DOI: 10.3901/JME.2020.23.045

平面结构冗余并联机构的误差敏感度分析*

李官明 曲海波 郭盛

(北京交通大学机械与电子控制工程学院 北京 100044)

摘要: 针对一种含闭环支链的平面结构冗余并联机构进行误差敏感度分析。分析了该机构的逆运动学和正运动学。基于矩阵法建立了机构的误差模型,并通过反解、正解结合的方法对该误差模型进行了验证。基于误差模型,得到了评价机构误差敏感度的指标,绘制了各指标在工作空间内的等值线图。基于误差敏感度指标,定义了低误差敏感性工作空间,绘制了低误差敏感性工作空间在工作空间中的分布图。与平面 3-RRR 并联机构进行了误差敏感度对比分析。结果表明,该机构的低误差敏感性工作空间占比较大,同时可以通过调节其冗余支链不断扩大低误差敏感性工作空间,使机构在大范围空间中保持低误差敏感性。

关键词: 平面并联机构; 结构冗余; 误差建模; 误差敏感度

中图分类号: TH112

Sensitivity Analysis of a Planar Parallel Manipulator with Kinematic Redundancy

LI Guanming QU Haibo GUO Sheng

(School of Mechanical, Electronic and Control Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044)

Abstract: The error sensitivity of a planar kinematically redundant parallel manipulator which has a closed-loop chain is analysed. The inverse kinematics and forward kinematics of the manipulator are analysed. Based on the matrix method, the error model of the manipulator is established. The error model is verified by combining inverse kinematics with forward kinematics. Based on the error model, the index of error sensitivity of the manipulator is obtained, and the contour map of each index in the workspace is drawn. Based on the error sensitivity index, the low error sensitive workspace is defined and the distribution of the low error sensitive workspace in the workspace is drawn. The error sensitivity is compared with that of the planar 3-RRR parallel manipulator. The results show that the low error sensitive workspace of the planar kinematically redundant parallel manipulator is large, and the low error sensitive workspace can be continuously expanded by adjusting the kinematically redundant chain, so that the manipulator can maintain low error sensitivity in a large range of the workspace.

Key words: planar parallel manipulator; kinematic redundancy; error modeling; error sensitivity

0 前言

平面并联机构具有结构简单、精度高、刚度高、承载能力强等优点,在制造、装配、搬运等领域具有广泛的应用前景^[1]。然而,传统平面并联机构在其工作空间内部存在的奇异位形,将导致机构的工作性能降低^[2],国际学者 GOSSELIN^[3]指出冗余单元(冗余结构或冗余驱动)的引入是规避奇异的有效

方法。结构冗余并联机构引入了冗余支链,其整机自由度等于驱动数目,但大于动平台的相对自由度^[4],与驱动冗余并联机构相比,其控制难度较低。由于冗余支链的引入,结构冗余并联机构比传统并联机构的杆件数更多。因此,有必要研究结构冗余并联机构对误差的敏感特性。

国内外学者对并联机构的误差特性做了许多研究。ZHAN 等^[5]综合考虑加工误差、驱动输入误差和间隙误差对并联机构定位精度的影响,提出了一种通用的运动可靠性分析方法。DING 等^[6]提出了一种评估三自由度平面并联机构的空间最小体积椭圆围合方法,该方法考虑了关节间隙和驱动输入误差。姚蕊等^[7]总结了 FAST 望远镜馈源舱的主要误差来

* 中央高校基本科研业务费专项资金(2019JBM052)和国家自然科学基金(51875033)资助项目。20200403 收到初稿,20201009 收到修改稿

源,采用蒙特卡洛与区间分析方法分析了结构参数变化对机构定位精度的影响。王娜等^[8]基于矩阵微分法构建了 3UPS-PU 并联机构的全运动学误差分析模型,并从宏观、微观两个方面验证了模型正确性。CHEN 等^[9]针对新型 SCARA 型并联机器人提出了一种包含所有关节误差的误差建模方法。谢福贵等^[10]采用空间误差矢量链法对一种并联机构进行了误差建模,得到评价误差敏感度的两种指标。赵延治等^[11]基于并联机构影响系数和虚位移原理,提出了通过虚设运动副进行误差建模的方法。CHEBBI 等^[12]基于区间分析法提出了一种三平移并联机构的误差边界预测方法。

目前针对冗余并联机构的误差特性研究较少。丁高鹏等^[13]使用矢量微分法对 3-2SPS 冗余驱动并联机床进行了误差建模,建立了标定模型。沈丹峰等^[14]使用泰勒公式得到了二自由度平面结构冗余机构的误差模型,分析了不同的杆件误差尺寸对机构定位精度的影响。结构冗余并联机构通过调节冗余支链提升机构性能,但上述研究少有涉及关于冗余支链的调节对并联机构误差特性影响的研究。

本文基于矩阵法^[15]对一种含闭环支链的平面结构冗余并联机构进行了误差建模,基于误差模型进行了误差敏感度研究,分析了冗余支链对平面并联机构误差特性的影响,并与传统 3-RRR 平面并联机构的误差敏感度进行了对比。结果表明,调节冗余支链可以扩大平面并联机构的低误差敏感性工作空间。

1 机构结构

含闭环支链的平面结构冗余并联机构如图 1 所示。该机构由动平台、基座和三条运动学支链组成。三条运动学支链由两条开环支链 $A_1B_1C_1$ 、 $A_2B_2C_2$ 和一条闭环支链 $A_3B_3C_3B_4A_4A_3$ 组成,其中:闭环支链由两条开环子支链 $A_3B_3C_3$ 、 $A_4B_4C_3$ 闭合组成。

图 1 平面结构冗余并联机构示意图

需要注意的是: λ_3 和 λ_4 为固定坐标系的 x 轴与 D_3A_3 和 D_4A_4 的夹角,在理想安装位置时, λ_3 和 λ_4 均等于零。当存在误差的情况下, λ_3 和 λ_4 则均不等于零。

开环支链 $A_1B_1C_1$ 、 $A_2B_2C_2$ 的一端通过转动副与基座在点 A_1 、 A_2 铰接,另一端通过转动副与动平台 $C_1C_2C_3$ 在点 C_1 、 C_2 铰接。闭环支链 $A_3B_3C_3B_4A_4A_3$ 的一端通过移动副与基座在点 A_3 、 A_4 相连,另一端通过转动副与动平台在点 C_3 铰接,点 C_3 是连杆 B_3B_4 的中点。动平台 $C_1C_2C_3$ 是等边三角形。

固定坐标系 $O-xyz$ 的原点 O 位于以 A_1A_2 为一边的等边三角形的几何中心, x 轴与边 A_1A_2 平行。动坐标系 $P-uvw$ 与动平台 $C_1C_2C_3$ 固连,原点 P 位于动平台的几何中心, u 轴与边 C_1C_2 平行。动平台的位置用 P 点在固定坐标系中的坐标 (x_p, y_p) 表示,姿态用 u 轴与 x 轴顺时针方向的夹角 φ 表示。

该机构的整机自由度为 4,动平台与基座的相对自由度为 3^[16],具有一个冗余自由度,说明该机构是结构冗余的。通过调节冗余支链,可以实现并联机构的工作空间扩展与奇异规避。该机构选择两个转动副 A_1 、 A_2 和两个移动副 A_3 、 A_4 作为驱动关节。

2 机构运动学分析

2.1 机构逆运动学分析

机构的运动学反解是指已知机构的输出参数,求解输入参数^[17]。所研究机构的输出参数为动平台位姿参数 x_p 、 y_p 、 φ ,输入参数为两个旋转角 θ_1 、 θ_2 和两个距离长度 d_3 、 d_4 。机构的运动学反解可以通过支链建立矢量方程逐项求解。

对于两条开环支链 $A_1B_1C_1$ 、 $A_2B_2C_2$,建立矢量方程

$$OA_i + A_iB_i + B_iC_i + C_iP = OP \quad i=1,2 \quad (1)$$

将式(1)投影在固定坐标系的 x 轴、 y 轴上,得到

$$\begin{cases} h_i \cos \alpha_i + a_i \cos \theta_i + b_i \cos \mu_i - r_i \cos \gamma_i = x_p \\ h_i \sin \alpha_i + a_i \sin \theta_i + b_i \sin \mu_i - r_i \sin \gamma_i = y_p \end{cases} \quad (2)$$

式中, $\mu_i = \psi_i + \theta_i$, $\gamma_i = \beta_i + \varphi$, α_i 为固定坐标系的 x 轴与 OA_i 顺时针方向的夹角, β_i 为动坐标系的 u 轴与 PC_i 顺时针方向的夹角。角度参数参照图 1 和图 2。

角度 ψ_i 是被动关节角,需要被消去。将式(2)中含 ψ_i 的项移至一侧,将得到的两个等式平方相加,消去 ψ_i ,得

图2 平面结构冗余并联机构的部分角度表示

$$\begin{aligned} & (x_p - h_i \cos \alpha_i - a_i \cos \theta_i + r_i \cos \gamma_i)^2 + \\ & (y_p - h_i \sin \alpha_i - a_i \sin \theta_i + r_i \sin \gamma_i)^2 - b_i^2 = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

将式(3)展开并整理, 得

$$e_{i1} \sin \theta_i + e_{i2} \cos \theta_i + e_{i3} = 0 \quad (4)$$

式中, $e_{i1} = -2a_i[y_p - h_i \sin \alpha_i + r_i \sin(\beta_i + \varphi)]$, $e_{i2} = -2a_i[x_p - h_i \cos \alpha_i + r_i \cos(\beta_i + \varphi)]$, $e_{i3} = a_i^2 - b_i^2 + h_i^2 + r_i^2 + x_p^2 + y_p^2 - 2[h_i x_p \cos \alpha_i + h_i r_i \cos(\alpha_i - \beta_i - \varphi) + h_i y_p \sin \alpha_i - r_i x_p \cos(\beta_i + \varphi) - r_i y_p \sin(\beta_i + \varphi)]$ 。

通过式(4)解得

$$\theta_i = 2 \arctan \frac{e_{i1} \pm \sqrt{e_{i1}^2 + e_{i2}^2 - e_{i3}^2}}{e_{i2} - e_{i3}} \quad (5)$$

式(5)说明当机构动平台的位姿固定时, 通常情况下 θ_1 、 θ_2 各有两个解, 即开环支链 $A_1B_1C_1$ 、 $A_2B_2C_2$ 各有两种可能的位形。

对于闭环支链 $A_3B_3C_3B_4A_4A_3$, 首先根据其中的一条开环支链 $A_4B_4C_3$ 建立矢量方程

$$\mathbf{OD}_4 + \mathbf{D}_4\mathbf{A}_4 + \mathbf{A}_4\mathbf{B}_4 + \mathbf{B}_4\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3\mathbf{P} = \mathbf{OP} \quad (6)$$

将式(6)投影在固定坐标系的 x 轴、 y 轴上, 得到

$$\begin{cases} h_4 \cos \alpha_4 + d_4 \cos \lambda_4 + a_4 \cos \theta_4 + \\ b_4 \cos(\psi_4 + \theta_4) - r_3 \cos(\beta_3 + \varphi) = x_p \\ h_4 \sin \alpha_4 + d_4 \sin \lambda_4 - a_4 \sin \theta_4 - \\ b_4 \sin(\psi_4 + \theta_4) - r_3 \sin(\beta_3 + \varphi) = y_p \end{cases} \quad (7)$$

式中, α_4 、 λ_4 为固定坐标系的 x 轴与 OD_4 、 D_4A_4 顺时针方向的夹角, β_3 为动坐标系的 u 轴与 PC_3 顺时针方向的夹角。

ψ_4 是被动关节角, 需要被消去。将式(7)中含 ψ_4 的项移至一侧, 将得到的两个等式平方相加, 消去 ψ_4 , 得

$$\begin{aligned} & [x_p - h_4 \cos \alpha_4 - d_4 \cos \lambda_4 - a_4 \cos \theta_4 + \\ & r_3 \cos(\beta_3 + \varphi)]^2 + [y_p - h_4 \sin \alpha_4 - d_4 \sin \lambda_4 + \\ & a_4 \sin \theta_4 + r_3 \sin(\beta_3 + \varphi)]^2 - b_4^2 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

将式(8)展开并整理, 得

$$e_{41} \sin \theta_4 + e_{42} \cos \theta_4 + e_{43} = 0 \quad (9)$$

式中, $e_{41} = 2a_4[y_p - h_4 \sin \alpha_4 + r_3 \sin(\beta_3 + \varphi) - d_4 \sin \lambda_4]$, $e_{42} = -2a_4[x_p - h_4 \cos \alpha_4 + r_3 \cos(\beta_3 + \varphi) - d_4 \cos \lambda_4]$, $e_{43} = a_4^2 - b_4^2 + d_4^2 + h_4^2 + r_3^2 + x_p^2 + y_p^2 - 2[h_4 x_p \cos \alpha_4 + h_4 y_p \sin \alpha_4 + d_4 x_p \cos \lambda_4 + d_4 y_p \sin \lambda_4 - d_4 h_4 \cos(\alpha_4 - \lambda_4) + h_4 r_3 \cos(\alpha_4 - \beta_3 - \varphi) - r_3 x_p \cos(\beta_3 + \varphi) - r_3 y_p \sin(\beta_3 + \varphi) + d_4 r_3 \cos(\beta_3 - \lambda_4 + \varphi)]$ 。

通过式(9)解得

$$\theta_4 = 2 \arctan \frac{e_{41} \pm \sqrt{e_{41}^2 + e_{42}^2 - e_{43}^2}}{e_{42} - e_{43}} \quad (10)$$

闭环支链 $A_3B_3C_3B_4A_4A_3$ 存在四个被动关节角 θ_3 、 θ_4 、 ψ_3 、 ψ_4 。式(10)说明当机构的位姿参数已知时, 通常情况下被动关节角 θ_4 有两个解。值得注意的是, 继续对闭环支链的另一条开环支链 $A_3B_3C_3$ 建立矢量方程无法求解出 d_3 、 d_4 , 因为无法消去所有被动关节角。下面根据支链 $A_3B_3C_3$ 、 $A_4B_4C_3$ 的闭合特征求解 d_3 、 d_4 。

在支链 $A_3B_3C_3$ 中, 有

$$|\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3| = a_3 \quad (11)$$

式(11)可以被表示为

$$(x_{A3} - x_{B3})^2 + (y_{A3} - y_{B3})^2 - a_3^2 = 0 \quad (12)$$

式中, $x_{A3} = h_3 \cos \alpha_3 + d_3 \cos \lambda_3$, $y_{A3} = h_3 \sin \alpha_3 + d_3 \sin \lambda_3$, $x_{B3} = (b_3 x_{C3} - b_3 x_{B4} + b_4 x_{C3}) / b_4$, $y_{B3} = (b_3 y_{C3} - b_3 y_{B4} + b_4 y_{C3}) / b_4$, $x_{C3} = x_p + r_3 \cos(\beta_3 + \varphi)$, $y_{C3} = y_p + r_3 \sin(\beta_3 + \varphi)$, $x_{B4} = h_4 \cos \alpha_4 + d_4 \cos \lambda_4 + a_4 \cos \theta_4$, $y_{B4} = h_4 \sin \alpha_4 + d_4 \sin \lambda_4 - a_4 \sin \theta_4$ 。

式(10)、(12)说明 d_3 、 d_4 两个变量在等式中同时存在。只有将 d_3 、 d_4 中的一个设为定值时, 另一个变量才能有确定的解, 这也体现出该机构中存在冗余支链。为了使两个变量取得确定的值, 将 d_4 视为冗余支链参数。首先赋予 d_4 一个值, 将其视为常量, 再通过式(10)、(12)求解 d_3 。解得

$$d_3 = \pm \sqrt{g} - h_3 \cos \rho + x_{B3} \cos \lambda_3 + y_{B3} \sin \lambda_3 \quad (13)$$

式中, $g = \dot{p}^2 - \dot{h}^2 - \dot{b}^2 - \dot{x}_s^2 - \dot{y}_s^2 + \dot{p}^2 + 2h_3 y_{B3} \sin \alpha_3 + (x_{B3} \cos \lambda_3 + y_{B3} \sin \lambda_3 - h_3 \cos \rho)$, $\rho = \alpha_3 - \lambda_3$ 。

式(13)说明当机构动平台的位姿固定时, 通常情况下 d_3 有两个解。另外, d_3 的表达式中包含中间变量 θ_4 , 式(10)表明 θ_4 通常有两个解, 故当机构动平台的位姿固定时, 通常情况下 d_3 有四个解。式(5)、(10)、(13)得到了在动平台位姿参数 x_p 、 y_p 、 φ , 以

及冗余支链参数 d_4 已知的条件下输入参数 θ_1 、 θ_2 、 d_3 的表达式。由于 θ_1 、 θ_2 、 d_3 以及 d_3 中包含的 θ_4 在通常情况下都有两个解, 故机构的一个动平台位姿对应了 16 种不同的装配模式。

机构的冗余支链参数 d_4 可视为可调节的结构参数。机构正常工作时 d_4 不变, 当 d_4 改变时, 机构的构型发生变化, 使得机构的工作空间和奇异位置同时发生改变。利用该特性, 在机构的工作过程中适当调整 d_4 , 可以实现扩大工作空间和规避奇异的功能。

2.2 机构正运动学分析

机构的运动学正解是指已知机构的输入参数, 求解输出参数, 即已知 θ_1 、 θ_2 、 d_3 、 d_4 , 求解动平台位姿参数 x_p 、 y_p 、 φ 。

式(3)可表示为

$$f_i(x_p, y_p, \varphi, \theta_i) = 0 \quad i = 1, 2 \quad (14)$$

式(12)可表示为

$$f_3(x_p, y_p, \varphi, d_3, d_4) = 0 \quad (15)$$

式(14)、(15)为开环支链 $A_1B_1C_1$ 、 $A_2B_2C_2$ 和闭环支链 $A_3B_3C_3B_4A_4A_3$ 的输入参数与输出参数之间的函数关系式, 其中 x_p 、 y_p 、 φ 为变量, θ_1 、 θ_2 、 d_3 、 d_4 为输入量。式(14)、(15)组成非线性方程组, 解之可得机构的运动学正解。注意到闭环支链的输入输出关系式中, 中间变量 θ_4 为反三角函数, 使得式(15)成为超越方程, 导致该机构很难求得正解的解析表达式。故可以使用牛顿迭代法求解运动学正解的数值解。给定机构的结构参数尺寸如表 1 所示, 设定冗余支链参数 $d_4 = 100 \text{ mm}$, 取机构 6 组输入参数计算对应的动平台位姿参数, 得到结果如表 2 所示。其中, 输入参数表示为 $(\theta_1$ 、 θ_2 、 d_3) , 位姿参数表示为 $(x_p$ 、 y_p 、 φ)。

表 1 机构的结构参数尺寸

结构参数	尺寸/mm	结构参数	尺寸/rad
a_1, a_2	302	α_1	$7\pi/6$
a_3, a_4	402	α_2	$11\pi/6$
b_1, b_2	250	α_3	1.027 5
b_3, b_4	100	α_4	2.114 1
r_1, r_2, r_3	140	β_1	$7\pi/6$
L_1	670	β_2	$11\pi/6$
L_2	600	β_3	$\pi/2$
h_1, h_2	346.41	λ_3	0
h_3, h_4	580.35	λ_4	0

表 2 机构的运动学正解

输入参数	位姿参数
(1.493 5, 1.551 7, 72.707 7)	(15, 15, 0)
(1.589 9, 1.648 1, 47.233 0)	(-15, 15, 0)
(1.318 4, 1.372 4, 38.423 8)	(20, 15, $\pi/12$)
(1.286 7, 1.607 6, -68.021 0)	(-20, -15, $\pi/12$)
(1.200 2, 1.208 1, 18.954 9)	(30, 30, $\pi/6$)
(1.343 8, 1.435 2, -38.259 7)	(-30, 30, $\pi/6$)

3 误差建模

含闭环支链的平面结构冗余并联机构的误差来源复杂, 主要包括驱动输入误差、结构参数误差(驱动副安装位置误差、杆长误差、动平台尺寸误差)、转动副和移动副存在间隙造成的间隙误差、机构构件由于各种因素产生柔性变形造成的柔性误差等。下面将重点分析驱动输入误差、结构参数误差对机构误差敏感度的影响。

本节将使用矩阵法^[15]对该平面结构冗余并联机构进误差建模。其基本思路是: 通过对机构三条支链的输入输出关系式全微分, 建立动平台位姿误差与误差参数的线性关系式。这种方法考虑了输入参数误差和结构参数误差对位姿误差的影响^[18]。

在第 2.1 节中, 对两条开环支链 $A_1B_1C_1$ 、 $A_2B_2C_2$ 应用矢量链方法建立矢量方程, 得到了两支链的输入输出关系式(3)。对闭环支链 $A_3B_3C_3B_4A_4A_3$ 应用矢量链与几何特征相结合的方法, 得到了闭环支链的输入输出关系式(12)。下面基于上述三个关系式进行误差建模。

式(3)可表示为

$$f_i(x_p, y_p, \varphi, \theta_i, h_i, \alpha_i, a_i, b_i, r_i, \beta_i) = 0 \quad i = 1, 2 \quad (16)$$

式中, h_i 、 α_i 、 a_i 、 b_i 、 r_i 、 β_i 为机构的结构参数, θ_i 为机构的输入参数, x_p 、 y_p 、 φ 为机构的输出参数。

对式(16)全微分, 可以得到

$$A_{oi} \delta \mathbf{O} = A_{ei} \delta \mathbf{d}_i \quad (17)$$

式中, $A_{oi} = \left(-\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad -\frac{\partial f_i}{\partial y_i} \quad -\frac{\partial f_i}{\partial \varphi_i} \right)$, $\delta \mathbf{O} = (\delta x \quad \delta y \quad \delta \varphi)^T$,

$A_{ei} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_i} \quad \frac{\partial f_i}{\partial h_i} \quad \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_i} \quad \frac{\partial f_i}{\partial a_i} \quad \frac{\partial f_i}{\partial b_i} \quad \frac{\partial f_i}{\partial r_i} \quad \frac{\partial f_i}{\partial \beta_i} \right)$, $\delta \mathbf{d}_i = (\delta \theta_i$

$\delta h_i \quad \delta \alpha_i \quad \delta a_i \quad \delta b_i \quad \delta r_i \quad \delta \beta_i)^T$, $\delta \mathbf{O}$ 为动平台位姿误差, $\delta \theta_i$ 为输入误差, δh_i 、 $\delta \alpha_i$ 、 δa_i 、 δb_i 、 δr_i 、 $\delta \beta_i$ 为结构参数误差, 支链 $A_1B_1C_1$ 、 $A_2B_2C_2$ 各误差的表达如图 3 所示。

图3 支链 $A_1B_1C_1$ 、 $A_2B_2C_2$ 的误差

式(12)可表示为

$$f_3(x_p, y_p, \varphi, d_3, h_3, h_4, \alpha_3, \alpha_4, a_3, a_4, b_3, b_4, r_3, \beta_3, \lambda_3, \lambda_4, d_4) = 0 \quad (18)$$

式中, h_3 、 h_4 、 a_3 、 a_4 、 a_3 、 a_4 、 b_3 、 b_4 、 r_3 、 β_3 、 λ_3 、 λ_4 为机构的结构参数, d_3 、 d_4 为机构的输入参数, x_p 、 y_p 、 φ 为机构的输出参数。

对式(18)全微分, 可以得到

$$\mathbf{A}_{O3} \delta \mathbf{O} = \mathbf{A}_{e3} \delta \mathbf{d}_3 \quad (19)$$

式中, $\mathbf{A}_{O3} = \left(-\frac{\partial f_3}{\partial x_3} \quad -\frac{\partial f_3}{\partial y_3} \quad -\frac{\partial f_3}{\partial \varphi_3} \right)$, $\delta \mathbf{O} = (\delta x \quad \delta y \quad \delta \varphi)^T$,

$$\mathbf{A}_{e3} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial d_3} \quad \frac{\partial f_3}{\partial h_3} \quad \frac{\partial f_3}{\partial h_4} \quad \frac{\partial f_3}{\partial \alpha_3} \quad \frac{\partial f_3}{\partial \alpha_4} \quad \frac{\partial f_3}{\partial a_3} \quad \frac{\partial f_3}{\partial a_4} \quad \frac{\partial f_3}{\partial b_3} \quad \frac{\partial f_3}{\partial b_4} \right)$$

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial r_3} \quad \frac{\partial f_3}{\partial \beta_3} \quad \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_3} \quad \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_4} \quad \frac{\partial f_3}{\partial d_4} \right), \quad \delta \mathbf{d}_3 = (\delta d_3 \quad \delta h_3 \quad \delta h_4 \quad \delta \alpha_3$$

$\delta \alpha_4 \quad \delta a_3 \quad \delta a_4 \quad \delta b_3 \quad \delta b_4 \quad \delta r_3 \quad \delta \beta_3 \quad \delta \lambda_3 \quad \delta \lambda_4 \quad \delta d_4)^T$, $\delta \mathbf{O}$ 为动平台位姿误差, δd_3 、 δd_4 为输入误差, δh_3 、 δh_4 、 $\delta \alpha_3$ 、 $\delta \alpha_4$ 、 δa_3 、 δa_4 、 δb_3 、 δb_4 、 δr_3 、 $\delta \beta_3$ 、 $\delta \lambda_3$ 、 $\delta \lambda_4$ 为结构参数误差。闭环支链 $A_3B_3C_3B_4A_4A_3$ 各误差的表达如图4所示。

组合式(17)、(19), 得

$$\mathbf{A}_O \delta \mathbf{O} = \mathbf{A}_e \delta \mathbf{d} \quad (20)$$

$$\mathbf{A}_O = (\mathbf{A}_{O1}^T \quad \mathbf{A}_{O2}^T \quad \mathbf{A}_{O3}^T)^T$$

$$\mathbf{A}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{e1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{e2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{e3} \end{pmatrix}$$

$$\delta \mathbf{d} = (\delta \mathbf{d}_1^T \quad \delta \mathbf{d}_2^T \quad \delta \mathbf{d}_3^T)^T$$

式(20)可改写为

$$\mathbf{A}_O \delta \mathbf{O} = \mathbf{A}_I \delta \mathbf{I} + \mathbf{A}_S \delta \mathbf{S} \quad (21)$$

$$\text{式中, } \mathbf{A}_I = \begin{pmatrix} e\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & e\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & ed_3 \end{pmatrix}, \quad \delta \mathbf{I} = (\delta \theta_1 \quad \delta \theta_2 \quad \delta d_3)^T.$$

图4 支链 $A_3B_3C_3B_4A_4A_3$ 的误差

将冗余支链参数 d_4 视为结构参数, $\delta \mathbf{S}$ 是机构的结构参数误差, $\mathbf{A}_s$ 是结构参数误差对应的系数矩阵。值得注意的是, $\mathbf{J} = \mathbf{A}_I^{-1} \mathbf{A}_O$ 是机构的速度雅可比矩阵。当 $|\mathbf{A}_I| = 0$ 时, 机构发生第一类奇异, 又称边界奇异, 此时机构动平台位于工作空间的边界处, 因丢失了自由度而无法正常工作。当 $|\mathbf{A}_O| = 0$ 时, 机构发生第二类奇异, 此时机构获得了多余的自由度, 动平台在所有驱动副均锁死的情况下仍能运动。第二类奇异往往发生在并联机构工作空间的内部, 将工作空间划分为两块不连通的区域, 降低机构的工作性能^[19]。

由式(20), 可以得到

$$\delta \mathbf{O} = \mathbf{J}_e \delta \mathbf{d} \quad (22)$$

$$\mathbf{J}_e = \mathbf{A}_O^{-1} \mathbf{A}_e$$

式中, $\mathbf{A}_O^{-1} = \frac{\mathbf{A}_{oa}}{|\mathbf{A}_O|}$ 。

$\mathbf{A}_{oa}$ 是矩阵 $\mathbf{A}_O$ 的伴随矩阵, 将其写为

$$\mathbf{A}_{oa} = \begin{pmatrix} a_{x1} & a_{x2} & a_{x3} \\ a_{y1} & a_{y2} & a_{y3} \\ a_{\varphi1} & a_{\varphi2} & a_{\varphi3} \end{pmatrix} \quad (23)$$

令 $k = 1/|\mathbf{A}_O|$, 则有

$$\mathbf{J}_e = \begin{pmatrix} ka_{x1} \mathbf{A}_{e1} & ka_{x2} \mathbf{A}_{e2} & ka_{x3} \mathbf{A}_{e3} \\ ka_{y1} \mathbf{A}_{e1} & ka_{y2} \mathbf{A}_{e2} & ka_{y3} \mathbf{A}_{e3} \\ ka_{\varphi1} \mathbf{A}_{e1} & ka_{\varphi2} \mathbf{A}_{e2} & ka_{\varphi3} \mathbf{A}_{e3} \end{pmatrix} \quad (24)$$

$\mathbf{J}_e$ 为误差雅可比矩阵, 它反映了机构动平台位姿误差与输入参数误差、结构参数误差之间的映射关系。

4 误差模型验证

通过矩阵法得到的误差模型是对实际的复杂误差传递关系使用微分方法得到的一种线性近似, 这

种近似关系在误差较小的情况下成立。误差模型应能较好地反映实际的误差传递关系。后续的分析研究依托于正确的误差模型,因此有必要对得到的误差模型的正确性进行验证。

验证误差模型最直接的方法是开展试验,但试验过程较复杂,同时需要精确的测量仪器。一种简易的方法是同时利用机构的运动学反解和运动学正解对误差模型进行验证^[20]。

第 2.1 节中已经得到了机构的运动学反解。一组动平台位姿对应了 16 组不同的反解,即可能有 16 种不同的装配模式。一种装配模式对应唯一一组反解,下面以图 1 所示的机构装配模式为例进行误差模型的验证。

在不考虑机构误差的条件下,给定机构的结构参数和冗余支链参数,在一种装配模式下,一组机构动平台的位姿参数(x_p, y_p, φ)对应唯一一组输入参数($\theta_1, \theta_2, d_3, d_4$)。运用通过反解得到的输入参数进行机构运动学正解的计算,可以得到与上述动平台位姿对应的一组位姿参数,两者是完全相同的。当引入机构误差后,机构的输入参数和结构参数均发生变化,使用变化后的参数计算机构新的运动学正解,得到在原动平台位姿附近的一组新的动平台位姿参数,将新的位姿参数与原位姿参数作差,得到误差扰动下机构的位姿误差。若使用误差模型计算得到的位姿误差与基于运动学反解和正解得到的位姿误差差距很小,说明误差模型能较好地反应误差的传递关系。

误差模型正确性验证的具体过程如下。

(1) 给定机构的名义结构参数和名义冗余支链参数 S 。

(2) 给定一组机构动平台名义位姿 $P_n = (x_{pn}, y_{pn}, \varphi_n)$ 。

(3) 通过式(5)、式(10)、式(13)求解出机构的名义非冗余输入参数 $I_n = (\theta_{1n}, \theta_{2n}, d_{3n})$ 。

(4) 引入输入参数误差和结构参数误差,改写

式(3)、式(12),得到非线性方程组

$$\begin{cases} f_1(P_e, \theta_{1n} + \delta\theta_1, S_1 + \delta S_1) = 0 \\ f_2(P_e, \theta_{2n} + \delta\theta_2, S_2 + \delta S_2) = 0 \\ f_3(P_e, d_{3n} + \delta d_3, S_3 + \delta S_3) = 0 \end{cases} \quad (25)$$

式中, $P_e = (x_{pe}, y_{pe}, \varphi_e)$, 表示引入误差后动平台的实际位姿。 $\delta\theta_1, \delta\theta_2, \delta d_3$ 为非冗余输入参数误差, S_1, S_2, S_3 为各支链的名义结构参数和名义冗余支链参数, $\delta S_1, \delta S_2, \delta S_3$ 为各支链的结构参数误差和冗余支链参数误差。

(5) 将引入误差的输入参数和结构参数作为实际输入参数和实际结构参数,求解式(25),得到一组在动平台名义位姿附近的实际位姿 P_e 。

(6) 得到基于运动学反解和正解的机构位姿误差 $\delta O_a = P_e - P_n$, 式中, $\delta O_a = (\delta x_a, \delta y_a, \delta \varphi_a)$, $\delta x_a = x_{pe} - x_{pn}, \delta y_a = y_{pe} - y_{pn}, \delta \varphi_a = \varphi_{pe} - \varphi_{pn}$ 。

(7) 通过式(22)计算基于误差模型的动平台位姿误差 $\delta O_m = (\delta x_m, \delta y_m, \delta \varphi_m)$ 。

(8) 定义评价使用两种方法得到的动平台位姿误差相似程度的指标: 相对误差 re_x, re_y, re_φ , 其

$$\begin{aligned} \text{中, } re_x &= \frac{|\delta x_m - \delta x_a|}{\delta x_a} \times 100\%, \quad re_y = \frac{|\delta y_m - \delta y_a|}{\delta y_a} \times 100\%, \\ re_\varphi &= \frac{|\delta \varphi_m - \delta \varphi_a|}{\delta \varphi_a} \times 100\%。 \end{aligned}$$

如果相对误差足够小,说明误差模型较好地反映了实际的误差传递关系,则验证了其正确性。下面对第 3 节得到的误差模型的正确性进行验证。机构的结构参数尺寸如表 1 所示,将所有的长度误差赋值为 0.2 mm,将所有的角度误差赋值为 0.02 rad,设定冗余支链参数的尺寸 $d_4 = 100$ mm,取表 2 中机构动平台在工作空间内的 6 个位姿,使用两种方法进行位姿误差计算,得到的结果如表 3 所示。

表 3 说明,机构动平台用于验证的六个位姿中,相对误差最大为 3.37%,最小为 0,六个位姿的姿态误差的相对误差在保留 4 位小数的情况下为 0。

表 3 相对误差

动平台位姿 (x_p / mm, y_p / mm, φ / rad)	基于反解、正解的位姿误差			基于误差模型的位姿误差			相对误差		
	δx_p / mm	δy_p / mm	$\delta \varphi_p$ / rad	δx_m / mm	δy_m / mm	$\delta \varphi_m$ / rad	re_x (%)	re_y (%)	re_φ (%)
(15, 15, 0)	-0.527 7	0.213 6	0.001 2	-0.527 3	0.220 8	0.001 2	0.08	3.37	0
(-15, 15, 0)	-0.481 3	-0.384 4	0.000 9	-0.486 3	-0.377 9	0.000 9	1.04	1.69	0
(20, 15, $\pi/12$)	-0.508 9	-0.360 5	0.000 8	-0.506 3	-0.367 7	0.000 8	0.51	2.00	0
(-20, -15, $\pi/12$)	-0.235 9	-0.360 9	0.001 9	-0.243 3	-0.352 7	0.001 9	3.14	2.27	0
(30, 30, $\pi/6$)	-0.739 2	0.543 3	0.000 3	-0.734 4	0.552 2	0.000 3	0.65	1.64	0
(-30, 30, $\pi/6$)	-0.749 5	-0.661 8	0.000 1	-0.742 3	-0.652 9	0.000 1	0.62	1.36	0

上述结果表明，基于矩阵法得到的误差模型较好地反映了实际的误差传递关系。两种方法得到的位姿误差不完全相同，一方面是由于基于矩阵法得到的误差模型是实际误差传递关系的线性近似，本身即存在误差，另一方面由于软件的计算精度也会产生一定误差。

5 误差敏感度分析

第 3 节中已经得到了机构的误差模型，它反映了机构的输入参数误差和结构参数误差与位姿误差间的传递关系。式(22)中， $\mathbf{J}_e$ 为误差雅可比矩阵，又称灵敏度雅可比矩阵^[21]，由机构各误差项对应的系数组成，将这些系数称为灵敏系数。由于机构中同时存在长度误差和角度误差，灵敏系数存在多个不同量纲，需要将灵敏系数按照量纲不同进行分类，对各类灵敏系数进行误差敏感度分析。

将式(22)改写为

$$\delta \mathbf{O} = \mathbf{J}_n \delta \mathbf{d}_n \quad (26)$$

式中， $\delta \mathbf{O} = (\delta \mathbf{P} \ \delta \varphi)^T$ ， $\mathbf{J}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{lp} & \mathbf{J}_{ap} \\ \mathbf{J}_{lo} & \mathbf{J}_{ao} \end{pmatrix}$ ，

$\delta \mathbf{d}_n = (\delta \mathbf{d}_l \ \delta \mathbf{d}_a)^T$ ， $\delta \mathbf{P} = (\delta x \ \delta y)$ ， $\delta \mathbf{d}_l = (\delta h_1 \ \delta a_1 \ \delta b_1 \ \delta r_1 \ \delta h_2 \ \delta a_2 \ \delta b_2 \ \delta r_2 \ \delta d_3 \ \delta h_3 \ \delta a_3 \ \delta b_3 \ \delta d_4)$ ， $\delta \mathbf{d}_a = (\delta \theta_1 \ \delta \alpha_1 \ \delta \beta_1 \ \delta \theta_2 \ \delta \alpha_2 \ \delta \beta_2 \ \delta \alpha_3 \ \delta \alpha_4 \ \delta \beta_3 \ \delta \lambda_3 \ \delta \lambda_4)$ ， $\mathbf{J}_n$ 是按长度误差和角度误差分类重排后的各误差相对应的灵敏系数矩阵，按照量纲分为四部分。 $\mathbf{J}_{lp}$ 、 $\mathbf{J}_{ap}$ 分别反映长度误差、角度误差与动平台位置误差之间的传递关系， $\mathbf{J}_{lo}$ 、 $\mathbf{J}_{ao}$ 分别反映长度误差、角度误差与动平台姿态误差之间的传递关系。

定义评价误差敏感度的指标^[22]

$$S_{lp} = \frac{\|\mathbf{J}_{lp}\|_2}{n_{dl}} \quad (27)$$

$\|\mathbf{J}_{lp}\|_2$ 是矩阵 $\mathbf{J}_{lp}$ 的二范数，也是矩阵 $\mathbf{J}_{lp}$ 的最大奇异值， n_{dl} 是长度误差的个数，这里为 17。 S_{lp} 反映了动平台位置误差对长度误差的敏感程度，无量纲。 S_{lp} 越大，敏感程度越大。

类似地，定义其他误差敏感度指标

$$S_{ap} = \frac{\|\mathbf{J}_{ap}\|_2}{n_{da}} \quad S_{lo} = \frac{\|\mathbf{J}_{lo}\|_2}{n_{dl}} \quad S_{ao} = \frac{\|\mathbf{J}_{ao}\|_2}{n_{da}}$$

式中， n_{da} 是角度误差的个数，这里为 11。 S_{ap} 、 S_{lo} 的量纲分别为 mm/rad、rad/mm， S_{ao} 无量纲。 S_{ap} 反映了动平台位置误差对角度误差的敏感程度， S_{lo} 、 S_{ao} 分别反映了动平台姿态误差对长度误差、

角度误差的敏感程度。

评价机构误差敏感度的四个指标与机构动平台的位置和姿态有关。设定机构工作状态下的姿态角恒为 0°，其初始冗余支链参数尺寸 $d_4 = 100$ mm，使用离散边界搜索算法^[23]得到机构的工作空间。通过式(21)得到机构的速度雅可比矩阵 $\mathbf{J} = \mathbf{A}_l^{-1} \mathbf{A}_o$ ，令 $|\mathbf{A}_l| = 0$ ，绘制机构的边界奇异曲线，其与机构的工作空间边界重合。令 $|\mathbf{A}_o| = 0$ ，绘制机构的内部奇异曲线，其将机构的工作空间分割成了三部分：A 区、B 区、C 区。机构的工作空间和奇异曲线如图 5 所示。C 区由于面积过小，在实际工作中没有意义，故之后的分析中只考察机构在 A 区、B 区中误差敏感度的变化。

图 5 $d_4=100$ 时的工作空间

在姿态固定的条件下，机构的误差敏感度随着位置的变化而变化。计算机构在工作空间中不同位置的 S_{lp} 、 S_{ap} 、 S_{lo} 、 S_{ao} ，分别绘制四项指标在工作空间中的等值线，得到等值线图如图 6 所示。

图 6 表明， S_{lp} 、 S_{ap} 在工作空间中的等值线呈现相似的变化规律，即位置误差对长度误差和角度误差的敏感程度在工作空间中显示出相似的变化规律，机构越靠近内部奇异曲线，敏感程度越高； S_{lo} 、 S_{ao} 在工作空间中的等值线呈现相似的变化规律，即姿态误差对长度误差和角度误差的敏感程度在工作空间中显示出相似的变化规律，机构越靠近内部奇异曲线，敏感程度越高。综合分析全部误差敏感度指标，发现奇异位形对误差敏感度的影响很大。值得注意的是，机构在靠近内部奇异曲线时，已经呈现出误差敏感度逐渐升高的规律，这表明，机构并不是在到达奇异曲线时精度才降低，而是在到达奇异曲线周围形成的一片区域中精度已经大幅降低，使得机构工作性能降低。因此，机构在工作时，要远离内部奇异曲线。

图6 $d_4=100$ mm 时机构误差敏感度指标等值线图

内部奇异将机构的工作空间分割成了多个部分,传统的平面并联机构在安装完成后动平台无法跨越内部奇异,从而使机构的工作空间无法得到充分利用。所研究的结构冗余平面并联机构可以通过调节结构冗余支链实现机构在不停机状态下工作空间区域的切换,然而,机构在不同区域内的误差敏感度不同,在选择初始工作区域时仍然需要十分注意。

基于评价机构误差敏感度的四个指标 S_{ip} 、 S_{ap} 、 S_{lo} 、 S_{ao} 定义该机构的低误差敏感性工作空间,简称低敏空间

$$\begin{cases} S_{ip} \leq 0.2 \\ S_{ap} \leq 70 \\ S_{lo} \leq 0.001 \\ S_{ao} \leq 0.4 \end{cases} \quad (28)$$

称机构工作空间中符合式(28)的区域为低敏空间。冗余支链参数尺寸 $d_4=100$ mm 时,机构的低敏空间如图7所示。

图7 $d_4=100$ mm 时的低敏空间

值得注意的是,该机构通过调节冗余支链可以实现工作空间和奇异位置的改变,从而使得机构的低敏空间发生改变。给定6个冗余支链参数,绘制不同冗余支链参数下机构奇异位置和低敏空间在工作空间中的分布图,结果如图8所示。不同冗余支链参数下机构低敏空间在工作空间中的占比如表4所示。其中, $A-A$ 、 $A-W$ 分别表示 A 区低敏空间在 A 区、全区的占比, $B-B$ 、 $B-W$ 分别表示 B 区低敏空间在 B 区、全区的占比。

图 8 不同 d_4 下的低敏空间

表 4 不同冗余支链尺寸下低敏空间占比 (%)

d_4/mm	A-A	A-W	B-B	B-W
100	37.2	20.7	23.9	9.0
130	39.4	22.1	22.8	8.4
160	40.7	23.0	22.4	8.0
190	42.5	24.1	21.8	7.6
220	43.7	24.7	21.2	7.1
250	44.5	24.9	20.4	6.6

随着冗余支链尺寸 d_4 的增大, A 区低敏空间在 A 区、全区的占比均不断增大, B 区低敏空间在 B 区、全区的占比则均不断减小。在冗余支链的变化过程中, A 区低敏空间的面积恒比 B 区低敏空间大。因此, 该机构在 A 区的工作性能较好, 初始工作区域应尽量设置在 A 区。机构在 B 区工作时, 应注意远离内部奇异位置。

图 8 表明冗余支链参数尺寸的改变导致机构工作空间和奇异位置发生了变化, 其低敏空间也随之发生变化。因此, 机构在工作的过程中适当调节冗余支链, 可以扩展机构的低敏空间, 降低机构对误差的敏感程度。

以调节冗余支链参数尺寸 $d_4 = 100 \sim 250 \text{ mm}$ 为例说明机构低敏空间的扩展过程。设定机构工作状

态下的姿态角恒为 0° , 调节冗余支链参数尺寸至 $d_4 = 250 \text{ mm}$, 详细绘制此时机构的工作空间、奇异曲线和低敏空间, 如图 9 所示。

图 9 $d_4 = 250$ 时的低敏空间

当 $d_4 = 100 \text{ mm}$ 时, 动平台移动至两种构型下的工作空间和低敏空间同时重合的区域, 之后将 d_4 调节至 250 mm , 机构获得了新的低敏空间, 实现低敏空间的扩展。该过程的示意如图 10 所示, 其中, 黑色部分和黑色虚线分别为 $d_4 = 100 \text{ mm}$ 时的低敏空间和奇异曲线, 灰色部分和灰色实线分别为 $d_4 = 250 \text{ mm}$ 时的低敏空间和奇异曲线。

图 10 低敏空间的扩展

上述误差敏感度分析方法可应用于其他平面并联机构中。首先表示出平面并联机构各个支链的输入输出关系式, 基于矩阵法得到机构的误差模型, 基于误差模型计算各误差敏感度指标, 绘制各误差敏感度指标在工作空间中的等值线图, 基于误差敏感度指标绘制低误差敏感性工作空间, 可直观展示机构对误差敏感的区域和对误差不敏感的区域。机构应避免在对误差高度敏感的区域中工作。

6 与平面 3-RRR 并联机构的对比

本文所研究的结构冗余并联机构, 可以看作是将传统平面 3-RRR 并联机构的一条支链置换为含冗

余支链的闭环支链组成。基于第5节得到的误差敏感度评价指标,对两种机构的误差敏感度进行比较。

将本机构的闭环支链置换成与开环支链 $A_1B_1C_1$ 、 $A_2B_2C_2$ 相同的支链,旋转驱动副 A_3 位于 A_1A_2 的中垂线与原移动副所在直线的交点, $A_1A_2A_3$ 组成等腰三角形。3-RRR 机构的装配模式如图 11 所示,结构参数尺寸如表 5 所示。支链 $A_1B_1C_1$ 、 $A_2B_2C_2$ 、 $A_3B_3C_3$ 各误差的表达如图 3 所示。

图 11 平面 3-RRR 并联机构示意图

表 5 3-RRR 机构的结构参数尺寸

结构参数	尺寸/mm	结构参数	尺寸/rad
a_1, a_2, a_3	302	α_1	$7\pi/6$
b_1, b_2, b_3	250	α_2	$11\pi/6$
r_1, r_2, r_3	140	α_3	$\pi/2$
L_1	670	β_1	$7\pi/6$
L_2	600	β_2	$11\pi/6$
h_1, h_2	346.41	β_3	$\pi/2$
h_3	496.80		

对三条开环支链 $A_1B_1C_1$ 、 $A_2B_2C_2$ 、 $A_3B_3C_3$, 建立矢量方程得到

$$\mathbf{OA}_i + \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{C}_i + \mathbf{C}_i\mathbf{P} = \mathbf{OP} \quad i=1,2,3 \quad (29)$$

整理得

$$(x_p - h_i \cos \alpha_i - a_i \cos \theta_i + r_i \cos \gamma_i)^2 + (y_p - h_i \sin \alpha_i - a_i \sin \theta_i + r_i \sin \gamma_i)^2 - b_i^2 = 0 \quad (30)$$

式中, $\gamma_i = \beta_i + \varphi$, α_i 为固定坐标系的 x 轴与 OA_i 顺时针方向的夹角, β_i 为动坐标系的 u 轴与 PC_i 顺时针方向的夹角。

将式(30)全微分并整理, 得

$$\delta \mathbf{O} = \mathbf{J}_n \delta \mathbf{d}_n \quad (31)$$

式中, $\delta \mathbf{O} = (\delta P \quad \delta \varphi)^T$, $\mathbf{J}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{lp} & \mathbf{J}_{ap} \\ \mathbf{J}_{lo} & \mathbf{J}_{ao} \end{pmatrix}$,

$\delta \mathbf{d}_n = (\delta d_l \quad \delta d_a)^T$, $\delta \mathbf{P} = (\delta x \quad \delta y)$, $\delta d_l = (\delta h_1 \quad \delta a_1 \quad \delta b_1 \quad \delta r_1 \quad \delta h_2 \quad \delta a_2 \quad \delta b_2 \quad \delta r_2 \quad \delta h_3 \quad \delta a_3 \quad \delta b_3 \quad \delta r_3)$, $\delta d_a = (\delta \theta_1 \quad \delta \alpha_1$

$\delta \beta_1 \quad \delta \theta_2 \quad \delta \alpha_2 \quad \delta \beta_2 \quad \delta \theta_3 \quad \delta \alpha_3 \quad \delta \beta_3)$ 。

误差敏感度指标 S_{lp} 、 S_{ap} 、 S_{lo} 、 S_{ao} 参照第 5 节的定义, 其中 $n_{dl}=12$, $n_{da}=9$ 。

设定 3-RRR 机构工作状态下的姿态角恒为 0° , 绘制 3-RRR 机构的工作空间和奇异曲线如图 12 所示。

图 12 3-RRR 机构工作空间

内部奇异曲线将机构的工作空间分割成了四部分: A 区、B 区、C 区、D 区。忽略在实际工作中无意义的 C 区、D 区, 考察机构在 A 区、B 区中误差敏感度的变化。

3-RRR 机构 S_{lp} 、 S_{lo} 的等值线图如图 13、14 所示。 S_{ap} 的等值线变化规律与 S_{lp} 相似, S_{ao} 的等值线变化规律与 S_{lo} 相似。

图 13 3-RRR 机构的 S_{lp}

3-RRR 机构的误差敏感度与结构冗余机构呈现相似的规律, 即机构越靠近内部奇异位置, 其对误差的敏感程度越大。沿用式(28)的定义, 得到 3-RRR 机构的低敏空间如图 15 所示。

图 14 3-RRR 机构的 S_{lo}

图 15 3-RRR 机构的低敏空间

3-RRR 机构 A 区低敏空间在 A 区的空间占比为 32.6%，在整个工作空间中的空间占比为 13.2%。B 区低敏空间在 B 区的空间占比为 1.2%，在整个工作空间中的空间占比为 0.7%。因此，3-RRR 机构在 A 区的工作性能较好。

所研究的含闭环支链的平面结构冗余并联机构虽然引入冗余支链后机构的杆件数有所增多，但并未对机构的误差敏感度造成过大影响，与结构相似的 3-RRR 机构相比，在同等的评价体系下，结构冗余平面并联机构的低误差敏感性工作空间的空间占比更大，同时，冗余支链的引入使得机构可以通过调节冗余支链而扩展低误差敏感性工作空间，体现了结构冗余的优越性。

对于传统的平面并联机构而言，其误差敏感度指标在工作空间中的分布是固定的，基于误差敏感度指标得到的低敏空间也是固定的。值得注意的是，误差敏感度指标与机构连接杆的杆长、动平台尺寸、驱动副安装位置有关，因此可以以扩大机构低敏空间为目标，合理设计机构参数，从而降低输入误差和结构参数误差对机构精度的影响，提高机构的精

度。这种提高精度的方法也可应用于结构冗余平面并联机构中，使得机构在初始设计时即可降低误差敏感性，在工作时则可以通过调节冗余支链扩展低敏空间，从而进一步增加机构的工作精度。

7 结论

针对一种含闭环支链的平面结构冗余并联机构进行误差敏感度分析。

(1) 对该机构进行了逆运动学和正运动学分析，并以此为基础，基于矩阵法得到了机构的误差模型。使用反解、正解结合的方法对误差模型进行了验证，结果表明，基于矩阵法得到的误差模型较好反映了真实的误差传递关系。

(2) 基于误差模型得到评价该机构误差敏感度的指标，绘制了各指标在工作空间中的等值线，结果表明，机构越接近内部奇异，其对误差的敏感度越大。基于指标定义了该机构的低误差敏感性工作空间，结构冗余机构可以通过调节其冗余支链扩展低误差敏感性工作空间。

(3) 对与所研究机构具有相似结构特征的传统平面 3-RRR 并联机构进行了误差敏感度分析，与 3-RRR 机构相比，所研究机构不仅低误差敏感性工作空间的空间占比更大，而且可以通过调节冗余支链使机构在大范围空间中保持低误差敏感性，结果表明，引入结构冗余不仅可以扩大工作空间和规避奇异，也可以降低机构对误差的敏感性。

参 考 文 献

- [1] 张英, 魏世民, 李端玲, 等. 平面并联机构正运动学分析的几何建模和免消元计算[J]. 机械工程学报, 2018, 54(19): 27-33.
ZHANG Ying, WEI Shimin, LI Duanling, et al. Geometric modeling and free-elimination computing method for the forward kinematics analysis of planar parallel manipulators[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(19): 27-33.
- [2] LI Q, XIANG J, CHAI X, et al. Singularity analysis of a 3-RPS parallel manipulator using geometric algebra[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2015, 28(6): 1204-1212.
- [3] GOSSELIN C, SCHREIBER L. Redundancy in parallel mechanisms: A review[J]. Applied Mechanics Reviews, 2018, 70(1): 10802.
- [4] QU H, GUO S, ZHANG Y. A novel relative degree-

- of-freedom criterion for a class of parallel manipulators with kinematic redundancy and its applications[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2016, 231(22): 4227-4240.
- [5] ZHAN Z, ZHANG X, ZHANG H, et al. Unified motion reliability analysis and comparison study of planar parallel manipulators with interval joint clearance variables[J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 138: 58-75.
- [6] DING J, LYU S, DA T, et al. Error space estimation of three degrees of freedom planar parallel mechanisms[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2019, 11(3): 1-16.
- [7] 姚蕊, 李庆伟, 孙京海, 等. FAST 望远镜馈源舱精度分析研究[J]. 机械工程学报, 2017, 53(17): 36-42.
- YAO Rui, LI Qingwei, SUN Jinghai, et al. Accuracy analysis on focus cabin of FAST[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(17): 36-42.
- [8] 王娜, 张涛, 王秋红. 3UPS-PU 并联机构的运动学误差建模与验证[J]. 机械传动, 2020, 44(7): 113-118.
- WANG Na, ZHANG Tao, WANG Qiuhong. Modeling and verification of kinematics error of 3UPS-PU parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2020, 44(7): 113-118.
- [9] CHEN Y, XIE F, LIU X, et al. Error modeling and sensitivity analysis of a parallel robot with SCARA (selective compliance assembly robot arm) Motions[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2014, 27(04): 693-702.
- [10] 谢福贵, 刘辛军, 陈禹臻. 一种新型虚拟中心并联机构的误差灵敏度分析[J]. 机械工程学报, 2013, 49(17): 85-91.
- XIE Fugui, LIU Xinjun, CHEN Yuzhen. Error sensitivity analysis of novel virtual center mechanism with parallel kinematics [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(17): 85-91.
- [11] 赵延治, 宋晓鑫, 杨建涛, 等. 基于虚设运动副的并联机器人静态误差建模与标定[J]. 中国机械工程, 2017, 28(18): 2189-2197.
- ZHAO Yanzhi, SONG Xiaoxin, YANG Jiantao, et al. Static error modelling and calibration for parallel robots based on virtual joint pairs[J]. China Mechanical Engineering, 2017, 28(18): 2189-2197.
- [12] CHEBBI A H, CHOUAIBI Y, AFFI Z, et al. Sensitivity analysis and prediction of the orientation error of a three translational parallel manipulator[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2018, 232(1): 140-161.
- [13] 丁高鹏, 李开明. 三平动冗余驱动并联机床误差分析及标定方法的研究[J]. 机床与液压, 2018, 46(21): 24-28.
- DING Gaopeng, LI Kaiming. Study on error analysis and calibration method for parallel machine tool with three translational DOF redundant drive[J]. Machine Tool & Hydraulics, 2018, 46(21): 24-28.
- [14] 沈丹峰, 叶国铭, 王贯超, 等. 二自由度平面冗余并联机构杆件长度的误差分析[J]. 机械设计, 2017, 34(5): 65-70.
- SHEN Danfeng, YE Guoming, WANG Guanchao, et al. Error analysis of rods length on 2-DOF planar redundant parallel mechanism[J]. Journal of Machine Design, 2017, 34(5): 65-70.
- [15] 石则昌, 刘深厚. 机构精确度[M]. 北京: 高等教育出版社, 1995.
- SHI Zechang, LIU Shenhong. Mechanism accuracy[M]. Beijing: Higher Education Press, 1995.
- [16] QU H, GUO S. Kinematics analysis of a novel planar parallel manipulator with kinematic redundancy[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2017, 31(4): 1927-1935.
- [17] ZHANG D, XU Y, YAO J, et al. Analysis and optimization of a spatial parallel mechanism for a new 5-DOF hybrid serial-parallel manipulator[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2018, 31(3): 60-68.
- [18] BINAUD N, CARO S, WENGER P. Sensitivity comparison of planar parallel manipulators[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45: 1477-1490.
- [19] 李雨桐, 王玉新. 并联机构奇异构型运动稳定性与其动力学参数[J]. 机械工程学报, 2017, 53(13): 75-81.
- Li Yutong, WANG Yuxin. Motion stability at singular configurations related to kinematic parameters of a parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(13): 75-81.
- [20] ZHAN Z, ZHANG X, JIAN Z, et al. Error modelling and motion reliability analysis of a planar parallel manipulator with multiple uncertainties[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 124: 55-72.
- [21] WU G, BAI S, KEPLER J A, et al. Error modeling and experimental validation of a planar 3-PPR parallel manipulator with joint clearances[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2012, 4(4): 1.

- [22] CARO S, BINAUD N, WENGER P. Sensitivity analysis of 3-RPR planar parallel Manipulators[J]. Journal of Mechanical Design, 2009, 131(23): 121005.
- [23] 邹琦, 曲海波, 郭盛. 一种三自由度可重构并联机构优化设计及性能分析[J]. 中国机械工程, 2018, 29(10): 1172-1178.
- ZOU Qi, QU Haibo, GUO Sheng. Optimal design and performance analysis of a 3-DOF reconfigurable parallel mechanism[J]. China Mechanical Engineering, 2018, 29(10): 1172-1178.
-
- 作者简介:** 李官明, 男, 1996年出生。主要研究方向为机器人学。
E-mail: 18121309@bjtu.edu.cn
- 曲海波(通信作者), 男, 1983年出生, 博士, 副教授, 博士研究生导师。
主要研究方向为机器人学。
E-mail: hbqu@bjtu.edu.cn
- 郭盛, 男, 1972年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为机器人学。
E-mail: shguo@bjtu.edu.cn