

DOI: 10.3901/JME.2020.23.089

三阶魔方机构的拓扑与运动简图*

卢文娟^{1,2} 吴华芳^{1,2} 刘甜璐^{1,2} 曾达幸^{1,2}

- (1. 燕山大学先进锻压成形技术与科学教育部重点实验室 秦皇岛 066004;
2. 燕山大学河北省重型机械流体动力传输与控制重点实验室 秦皇岛 066004)

摘要:表面上简单、紧凑的魔方机构,实际上却可以实现着运动的千变万化,这种奇妙的模型远超出了传统机构学的概念和设计方法。以经典三阶立方体魔方为对象,从建立魔方机构的运动简图突破口探索魔方世界中的机构学问题。分析魔方机构中的构件和运动副,提出了两种新的运动副以描述魔方在运动过程中构件间的连接在可动与相对固定之间切换的问题;提出了正位状态和非正位状态的概念,表达魔方机构在转动过程中构态的变化,用机构拓扑图分别描述该两种构态下构件间的连接关系,采用邻接矩阵反映构件间的位置关系和拓扑特征,从而将魔方机构的图表达转换为数学表达的方法。为将复杂的魔方机构模块化,采取对魔方整体的约束关系进行内外划分并提取魔方运动单元机构的方法,结合抽离出的单元机构子邻接矩阵,以第一卦限单元机构为例,分别建立了正位和非正位状态时外部环路魔方机构的运动简图。研究工作为非传统、变拓扑、多构态、多环路机构的结构分析提供参考,为魔方机构后续的自由度分析与运动特性分析提供模型。

关键词: 魔方机构; 多构态; 拓扑图; 邻接矩阵; 运动简图

中图分类号: TH112

Topology and Motion Diagram of the Third-order Cube Mechanism

LU Wenjuan^{1,2} WU Huafang^{1,2} LIU Tianlu^{1,2} ZENG Daxing^{1,2}

- (1. Key Laboratory of Advanced Forging & Stamping Technology and Science of Ministry of Education, Yanshan University, Qinhuangdao 066004;
2. Hebei Key Laboratory of Heavy Machinery Fluid Power Transmission and Control, Yanshan University, Qinhuangdao 066004)

Abstract: The seemingly simple and compact Rubik's cube mechanism can actually realize the ever-changing movement, this wonderful model is beyond the traditional concept of mechanism and mechanism design method. The classical third-order cubic cube is taken as the research object, from the establishment of the motion diagram of the Rubik's cube mechanism as a breakthrough to explore the problem of mechanism in the world of Rubik's cube. The components and kinematic pairs in the Rubik's cube mechanism are analyzed, and two new kinematic pairs are defined to describe the problem of switching between movable and relatively fixed connections between components in the process of Rubik's cube movement. The aligned state and non-aligned state are defined to express the change of the configurations of the Rubik's cube mechanism in the process of rotation, the connection relationship between components in these two configurations is described by the mechanism topology diagram, and the adjacency matrix is used to reflect the location relationship and topological characteristics of components, so that the graphic expression of Rubik's cube mechanism can be transformed into mathematical expression. Then, in order to modularize the complex Rubik's cube mechanism, the method of dividing the internal and external constraints of the whole Rubik's cube and extracting the kinematic unit mechanism of the Rubik's cube is adopted, combining with the sub-adjacency matrix of the unit mechanism extracted from the corresponding configuration adjacency matrix of the Rubik's cube, taking the first octant unit mechanism as an example, the motion diagram of the external loop Rubik's cube mechanism in the aligned and non-aligned states are established respectively. The research work in this paper provides a reference for the structural analysis of non-traditional, variable topology, multi-configuration and multi-loop mechanisms, and provides a model for the follow-up analysis of freedom and motion characteristics of Rubik's cube mechanisms.

Key words: Rubik's cube mechanism; multi-configuration; topology diagram; adjacency matrix; motion diagram

* 国家自然科学基金青年科学基金(51905464)、国家重点研发计划(2017YFB1300203)、国家自然科学基金(51775473)和河北省自然科学基金(E2018203140)资助项目。20190627 收到初稿, 20191211 收到修改稿

0 前言

魔方自 1974 年由匈牙利布达佩斯建筑学院的 RUBIK^[1]发明之日起,便因其艺术的外观、巧妙的结构、独有的特点而引起了全世界的关注,并被列为 20 世纪最具影响力的 100 项发明之一^[2]。

魔方作为一种休闲放松、提高空间思维能力的方式,吸引越来越多的人流入“方潮”,从魔方的一般复原到速拧,最少步还原,单手拧到盲拧等^[3]。实际上,魔方的神奇之处不仅在于其作为益智玩具,同时可以作为晶体学、天文学、群论、晶体电子衍射、夸克、混沌和基因等多种科学领域的模型^[4-7],从微观世界里的夸克到遗传基因密码,从研究古代的八卦到研究科学中的准晶体,从经典的物理学、力学到现代化的计算机技术等,魔方在许多前沿课题上都已经受到关注。利用魔方可转动性、模块化、空间上变化的多样性、重组性、排列组合性、循环特性以及自身的高度对称性等为模型的设想不断涌现,包括魔方插座^[8]、魔方台灯^[9]、魔方密码锁^[10]、可重构机器人^[11-12]、魔方卫星^[13],可变形魔方型深空探测飞行器^[14]等。

尽管魔方在作为益智玩具之外的研究和应用已存在,但从目前的研究现状来说,真正能将魔方的特性应用到生活、生产、科技等领域中的实例却很少,究其原因是对其机构原理和机械结构等机构学理论上的问题还未了解透彻^[15]。机械设计问题是魔方巧妙之处最基础、最经典的一部分,但却极少有人涉足,很大一部分原因便是因为魔方结构的特殊性所带来的机构学难题。

(1) 结构复杂性。魔方机构具有构件数、运动副数、环路数多等特点,如经典三阶立方体魔方结构具有约 30 个环路,27 个构件,54 个运动副(已知非冗余非混联机构^[16-18]中,运动副最多的平面机构,有 28 个运动副,但无实际的单独机构;而运动副最多的空间机构具有 36 个运动副,也仅存在理论分析之中^[19])。

(2) 拓扑可变性。魔方上参与连接的模块在内部构成一个球面,各模块在球面上可绕 3 个轴进行转动,相邻两个模块、中心块和相邻模块之间均构成转动副,然而其运动副构成方式有别于一般机构,一般机构中两个相邻构件构成的连接关系是一定的,而在魔方机构中,随着魔方的转动,两构件间构成运动副的方式却会发生改变。

魔方的这些特殊的新问题导致其运动简图、拓扑图的绘制、结构的分析等出现了前所未有的难度。

本文以经典三阶立方体魔方为研究对象,从魔方机构的运动简图问题入手探索魔方世界中的机构学,补充描述魔方机构结构特征的相关概念,建立魔方中运动副的新结构类型描述,根据魔方机构构型的变拓扑性,扩展传统机构运动简图绘制及描述方法,最终基于魔方机构的拓扑图和邻接矩阵而得到运动简图,作为后续魔方自由度、运动分析等研究的模型。本文中对魔方这种新型机构相关理论的提出,都将为机械的自主创新提供参考。

1 三阶立方体魔方机构中的构件和运动副

经典 3×3×3 魔方的整体结构如图 1 所示,该魔方由 26 个独特的小型立方体组成,也称为“子块”,包括 6 个中心块、8 个角块和 12 个边块,上、下层与中层所含不同类型的子块数目不同,上层和下层中各有 1 个中心块(中心层为 4 个)、4 个角块(中心层不含角块)、4 个边块(中心层为 4 个)。

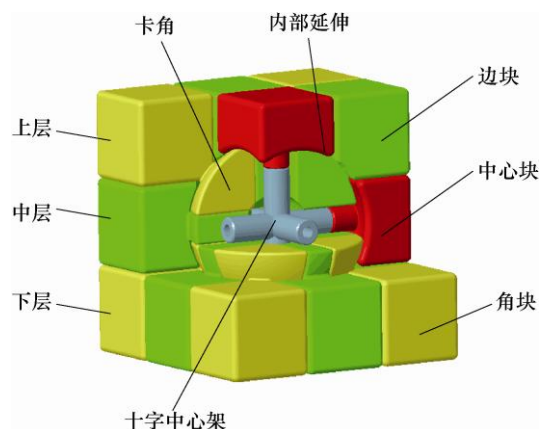


图1 经典 3×3×3 魔方的模型

如图 1 所示,每一个子块均包括一个隐藏的内部延伸,这些内部延伸可以保证相邻子块间的互锁关系,边块和角块上的内部延伸是用于镶嵌的卡角。所有这些内部延伸设置有相同曲率的球弧滑道,以允许它们可以移动到不同位置。所有子块通过一个具有三个正交轴的十字中心架连接在一起,具体是 6 个中心块与十字中心架的 6 个轴形成转动连接,其余 20 个子块利用卡角镶嵌其中,这种榫卯结构的连接形式使魔方各个构件紧致的聚集在一起。

魔方中的每一个构件(中心块、角块和边块)均与其他多个构件连接,且两个连接构件间有多个几何形状不同的接触部分。

(1) 中心块与十字中心架。如图 2 所示,中心块中的螺钉穿过中心块的轴孔与十字中心架

的轴形成固定连接, 中心块和十字中心架形成转动副(R 副), 并且所有的中心块的内球弧滑道形成一个公共球面, 这为其他构件的保持和旋转提供了结构基础。

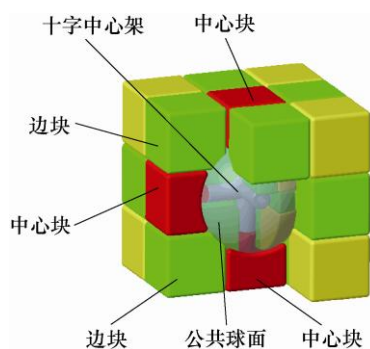


图2 中心块与十字中心架、边块之间的连接

(2) 中心块与边块。如图2所示, 边块的内部卡角嵌在两个相邻的中心块之间, 受到两个方面的约束: 一方面, 由中心块形成的公共球面一直限制边块在球面上转动, 从而形成球面副(S 副); 另一方面, 相邻的两个中心块侧面分别限制边块在平面的移动, 从而形成平面副(E 副)。

(3) 角块与边块。如图3所示, 角块的内部卡角嵌在三个相邻的边块之间, 受到两个方面的约束: 一方面, 由中心块形成的公共球面一直限制角块在球面上的转动, 从而形成 S 副; 另一方面, 相邻的三个边块侧面分别限制角块在平面上移动而形成 E 副。

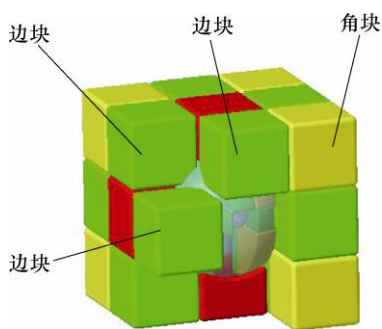


图3 角块和边块的连接关系

(4) 组合平面副与公共球副。若按照相对运动的形式, 魔方构成运动副的两个构件之间的相对运动只是转动, 可视为一个转动副。但是魔方在运动过程中构件间的连接在可动与相对固定之间频繁切换。而另一方面, 其构件间相互镶嵌耦合, 每个构件与多个构件形成运动副, 且在魔方运动过程中部分运动副发生变化。如此一来, 仅从相对运动的角度不能完全表达魔方机构的组合运动特点。因此, 这里提出两种新的运动副概念来描述魔方机构中的

变化约束和固定约束, 分别称为“组合平面副”和“公共球副”, 将其描述如下。

组合平面副(cE pair): 魔方每一层的中心块、边块和角块在公共平面上形成组合平面副约束, 并且在运动过程中组合平面副可分离和重组。

公共球副(cS pair): 魔方机构的所有中心块、边块和角块在内部形成一个公共球副, 各构件在该球副上可绕三个轴进行旋转。

在魔方机构中, 所有中心块通过转动副与中心十字架进行连接, 中心块的内表面为球弧结构, 所有的边块和角块设有卡角, 边块通过卡角和魔方相邻两侧面的中心块连接, 角块通过卡角连接在三个边块的交汇点处, 边块卡角和中心块相接触的面为球弧面, 且所有球弧面的曲率相同, 由此, 所有中心块的内表面和所有边块以及角块的卡角接触面形成了一个球副, 由于该球副由多个子块共同组成, 故称其为公共球副。

在两类运动副的过约束作用下, 魔方呈现多轴单自由度转动性质。如图4所示, 魔方上层转动时(称为转动层, 此时中层和下层称为固定层), 上层边块和角块与中层各块的接触平面形成组合平面副, 上层构件和中层构件构成部分公共球副, 上层中心块与十字中心架形成转动副。

这是一类有别于传统运动副的新运动副, 该类运动副是由多个构件组成一个运动副, 可视为一种变胞运动副^[20], 可以用几种运动集合的形式来描述该类运动副的运动, 并可以实现极大的空间集成度。组合平面副和公共球副叠加在一起时, 可以将所研究构件的轨迹变成空间相互垂直的六个圆, 这种特殊的轨迹为后续魔方运动变换的研究提供基础。

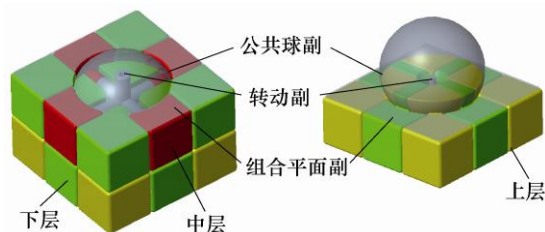


图4 魔方上层转动时的组合结构形式

2 魔方机构构态与拓扑图

除了结构上所带来的新问题, 魔方机构之所以独特的另一方面在于魔方机构在转动过程中具有别于传统机构的特点。

(1) 魔方机构在转动过程中其构态会发生变化。魔方在实际运转时是以层为运动单元进行的集体运动,转动层相对固定层运动时,同一个转动层内的所有的角块和边块的转动角度都是同步的,转动层的9个子块运动形式相同,相互之间没有相对运动,可视为一个构件,这里称此时魔方的构态形式为“非正位状态”。但是该构件的9个子构件的相对固定不是永久的,在魔方处于对齐位置时,该构件的部分子构件由其他构件所共有,可实现构件间的交换重组,这里将该位置称为“正位状态”。

(2) 魔方每层的转动角度是随机的变量。在转动过程中,魔方的结构是呈周期性变化的。在一个转动层内部,各个块的接触关系没有发生变化,发生变化的是转动层的角块和边块与中间层的角块与边块之间的接触关系。

(3) 构件间构成的运动副并非持续接触。一般机构中两个相邻构件构成的连接关系是一定的,然而随着魔方的多轴转动,两层构件之间发生相对运动,构件间的连接关系发生改变,拓扑结构关系亦发生变化。

机构的拓扑结构是机构运动副、构件等元素以一定的方式进行连接的总体信息的抽象表示。图论是机构学中用于表示运动链拓扑结构的一种方式,同时又可以用矩阵来表示而便于计算机处理,这为机构的结构研究和发展提供了强有力的数学工具。

魔方在正位状态和非正位状态之间进行切换时,魔方的拓扑结构会发生变化,有可能会导导致自由度和魔方运动性能的改变,所以需要重点分析魔方的这两种状态,对于非正位状态的细分本文不做讨论。

为描述魔方在不同构态时的拓扑结构从而得到结构简图,基于图论知识,以点表示构件、以边表示运动副的拓扑图与机构的结构简图之间具有相应的对应关系^[21],对27个构件进行编号,其中9,2',4',6',8',9''为中心块,2,4,6,8,1',3',5',7',2'',4',6'',8''为边块,1,3,5,7,1',3',5',7'为角块,9'为十字架,作为机构中的机架处理。建立如图5所示的魔方机构拓扑构态与拓扑图的关系,如图5a所示为魔方初始状态下(称为正位状态-1)的拓扑图,当转动层绕着Z轴正向转动90°(称为单次操作)得到下一个正位状态时(称为正位状态-2)的拓扑图,如图5b所示,两个相邻正位状态之间的任意一个瞬时状态均为非正位状态,拓扑图如图5c所示。

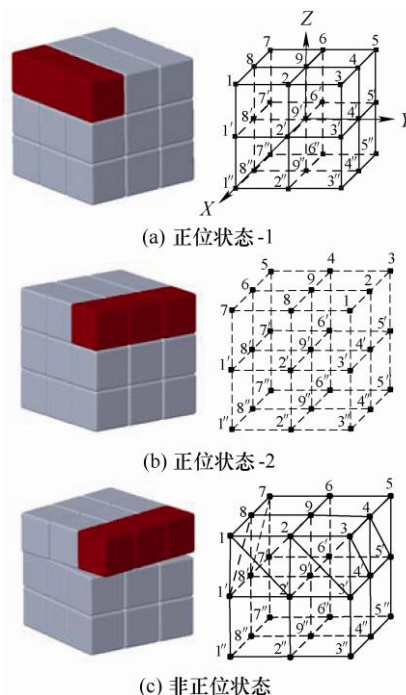


图5 魔方机构拓扑构态与拓扑图

3 魔方机构构态与邻接矩阵

邻接矩阵是表示拓扑图顶点与顶点之间连接关系的矩阵,可以描述拓扑图的全部拓扑特性,包括拓扑图的顶点数、边数以及顶点之间的连接关系^[22-23]。为描述魔方机构各个构件之间的关联情况和整体的拓扑结构,需要构造出一种能描述魔方机构构件间连接状况、运动副类型和运动副有效性的特定邻接矩阵。

魔方机构由于构件数目较多,导致构件间的邻接关系组合方式极多,其中的正位构态就有 $8! \times 12! \div 2 = 9.656672256 \times 10^{12}$ 个。在如此多的构态中,通过构件编号的转换,可以得到极少数同构的构态,这里仅以魔方处于中层和下层为正位构态,上层绕Z轴单次操作为例表示魔方处于正位状态和非正位状态时的邻接矩阵。

三阶魔方机构的拓扑结构可以用27阶的邻接矩阵 A_{mn} 来描述

$$A_{mn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1,9'} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2,9'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{i,9'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{9',1} & a_{9',2} & \cdots & a_{9',j} & \cdots & a_{9',9'} \end{bmatrix}_{27 \times 27} \quad (1)$$

式中, A_{mn} ($m, n=0, 1, 2$, 其中1表示正位状态-1, 2表示正位状态-2, 0表示非正位状态)表示上层处

于构态 m 、下层处于构态 n 时魔方整体所处构态的邻接矩阵, $a_{ij}(i, j=1, 2, \dots, 9, 1', 2', \dots, 9', 1'', 2'', \dots, 9'')$ 表示编号分别为 i, j 的构件间的连接关系及运动副性质。规定

$$a_{ij} = \begin{cases} q_k, & \text{构件 } i, j \text{ 间有连接} \\ 0, & \text{构件 } i, j \text{ 间无连接} \end{cases} \quad (2)$$

式中, q 取值运动副 R、S、E; 下标 k 取值 0、1, 其中 0 表示该运动副在当前构态下无效, 由于其他局部约束导致该运动副不能发挥作用, 1 表示该运

动副在当前构态下有效, 在此状态下运动副可发挥作用。如魔方处于正位状态-1 时, 中间层的中心块 2', 和与其相邻的上层边块 2、中层边块 1'、3' 下层边块 2'', 均构成有效的平面副, 与十字架 9' 从运动形式上构成转动副, 同时所有子块又形成球副, 转动副轴线过球副的中心点, 表现出公共球副的一部分, 最终构成球副与转动副的组合, 同样为有效运动副。即中层 2' 子块参与构成的邻接矩阵的列矢量见式(3)

$$L_2 = [0 \ E_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ E_1 \ 0 \ E_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ S_1 + R_1 \ 0 \ E_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (3)$$

当上层各子块绕着 Z 轴转动时, 上层与中间层偏离一个角度, 魔方机构变为非正位状态, 此时, 中层的九个子块间虽有接触关系, 但并不是可动连接, 他们共同形成一个刚体, 各子块之间构成的运动副这里便为无效运动副, 该构态下, 中间层的中

心块 2' 与同层的相邻中层边块 1', 3' 构成无效的平面副, 用 E_0 表示。

这样分别得到如图 7a 所示正位构态-1 时和图 7c 所示非正位构态时的邻接矩阵分别如式(4)和式(5)所示

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' & 7' & 8' & 9' & 1'' & 2'' & 3'' & 4'' & 5'' & 6'' & 7'' & 8'' & 9'' \\ 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & E_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_1 & 0 & E_1 & 0 & E_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 + R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & S_1 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 + R_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & S_1 + R_1 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & E_1 & 0 & S_1 + R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & S_1 + R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 \\ S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 + R_1 & S_1 & S_1 + R_1 & S_1 & S_1 + R_1 & S_1 & S_1 + R_1 & 0 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 + R_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 & E_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 & 0 & E_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & E_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & S_1 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & E_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 + R_1 & 0 & E_1 & 0 & E_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$A_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' & 7' & 8' & 9' & 1'' & 2'' & 3'' & 4'' & 5'' & 6'' & 7'' & 8'' & 9'' \\ 0 & E_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_0 & E_1 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_0 & 0 & E_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_0 & 0 & E_1 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_0 & 0 & E_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_0 & 0 & E_0 & 0 & 0 & 0 & E_0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & E_1 & 0 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_0 & 0 & E_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & E_1 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_0 & 0 & E_0 & 0 & E_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & E_1 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_0 & 0 & E_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & E_1 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_0 & 0 & E_0 & 0 & E_0 & 0 & E_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 + R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & E_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_0 & S_0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_1 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_0 & 0 & E_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_0 + R_0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_1 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_0 & 0 & E_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_1 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_0 & 0 & E_0 & 0 & 0 & 0 & S_0 + R_0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_1 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_0 & 0 & E_0 & 0 & S_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_0 & 0 & E_0 & S_0 + R_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & E_1 & 0 & 0 & E_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_0 & 0 & S_0 + R_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 \\ S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & S_0 & S_0 + R_0 & S_0 & S_0 + R_0 & S_0 & S_0 + R_0 & S_0 & S_0 + R_0 & 0 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 + R_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 & 0 & E_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 & E_0 & 0 & E_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 & 0 & E_0 & 0 & E_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & E_0 & 0 & E_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_0 & 0 & E_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & S_1 & E_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_0 & 0 & E_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 + R_1 & 0 & E_0 & 0 & E_0 & 0 & E_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

根据上述提出的魔方机构构态邻接矩阵和魔方上下层绕 Z 轴单次操作的具体邻接矩阵表示, 可得到下述特性。

- (1) 三阶魔方机构的整体邻接矩阵是对称阵。
- (2) 邻接矩阵的主对角线上元素均为零。
- (3) 邻接矩阵上层构件和下层构件连接关系元素均为零。

(4) 邻接矩阵的行(列)的非零元素数目(非零元素中有 2 个运动副的算作 2 个元素)为该行(列)对应构件的运动副数目。

(5) 不论魔方机构处于何种构态, 处于同一转动层的构件之间的邻接矩阵均相同。

(6) 魔方机构在正位时所有运动副均瞬时有效; 非正位时运动层与固定层间的运动副为无效, 其他运动副为无效状态。

更重要的是, 在邻接矩阵的基础上, 可以针对魔方机构操作过程中变化的部分, 简化抽离出仅表示变化部分拓扑结构的单元构态子邻接矩阵, 如在

正位状态-1 下, 由上层构件 2, 3, 4, 9 和中层构件 2', 3', 4', 9' 构成的子魔方机构所对应的子邻接矩阵便可根据 A_{11} 而抽离出来。

$$C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 9 & 2' & 3' & 4' & 9' \\ 0 & E_1 & 0 & E_1 & E_1 & 0 & 0 & S_1 \\ E_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 & E_1 & 0 & S_1 \\ 0 & E_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 & E_1 & S_1 \\ E_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 + R_1 \\ E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & S_1 + R_1 \\ 0 & E_1 & 0 & 0 & E_1 & 0 & E_1 & S_1 \\ 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & E_1 & 0 & S_1 + R_1 \\ S_1 & S_1 & S_1 & S_1 + R_1 & S_1 + R_1 & S_1 & S_1 + R_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

4 魔方机构的运动简图

魔方机构一个显著特点就是环路众多, 它是由单环机构一个个耦合在一起得到的, 附加基本环路的过程使得魔方机构逐渐形成复杂的多环机构, 如

果直接建立其运动简图,一方面过程太复杂,另一方面简图中线条符号汇聚使得表达不清晰。为此进行如下处理。

(1) 内外分离环路。

魔方每个子块构件均与中心十字架构件形成球副,所以球副所限制的约束便是魔方机构的一个公共约束,称为“内部约束”。基于此,可以对魔方整体的约束关系进行划分,将魔方所有子块构件与中心十字架之间的球副连接去除,剩下的环路约束称为“外部约束”,这里我们采用内外约束分开分别建立内部环路和外部环路的运动简图的方法。

(2) 提取单元机构。

魔方机构是一个具有循环性质的多构态机构,并结合式(7)可将式(8)化为魔方的一次单次操作作为一个循环,为正位构态-非正位构态-正位构态的切换,每个构态的拓扑结构均不相同,运动简图也不相同。而魔方机构在结构上具有对称性的特点,包含了多个结构相同的单元机构。每一个卦限内便是一个魔方单元机构,整个魔方机构是由 8 个相同的单元机构组成。由于单元机构间刚性并联连接,运动的单元机构的结构属性就是整个魔方机构的结构属性,所以只需分析正位构态和非正位构态时魔方运动单元机构的运动简图。

4.1 正位状态时的运动简图

本文中仅分析处在自身坐标系第一卦限的运动单元机构作为分析单元机构,其对应的拓扑图如图 6 所示。此构态下的机构包含 8 个构件,即构件 9'、9、2'、4'、2、4、3'、3。

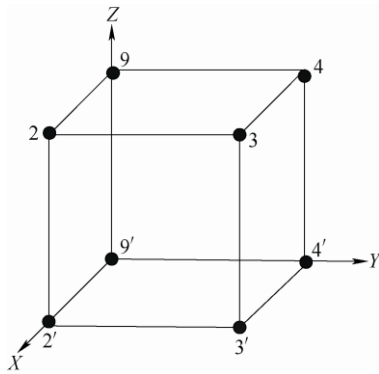


图 6 正位构态-1 第一卦限单元机构拓扑图

该运动单元机构的子邻接矩阵为 C_1 , 如式(6)所示。将拓扑图和邻接矩阵结合,根据魔方位关系,建立如图 7 所示的机构简图。

在单元机构的子邻接矩阵和运动简图中都可以看到,每个活动构件均与十字架 9 构件形成球副,所以可在子邻接矩阵 C_1 中提取出公共邻接矩阵 C_1^I

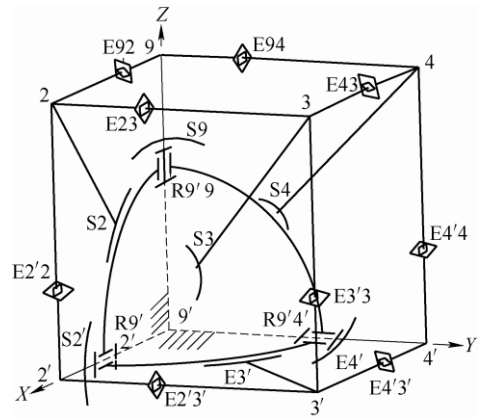


图 7 正位构态-1 的单元机构简图

$$C_1^I = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 9 & 2' & 3' & 4' & 9' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 \\ S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

从而得到外部环路机构的邻接矩阵 C_1^O

$$C_1^O = C_1 - C_1^I = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 9 & 2' & 3' & 4' & 9' \\ 0 & E_1 & 0 & E_1 & E_1 & 0 & 0 & 0 \\ E_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 & E_1 & 0 \\ E_1 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_1 \\ E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & R_1 \\ 0 & E_1 & 0 & 0 & E_1 & 0 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & E_1 & 0 & R_1 \\ 0 & 0 & 0 & R_1 & R_1 & 0 & R_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

建立对应的外部环路机构的简图如图 8 所示。

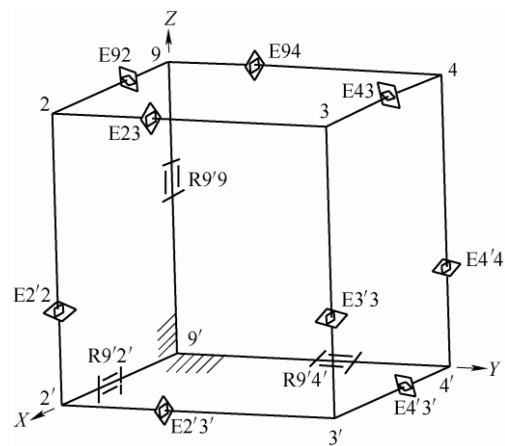


图 8 正位构态-1 的外部环路机构简图

4.2 非正位构态时的运动简图

根据魔方非正位构态时,如图 9 所示的第一卦

限运动单元机构。

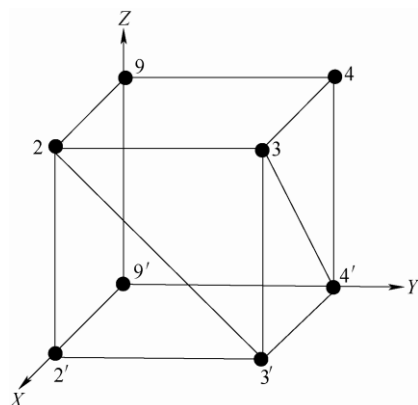


图9 非正位构态第一卦限单元机构拓扑图

从式(5)所示的非正位构态时的邻接矩阵 A_{01} 中, 抽离对应运动单元机构的子邻接矩阵

$$C_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 9 & 2' & 3' & 4' & 9' \\ 0 & E_0 & 0 & E_0 & E_1 & E_1 & 0 & S_1 \\ E_0 & 0 & E_0 & 0 & 0 & E_1 & E_1 & S_1 \\ 0 & E_0 & 0 & E_0 & 0 & 0 & E_1 & S_1 \\ E_0 & 0 & E_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 + R_1 \\ E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_0 & 0 & S_0 + R_0 \\ E_1 & E_1 & 0 & 0 & E_0 & 0 & E_0 & S_0 \\ 0 & E_1 & E_1 & 0 & 0 & E_0 & 0 & S_0 + R_0 \\ S_1 & S_1 & S_1 & S_1 + R_1 & S_0 + R_0 & S_0 & S_0 + R_0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

结合实际方位特征, 可绘制出魔方单元机构的机构简图, 去除公共约束球副后, 得到如图10所示的外部环路机构简图。

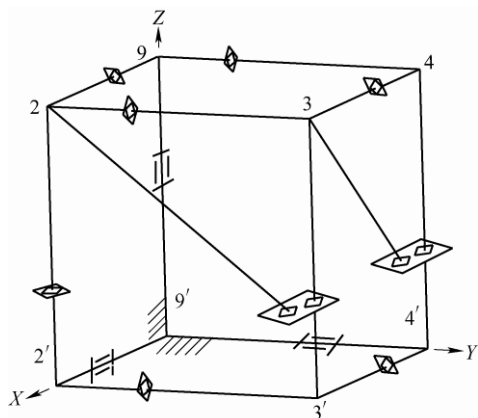


图10 非正位构态的外部环路机构简图

5 结论

(1) 经典三阶立方体魔方由6个中心块、8个角块和12个边块, 共26个子块构成。所有子块通过一个具有三个正交轴的十字中心架连接在一起。中

心块与十字中心架形成转动连接, 其余子块利用卡角镶嵌其中, 构成榫卯结构。

(2) 魔方机构中各子块间相互镶嵌耦合, 每个子块与多个构件形成运动副, 提出用组合平面副描述魔方每一层的中心块、边块和角块在公共平面上形成的多个运动副组约束。将魔方机构的所有子块在内部形成的球副称为公共球副。

(3) 提出正位状态和非正位状态来描述魔方机构在转动过程中构态的周期性变化。建立不同构态下以点表示构件、以边表示运动副的拓扑图, 构造用以描述魔方机构各个构件之间的关联情况的邻接矩阵, 分析魔方机构邻接矩阵的特性, 提出无效运动副和有效运动副的概念, 以此表达魔方转动过程中不同构态下构件间的连接在可动与相对固定之间切换的特性。

(4) 根据魔方机构在结构上具有对称性的特点, 提出通过提取八分之一一个单元机构, 并采取将其内部约束与外部约束进行分离的方式来描述整个魔方机构的结构属性。

(5) 建立第一卦限内魔方单元机构的拓扑图, 从对应构态下的魔方邻接矩阵中抽离单元子邻接矩阵, 并进一步从中提取出内部环路对应的公共邻接矩阵, 从而得到外部环路的邻接矩阵, 结合拓扑图和魔方位关系, 建立正位状态和非正位状态下的外部环路机构简图。

参考文献

- [1] ERNÖ R, TAMÁS V, GERZSON K, et al. Rubik's cubic compendium[M]. Oxford: Oxford University Press, 1987.
- [2] STEPHEN V D. Inventing the 20th Century: 100 inventions that shaped the world[M]. New York: New York University Press, 2000.
- [3] JERRY S, DAVID S, HUANG W H, et al. The cube: The ultimate guide to the world's[M]. New York: Black Dog & Leventhal Publishers, 2009.
- [4] 李世春. 魔方里的科学和文化[M]. 北京: 高等教育出版社, 2015.
- LI Shichun. Science and culture in Rubik's cube[M]. Beijing: Higher Education Press, 2015.
- [5] JOYNER D. Adventures in group theory: Rubik's cube, Merlin's machine and other mathematical toys[M]. Baltimore, Maryland: The Johns Hopkins University Press, 2008.
- [6] FREY A H, SINGMASTER D. Handbook of cubic math[M]. Cambridge: Lutterworth Press, 2010.

- [7] ABITHA K A, BHARATHAN P K. Secure communication based on Rubik's Cube algorithm and chaotic baker map[C]// 4th International Conference on Emerging Trends in Engineering, Science and Technology (ICETEST-2015), December 9-11, 2015, Trichur, INDIA. Procedia Technology, 2016: 782-789.
- [8] 陆亚娟. 便携式魔方插座: 中国, 201520247158.9[P]. 2015-09-02.
LU Yajuan. Portable Rubik's cube socket: China, 201520247158.9[P]. 2015-09-02.
- [9] 齐涛, 仓诗建. 百变多媒体台灯: 中国, 201420829936.0[P]. 2014-04-08.
QI Tao, CANG Shijian. Changing multimedia lamp: China, 201420829936.0[P]. 2014-04-08.
- [10] 黄泽伟. 机械魔方锁: 中国, 201320030868.7[P]. 2013-07-10.
HUANG Zewei. Mechanical Rubik's cube lock: China, 201320030868.7[P]. 2013-07-10.
- [11] 王汝贵, 廖益丰, 张成东, 等. 一种变胞机构式可越障机器蟹: 中国, 201510119249.9[P]. 2015-06-17.
WANG Rugui, LIAO Yifeng, ZHANG Chengdong, et al. A metamorphic mechanism type obstacle-surmounting machine crab: China, 201510119249.9[P]. 2015-06-07.
- [12] 万雷, 王冬, 王亚红, 等. 一种可重构多变魔方模块的研究与实现[J]. 电子技术与软件工程, 2014(14): 121-122.
WAN Lei, WANG Dong, WANG Yahong, et al. Research and implementation of a reconfigurable and changeable Rubik's cube module[J]. Electronic Technology and Software Engineering, 2014(14): 121-122.
- [13] 崔本杰. 魔方卫星及其设计方法: 中国, 2013107194458.8[P]. 2014-04-16.
CUI Benjie. Rubik's cube satellite and its design method: China, 2013107194458.8[P]. 2014-04-16.
- [14] 刘豪, 梁巍. 美国国防高级研究计划局 F6 项目发展研究[J]. 航天器工程, 2010, 19(2): 92-98.
LIU Hao, LIANG Wei. Development research of the F6 project of the US defense advanced research projects agency[J]. Spacecraft Engineering, 2010, 19(2): 92-98.
- [15] ZENG D X, Li M, WANG J J, et al. Overview of Rubik's cube and reflections on its application in mechanism[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2018, 31(4): 9-20.
- [16] 高慧芳, 刘婧芳, 余跃庆. 一种单自由度对称可展耦合机构的设计[J]. 机械工程学报, 2018, 54(5): 62-73.
GAO Huifang, LIU Jingfang, YU Yueqing. Design of a 1-DOF symmetrical deployable coupled mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(5): 62-73.
- [17] 郭金伟, 许允斗, 刘文兰, 等. 基于四面体单元的新型可展机构自由度分析[J]. 机械工程学报, 2019, 55(12): 9-18.
GUO Jinwei, XU Yundou, LIU Wenlan, et al. Mobility analysis of novel deployable mechanism based on tetrahedral element[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(12): 9-18.
- [18] HU B, CUI H, SHI D S, et al. Reachable workspace determination for a spatial hyper-redundant manipulator formed by several parallel manipulators[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2019, 33(2): 869-877.
- [19] HUANG Z, LI Q C, DING H F. Theory of parallel mechanisms[M]. Netherlands: Springer, 2012.
- [20] DING H F, HUANG Z. The establishment of the canonical perimeter topological graph of kinematic chains and isomorphism identification[J]. Transaction ASME Journal of Mechanical Design, 2007, 129(9): 915-923.
- [21] 李晔卓, 田耀斌, 姚燕安. 可折叠双三角锥滚动机构[J]. 机械工程学报, 2014, 50(11): 68-79.
LI Yezhuo, TIAN Yaobin, YAO Yanan. Foldable triangular bipyramid rolling mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(11): 68-79.
- [22] LI D L, ZHANG Z H, CHEN G M. Structural synthesis of compliant metamorphic mechanisms based on adjacency matrix operations[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2011, 24(4): 522-528.
- [23] DAI J S, REES J J. Matrix representation of topological changes in metamorphic mechanisms[J]. Journal of Mechanical Design, 2005, 127(4): 610-619.

作者简介: 卢文娟, 女, 1983 年出生, 博士, 副教授, 硕士研究生导师。主要研究方向为机构学理论及应用、机器人技术。

E-mail: luwenjuan@ysu.edu.cn

曾达幸(通信作者), 男, 1978 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为并联机器人构型分析、型综合理论及应用。

E-mail: roboms@ysu.edu.cn