -50.3 rad 附近做波动($-50.3 \text{ rad} = (-0.03 + 16\pi) \text{ rad}$)。

对于超过临界刚度的拉簧($k=1.2\times 10^4$ N/m),由于刚度系数过大,导致其中一个电机在额定转速下运转,而另一个电机在拉簧的作用下出现正反转,如图 9c 所示。拉簧在同步过程受到的负载是强非线性的,如图 13c 所示,导致振动系统不能实现稳定的同步运动,甚至出现混沌现象,如图 10c 所示。

图 8 非线性系统激振电机电磁转矩

图 9 非线性系统激振电机转速

图 10 非线性系统振动体质心轨迹

5 试验研究

非线性耦合同向回转的双偏心转子振动系统的同步测试方案如图 14 所示。测试系统主要是由实验样机、高速成像系统组成。高速成像系统主要由可调聚光灯、高速摄像机、MEMRECAM Hxlink 软件组成。本试验通过高速摄像机对激振电机的偏心块进行实时监测，提取部分帧的瞬态图片，然后对系统在同步状态时两个偏心块的相位差进行分析。通过高速撮成像系统能较直观、高精度地对系统的同步状态进行可视化定量的分析。

试验样机如图 15 所示,该系统主要是由两个振动源三相异步电机(YZS)、支撑弹簧、筛箱、耦合单元、底座、电机座、支座等组成。YZS 系列的振动源三相异步电机是在旋转轴两端各安装一组可调偏心块,利用轴及偏心块高速旋转产生的离心力得到激振力,振动参数如表 2 所示。同向回转的双偏心转子振动系统样机模型是由两个振动源电机通过电机座平行地固定于筛箱上,从左到右分别为激振电机一、激振电机二,筛箱与底座之间通过四个支撑弹簧连接。非线性耦合同向回转的双偏心转子振动系统样机模型在激振电机一与激振电机二的一侧偏心块相同的径向位置安装耦合元。该耦合单元主要是由连接杆、滑块、滑框、压簧、轴承、锁紧螺钉,可调螺母等组成。连接杆一端安装一个可相对激振电机一偏心块转动的滑块,另一端焊接一滑框,并且滑框通过锁紧螺钉固定在激振电机二偏心块上,在滑框内的滑块两端各安装一根压簧,并且压簧可以通过可调螺母调节其初始状态。在同步过程中,通过串联的两个弹簧交替的受到负载的作用,最终使耦合单元连接的两个激振电机实现了近似零相位同步。两个激振电机的安装位置参数分别为

$l_1 = 0.23 \text{ m}$, $l_2 = 0.28 \text{ m}$, $\beta_1 = 132^\circ$, $\beta_2 = 38^\circ$, 其他参数与表 1 的参数一致。

表 2 振动源三相异步电机 YZS-1.5-4 型振动参数

技术参数	参数值
额定电压/V	380
额定频率/HZ	50
功率/kw	0.12
电流/A	0.36
频率/(r·min ⁻¹)	1500
激振力/kN	1.5
质量/kg	16

图 16 所示为同向回转的双偏心转子振动系统在稳态时的相位差情况, 经过处理分析可以得到同向回转的两个激振电机的相位差 α 的值约为 -205.9° , ($-205.9^\circ = 154.1^\circ - 360^\circ$, $154.1^\circ \triangleq 2.69 \text{ rad}$), 将相位差的试验测试结果与相应计算仿真结果进行对比分析, 如表 3 所示, 两个激振电机的相位差的仿真值稳定于 3.03 rad , 相位差的试验测试结果和仿真结果的误差为 11.2% , 在可靠误差允许范围内, 通过相位差的试验测试结果和计算机仿真结果是吻合的说明了理论推导的准确性和试验方案的可行性。

图 15 试验样机

1. 筛箱 2. 滑框 3. 激振电机一 4. 连接杆 5. 弹簧 6. 锁紧螺钉
7. 激振电机二 8. 挡板 9. 调节螺母 10. 滑框
11. 锁紧螺栓与螺母 12. 支撑弹簧 13. 底座

表 3 无拉簧耦合的同向回转的双激振电机振动系统相位差的试验结果和仿真结果对比

	间接测试 试验分析结果	计算机仿真 分析结果	误差(%)
同步相位差角 α / rad	$-205.9^\circ \triangleq 2.69$	3.03	11.2

图 16 无拉簧耦合的同向回转的双激振电机振动系统相位差情况

针对非线性耦合同向回转的双偏心转子振动系统, 采用高速摄像机做了同步性试验研究, 测试结果如图 17 所示, 从图中可以看出, 在系统的同步状态时, 两个激振电机之间耦合单元串联的弹簧通过交替受到负载的作用, 使两个激振电机的偏心块以相同的速度与相位同频转动, 实现了同向旋转的两个激振电机的近似零相位同步。将试验测试结果与计算机仿真结果进行对比, 如表 6 所示, 研究发现

计算机中仿真结果与试验测试结果是吻合的。两个激振电机的相位差的试验测试结果为 0.67° ; 而计算机仿真结果为 0.75° 。

表 4 拉簧连接同向回转的双激振电机振动系统相位差角的试验结果和仿真结果对比表

	间接测试试验分析结果	计算机仿真分析结果	误差 (%)
同步相位差角 α / rad	$0.67^\circ \pm 0.012$	$0.75^\circ \pm 0.013$	7.7

图 17 拉簧连接同向回转的双激振电机振动系统相位差情况

6 结论

本文针对耦合单元在同步过程中, 由于其质量过大导致离心惯性力, 影响系统的同步行为等问题, 提出了非线性(拉簧)耦合同向回转的双偏心转子振动系统, 能有效减轻耦合单元的质量。利用运动分离法研究了振动系统的同步行为, 揭示了该系统的同步机理。

(1) 若不考虑拉簧对激振电机特性的影响, 只有当系统参数同时满足系统同步性条件和稳定性判据时, 振动系统才能实现稳定的同步运动。理论分析和数值分析表明拉簧的刚度系数, 激振电机的位

置参数, 以及支撑弹簧的刚度系数等均是影响系统同步行为和稳定性的主要因素。通过选择合适刚度的拉簧可以使系统实现近似零相位同步, 进而增大系统的激振力。

(2) 对于较小的拉簧刚度的弱非线性系统, 拉簧受到的负载远小于振动系统的同步能力, 振动系统的同步特性与线性拉簧的仿真结果是一致的。

(3) 对于临界附近刚度的拉簧, 由于拉簧在同步过程非线性的能力, 还不足以破坏系统的同步能力, 导致了激振电机的角速度和输出电磁转矩在一个较大幅值范围内波动, 但系统仍旧能实现稳定的同步运动, 相位差在零度附近波动。

(4) 若耦合拉簧的刚度系数为过大的强非线性

系统, 系统同步的复杂性, 多变性, 导致了系统不能实现稳定的同步运动, 甚至可能出现混沌现象。

参 考 文 献

- [1] FERRARI F A, VIANA R L, LOPES S R, et al. Phase synchronization of coupled bursting neurons and the generalized Kuramoto model[J]. *Neural Netw*, 2015, 66: 107-118.
- [2] YADAV V K, DAS S, BHADARIA B S, et al. Stability analysis, chaos control of a fractional order chaotic chemical reactor system and its function projective synchronization with parametric uncertainties[J]. *Chinese J. Phys.*, 2017, 55(3): 594-605.
- [3] PARRIAUX J, MILLARDIOUX G. A constructive approach for the design of self-synchronizing dynamical systems: an application to communications[C]. 18th IFAC World Congress, IFAC WC'2011, Aug 2011, Italy.pp.CDROM. hal-00655582.
- [4] HUYGENS C. *Horologium oscilatorium*[J]. Paris, France, 1673.
- [5] BLEKHMAN II. *Synchronization in Science and Technology*[M]. New York: ASME Press, 1988.
- [6] BLEKHMAN II. *Vibrational mechanics*[M]. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2002.
- [7] BLEKHMAN II, INDEITSEV DA, FRADKOV AL. Slow motions in systems with inertially excited vibrations[J]. *IFAC Proceedings Volumes*, 2007, 40(14): 126-131.
- [8] BLEKHMAN II, LANDA PS, ROSENBLUM MG. Synchronization and chaotization in interacting dynamical systems[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1995, 48(11): 733-752.
- [9] BLEKHMAN II, VASIL'KOV VB, YAROSHEVICH NP. On some opportunities for improving vibration machines with self-synchronizing inert vibration exciters[J]. *Journal of Machinery Manufacture & Reliability*, 2013, 42(3): 192-195.
- [10] 方潘, 侯勇俊, 张丽萍, 等. 转子耦合摆系统的同步行为理论研究[J]. *物理学报*, 2016(1): 254-265.
FANG Pan, HOU Yongjun, ZHANG Liping, et al. Synchronous behavior of a rotor-pendulum system[J]. *China Academic Journal Electronic*, 2016(1): 254-265.
- [11] FANG Pan, HOU Yongjun, DU Mingjun. Synchronization behavior of triple-rotor- pendula system in a dual-super-far resonance system[J]. *P. I. Mech. Eng. C-J Mec*, 2019, 233(5): 1620-1640.
- [12] ZHANG Xueliang, WEN Bangchun, ZHAO Chunyu. Theoretical study on synchronization of two exciters in a nonlinear vibrating system with multiple resonant types[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 85(1): 141-154.
- [13] ZHANG Xueliang, WEN Bangchun, ZHAO Chunyu. Vibratory synchronization and coupling dynamic characteristics of multiple unbalanced rotors on a mass-spring rigid base[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2014, 60(2): 1-8.
- [14] 侯勇俊, 杜明俊, 王钰文, 等. 基于弹性耦合的三激振电机椭圆振动筛: 中国, 2015102274176[P]. 2015-05-07.
HOU Yongjun, DU Mingjun, WANG Yuwen, et al. An elliptic vibrating screen of tri-excited motor based on elastic coupling: China, 2015102274176[P]. 2015-05-07.
- [15] HOU Yongjun, DU Mingjun, FANG Pan, et al. Synchronization and stability of an elastically coupled tri-rotor vibration system[J]. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 55(1): 227-240.
- [16] 杜明俊. 基于弹性耦合的三激振电机椭圆振动筛动力学研究[D]. 成都: 西南石油大学, 2017.
DU Mingjun. Investigation on dynamics of an elastically coupled tri-Rotor vibration system[D]. Chengdu: Southwest Petroleum University, 2017.
- [17] 倪振华. 振动力学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1989.
NI Zhenhua. vibration mechanics[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1989.
- [18] ZHAO Chunyu. Self-synchronization theory of a vibrating system with two-motor drives rotating in opposite directions[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2009, 45(9): 24-30.
- [19] 闻邦椿, 赵春雨. 工程中的振动同步与控制同步[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
WEN Bangchun, ZHAO Chunyu. Vibratory synchronization and controlled synchronization in engineering[M]. Beijing: Science Press, 2009.
- [20] 闻邦椿. 振动机械理论、技术及其应用(M). 北京: 科学出版社, 2010.
WEN Bangchun. Theory and techniques of vibrating machinery and their applications [M]. Beijing: Science Press, 2010.

作者简介: 杜明俊, 男, 1991 年出生, 博士, 讲师。主要研究方向为非线性振动、振动利用(自同步现象)。

E-mail: dmj9213@163.com

侯勇俊(通信作者), 男, 1967 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为机械振动及利用、流体机械工程。

E-mail: hyj2643446@126.com