DOI: 10.3901/JME.2020.22.068

基于能量密度等效的 I - II 型裂纹 K 因子半解析模型*

黄茂波 蔡力勋 祁爽

(西南交通大学应用力学与结构安全四川省重点实验室 成都 610031)

摘要: 应力强度因子 K 是控制脆性断裂与疲劳裂纹扩展行为的重要力学量,历史上各类裂纹试样的 K 因子计算方法与公式都较复杂,所得到的 K_I 和 K_{II} 表达式为不同形式的回归式,公式的适用范围有限。针对含 I - II 混合型裂纹的试样,基于能量密度等效原理提出求解 I - II 混合型裂纹的 K 因子半解析模型,模型参数少,形式简单,普适性强,适用范围广。半解析模型预测的应力强度因子与文献结果和有限元结果吻合,该模型为脆性断裂与疲劳裂纹扩展行为相关研究提供了重要的理论基础。

关键词: 能量密度等效原理; 应力强度因子; 半解析模型; I - II 混合型裂纹

中图分类号: O134

Semi-analytical Method for Solving the Stress Intensity Factor of Mode I - II Crack Based on Energy Density Equivalence Principle

HUANG Maobo CAI Lixun QI Shuang

(Applied Mechanics and Structure Safety Key Laboratory of Sichuan Province,
Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031)

Abstract: The stress intensity factor is an important mechanical parameter for controlling the behaviour of the brittle fracture toughness and fatigue crack growth. In the past researches, methods and formulas for solving K -factor of various cracked components are complicated. The expressions of K_I and K_{II} are both different fitting expressions, which have a limited application. A semi-analytical model with a simple form and general applications to predict K -factor for components with mode I - II crack is proposed based on energy density equivalence principle, and parameters can be calculated by a few FEA calculation. The result shows that K -factor predicted by the semi-analytical model agrees well with the literature result and the FEA result, and the model provides important theoretical foundation to studies on the brittle fracture toughness and fatigue crack growth.

Key words: energy density equivalence principle; stress intensity factor; semi-analytical model; mode I - II crack

0 前言

K 因子作为含裂纹试样的脆断性能指标,裂纹起裂的临界应力强度因子 K_C 作为材料断裂韧性对于结构完整性评价具有重要意义。在已有断裂韧性研究中,各类 I 型裂纹试样的力学行为被广泛关注和研究,而实际工程构件中的裂纹会受到复杂加载,使裂纹尖端产生 I - II 混合型应力场。2011 年, RICHARD 等^[1-2]在研究法兰轴的疲劳裂纹扩展时重点关注了结构的三维裂纹扩展速

率问题,并研究了试样和实际结构在混合加载条件下的疲劳和断裂问题。2016 年, LESIUK 等^[3]针对桥梁构件的剩余寿命提出了更加适用于实际构件的 I - II 混合型疲劳裂纹研究方法。2017 年, WANG 等^[4]针对海洋环境下服役的焊接接头材料,研究了其复合型裂纹扩展速率特点。混合型断裂问题近年来受到更多关注,紧凑拉伸剪切试样被广泛运用到研究中^[2-6]。

1974 年, TANAKA^[7]认为几何对称裂纹试样在 I - II 混合型加载条件下, I 型和 II 型加载模式互不影响。RICHARD 等^[8-9]于 1983 年设计了用于 I - II 混合型加载条件的紧凑拉伸剪切(Compact tension shear, CTS)与加载装置,这类试样还可以实现纯 I 型和纯 II 型裂纹加载,且加载简单、裂纹长度便于

* 国家自然科学基金资助项目(11472228)。20191204 收到初稿, 20200229 收到修改稿

观测, 被用于研究材料的断裂极限、测定裂纹扩展速率等断裂参数^[3, 10-15], 而在获取这些参数时的关键在于求解 CTS 试样裂纹前缘的应力强度因子, 文献中多使用有限元模拟求解, 不能通过试验的载荷位移曲线获取; 或使用 RICHARD 提出的 K 因子变化曲线, 局限于标准 CTS 试样, 且适用范围有限。RICHARD 于 1985 年对 CTS 试样的 K 因子进行了计算, 给出了变化曲线, 并得到了拟合式

$$\begin{cases} K_I = \frac{F}{WB} \sqrt{\pi a} \frac{\cos \alpha}{1 - \frac{a}{W}} \times \sqrt{\frac{0.26 + 2.65 \left(\frac{a}{W-a} \right)}{1 + 0.55 \left(\frac{a}{W-a} \right) + 0.08 \left(\frac{a}{W-a} \right)^2}} \\ K_{II} = \frac{F}{WB} \sqrt{\pi a} \frac{\sin \alpha}{1 - \frac{a}{W}} \times \sqrt{\frac{-0.23 + 1.40 \left(\frac{a}{W-a} \right)}{1 - 0.67 \left(\frac{a}{W-a} \right) + 2.08 \left(\frac{a}{W-a} \right)^2}} \end{cases} \quad (1)$$

式中, K_I 和 K_{II} 分别为 I 型和 II 型 K 因子; F 为加载载荷; W 为 CTS 试样宽度; B 为 CTS 试样厚度; a 为 CTS 试样裂纹长度; α 为远场拉应力与裂纹面法线方向的角度, 并限定了公式的适用范围为平面应力条件, 且 $0.5 \leq a/W \leq 0.7$ 。BANKS-SILLS 等^[16]于 1984 年设计了用于研究 II 型裂纹的 Arcan 试样, 之后的学者将其用于研究 I - II 型裂纹^[17-19], 并给出了 K 因子拟合公式

$$\begin{cases} K_I = \frac{F \cos \alpha}{WB} \sqrt{\pi a} f_I \left(\frac{a}{W} \right) \\ K_{II} = \frac{F \cos \alpha}{WB} \sqrt{\pi a} f_{II} \left(\frac{a}{W} \right) \end{cases} \quad (2)$$

式中

$$\begin{cases} f_I \left(\frac{a}{W} \right) = 1.12 - 0.231 \frac{a}{W} + 10.55 \left(\frac{a}{W} \right)^2 - 21.27 \left(\frac{a}{W} \right)^3 + 30.39 \left(\frac{a}{W} \right)^4 \\ f_{II} \left(\frac{a}{W} \right) = \frac{1.122 - 0.561 \frac{a}{W} + 0.085 \left(\frac{a}{W} \right)^2 + 0.180 \left(\frac{a}{W} \right)^3}{\left(1 - \frac{a}{W} \right)^{0.5}} \end{cases}$$

该式同样只能用于平面应力条件, 拟合式形式不统一, 且适用范围较小。

本文基于能量中值等效原理, 提出 I - II 混合型裂纹试样 K 因子的半解析模型, 进一步地, 分别得到了纯 I 型和纯 II 型加载条件下 K 因子的半解析模型参数。将提出的半解析模型应用于 CTS 和 Arcan

试样, 并对结果进行验证。

1 能量中值等效原理

2016 年, CHEN 等^[20-22]针对连续均匀、各向同性且受比例单向加载的材料, 将任意构元变形域中处于复杂应力状态下的代表性体积单元 (Representative volume element, RVE) 的能量密度进行积分中值等效并与 RVE 的单轴 Mises 应力状态下的能量密度等效, 提出了能量中值等效原理。该原理提供了表征材料构元的变形、形变能、材料本构关系参数、几何尺寸之间的半解析关系的途径。

对于受单向加载的各类构元, 变形区域内 RVE 多处于三维复杂应力状态, 假设材料符合均匀连续、各向同性、等向强化以及 Von Mises 屈服准则, 则材料 RVE 的复杂应力状态可等效为单轴应力状态, 且等效应力 σ_{eq} 满足

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2} \quad (3)$$

式中, σ_1 、 σ_2 、 σ_3 分别为材料 RVE 的第一、第二、第三主应力。图 1 给出了应变能密度的中值等效和复杂应力状态与单轴 Mises 应力等效的方式。

(a) 积分中值等效

(b) Mises等效

图 1 能量中值等效原理

由图 1a 可知, 任意材料构元在有效变形域内 Ω 的形变能为

$$U = \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dx dy dz \quad (4)$$

式中, $\mu(x, y, z)$ 为 Ω 中任意点材料 RVE 的能量密度。

由数学的中值定理, 在构元的 Ω 中一定存在中值点 $M(x_M, y_M, z_M)$, 使得 M 点材料 RVE 的能量密度 μ_M 为

$$\mu_M(x_M, y_M, z_M) = \frac{\iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dx dy dz}{V} \quad (5)$$

式中, V 为材料构元有效变形域 Ω 的体积, 则材料构元的形变能可表为

$$U = \mu_M(x_M, y_M, z_M)V \quad (6)$$

进一步地, 由 Von Mises 屈服准则可将复杂应力状态的能量密度 μ_M 等效为单轴应力状态的能量密度 μ_{eq}

$$\mu_M = \mu_{eq-M} = \int_0^{\varepsilon_{eq-M}} \sigma_{eq} d\varepsilon_{eq} \quad (7)$$

则受载构元在 Ω 域形变能的基本控制方程可表为

$$U = V \int_0^{\varepsilon_{eq-M}} \sigma_{eq} d\varepsilon_{eq} \quad (8)$$

式中, ε_{eq} 为等效应变。

2 研究条件

2.1 线弹性应变能

对于理想线弹性材料, 其应力应变关系可描述为

$$\sigma_{eq} = E\varepsilon_{eq} \quad (9)$$

式中, E 为弹性模量; ε_{eq} 为弹性等效应变。由式(7)和(9)可得, 积分中值点 M 材料 RVE 的等效弹性应变能密度为

$$\mu_{eM} = \int_0^{\varepsilon_{eq-M}} \sigma_{eq} d\varepsilon_{eq} = \frac{E}{2} \varepsilon_{eq-M}^2 \quad (10)$$

式中, μ_{eM} 为弹性应变能密度; ε_{eq-M} 为能量积分中值点 M 材料 RVE 的等效弹性应变。

在单向外载荷作用下, 有效弹性变形域 Ω_e 的体积 V_e 与 ε_{eq-M} 均为与加载线位移 h_e 相关的单调不减函数, 故引入量纲一变形函数

$$f\left(\frac{h_e}{h^*}\right) = \frac{V_e}{V^*} \varepsilon_{eq-M}^2 \quad (11)$$

当外载荷为零时, $f(h_e/h^*)|_{h_e=0}=0$ 。由式(6)和(10)可得, Ω_e 的弹性应变能 U_e 可表示为

$$U_e = \frac{EV_e}{2} \varepsilon_{eq-M}^2 = \frac{EV^*}{2} f\left(\frac{h_e}{h^*}\right) \quad (12)$$

式中, V^* 是根据构元几何尺寸人为定义的特征体积; h_e 与 h^* 分别为弹性位移和特征位移。

对于受单向加载的理想线弹性材料, 且其载荷-位移响应关系也表现为线性的结构或试样, 即

$$P = C_e h_e \quad (13)$$

式中, C_e 为弹性变形系数(也称为柔度)。基于功能原理, 受单向比例加载试样的应变能可表示为

$$U_e = W_e = \int_0^{h_e} P dh = \frac{C_e h_e^2}{2} \quad (14)$$

式中, W_e 表示弹性条件下外力做功。根据式(12)和(14)可得, 量纲一变形函数为

$$f\left(\frac{h_e}{h^*}\right) = \frac{C_e h_e^2}{EV^*} = k_0 \left(\frac{h_e}{h^*}\right)^2 \quad (15)$$

式中, k_0 为量纲一弹性变形系数。则应变能可表示为

$$U_e = \frac{k_0 EV^*}{2} \left(\frac{h_e}{h^*}\right)^2 \quad (16)$$

进一步地, 载荷与加载线位移的关系可表示为

$$P = \frac{\partial U_e}{\partial h_e} = \frac{k_0 EV^*}{2h^*} \frac{h_e}{h^*} \quad (17)$$

则受单向加载试样的量纲一弹性应变能可表示为

$$\begin{cases} \frac{U_e}{U_e^*} = \left(\frac{h_e}{h^*}\right)^2 \\ U_e^* = \frac{k_0 EV^*}{2} \end{cases} \quad (18)$$

该式简称为线弹性能量等效模型(Linear-elastic equivalent energy model, L-EEM), 式中, U_e^* 为特征弹性应变能; 而量纲一载荷可表示为

$$\begin{cases} \frac{P_e}{P_e^*} = \frac{h_e}{h^*} \\ P_e^* = k_0 EA^* \\ A^* = \frac{V^*}{h^*} \end{cases} \quad (19)$$

式中, P_e^* 为特征弹性载荷; A^* 为特征面积。该式简称为线弹性载荷位移模型(Linear-elastic load vs. displacement model, L-LDM), 模型中 k_0 可由试验或有限元分析(Finite element analysis, FEA)计算确定。

2.2 有限元分析条件

2.2.1 I-II 混合型裂纹试样的网格模型

利用有限元软件 ANSYS 16.0, 对如图 2 所示的 CTS 和 Arcan 试样在平面应力下进行线弹性计算, 图 3 给出了两种试样的 FEA 模型, 文献[21]证明了 CTS 试样的 FEA 条件与试验条件一致, 计算结果吻合, 图 4 给出了其裂尖张开位移(Crack mouth opening displacement, CMOD)对比结果。模型中所有网格单元均采用 plane183 单元, 参考常用材料选取弹性模量 E 为 202 GPa, 载荷均为 1 kN, 加载端为自由边界条件, 下端为固支约束。

图 2 裂纹试样示意图

图 3 有限元模型

图 4 CTS 试样 COMD 对比

2.2.2 网格密度影响分析

为考虑裂尖网格密度对 FEA 结果的影响, 针对裂纹试样 CTS 和 Arcan 分别进行纯 I 型和纯 II 型加载, 考察不同裂尖网格密度下 K 因子结果。定义图 3 中所示裂尖单元网格尺寸为 1 倍网格密度, 在此基础上对裂尖区域网格加密, 其余部分网格密度不变, 图 5、6 分别给出了 CTS 试样和 Arcan 试样不同网格密度下 FEA 获取的 K 因子, 结果表明, 采用 1 倍网格密度时已经满足计算要求。

图 5 裂尖网格密度对 K 因子的影响(CTS) 图 6 裂尖网格密度对 K 因子的影响(Arcan)

3 I-II 混合型裂纹的 K 因子统一模型

3.1 K 因子

根据式(18)和(19)可知, 对于任意受单向载荷且载荷-位移响应关系为线性的含裂纹试样, 其线弹性条件下的 U_e 与 P_e 可写为

$$U_e = \frac{P_e^2}{2Ek_0} \frac{h^*}{A^*} \quad (20)$$

1968 年, RICE 等^[23]提出了 J 积分能量表达式

$$J = -\frac{\partial U}{\partial A} \quad (21)$$

式中, A 表示试样的裂纹面积。在二维计算条件下, $A=Ba$, B 表示裂纹试样的厚度, a 表示裂纹长度, 则式(21)可表示为

$$J = -\frac{\partial U}{B \partial a} \quad (22)$$

将式(20)代入式(22)可得

$$J_e = \frac{P^2}{2BEk_0} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{h^*}{A^*} \right) \quad (23)$$

在线弹性和小范围屈服条件下, J_e 与能量释放率 G 等值, 则 K 、 G 与 J_e 三者之间的关系可表示为

$$J_e = G = \frac{K^2}{E'} \quad (24)$$

式中, 平面应力情况下 $E'=E$, 平面应变情况下 $E'=E/(1-\nu^2)$ 。联立式(23)和(24)可得 K 因子的表达式

$$K = \sqrt{\frac{1}{k_0} \frac{P^2 E'}{2BE} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{h^*}{A^*} \right)} \quad (25)$$

式中, K 表示 K_I 或 K_{II} , 该式可称为基于能量等效的 K 因子半解析模型 (Equivalent energy based K -factor semi-analytical model, EE-KSM)。

对于 CTS 试样, 假定几何特征量 V^* 、 A^* 和 h^* 分别为

$$\begin{cases} A^* = WB \exp \left[p_1 + p_2 \frac{b}{W} + p_3 \left(\frac{b}{W} \right)^{1.5} \right] \\ h^* = W \\ V^* = A^* h^* \\ W = a + b \end{cases} \quad (26)$$

式中, b 表示裂纹试样的剩余韧带长度; p_1 、 p_2 和 p_3 均为与 b 相关的系数。则式(19)中的 P_e^* 可表示为

$$P_e^* = k_0 EWB \exp \left[p_1 + p_2 \frac{b}{W} + p_3 \left(\frac{b}{W} \right)^{1.5} \right] \quad (27)$$

联立式(25)和(26), 可得 CTS 试样 K 因子半解析模型

$$K = \frac{P \sqrt{\frac{E'}{E}}}{B \sqrt{2Wk_0}} \left(p_2 + 1.5 p_3 \frac{b}{W} \right) \cdot \exp \left[-p_1 - p_2 \frac{b}{W} - p_3 \left(\frac{b}{W} \right)^{1.5} \right] \quad (28)$$

同理, 针对 Arcan 试样, 可假定其几何特征量 A^* 和 h^* 分别为

$$\begin{cases} A^* = WB \exp \left[p_1 + p_2 \frac{b}{W} + p_3 \left(\frac{b}{W} \right)^{0.5} \right] \\ h^* = W \end{cases} \quad (29)$$

代入 EE-KSM 中可得 Arcan 试样 K 因子半解析模型

$$K = \frac{P \sqrt{\frac{E'}{E}}}{B \sqrt{2Wk_0}} \left(p_2 + 0.5 p_3 \frac{b}{W} \right) \cdot \exp \left[-p_1 - p_2 \frac{b}{W} - p_3 \left(\frac{b}{W} \right)^{-0.5} \right] \quad (30)$$

3.2 参数确定方法

在 EE-KSM 中, 参数 k_0 可借助 FEA 进行少量计算得到。参数确定方法如图 7 所示: 首先, 利用有限元计算得到 a/W 在不同范围条件下的载荷位移曲线, 进行几何无关处理后得到 $P/(EA^*) \sim h/h^*$ 量纲一载荷位移曲线关系; 其次, 拟合式(27)中不同 a/W 下对应的 P_e^* , 可得到 p_1 、 p_2 和 p_3 值, 此时不同 a/W 的几何无关载荷位移曲线吻合, 对应的 p_1 、 p_2 和 p_3 值适用于该 a/W 的范围; 最后, 可由式(19)中 P_e^* 与 A^* 的关系拟合得到 k_0 值。

图 7 EE-KSM 参数标定方法

针对 CTS 和 Arcan 试样, 图 8~11 分别给出了不同加载角度、不同裂纹长度的 $P/(EA^*) \sim h/h^*$ 曲线, 由图可见, 不同 a/W 值对应的各裂纹试样的 $P/(EA^*) \sim h/h^*$ 曲线密切吻合。

图 8 CTS- K_I 归一化载荷位移曲线

图 9 CTS- K_{II} 归一化载荷位移曲线 图 10 Arcan- K_I 归一化载荷位移曲线 图 11 Arcan- K_{II} 归一化载荷位移曲线

4 结果验证

表 1 给出了两种试样的 K 因子半解析模型参数, 为验证模型的有效性, 图 12~15 分别给出了公式预测结果与有限元提取结果和文献[9, 19]结果, 对比可知, 针对 CTS、Arcan 两种试样, 在文献公式所适用范围内, 本文提出的 EE-KSM 预测结果与文献公式结果和有限元结果密切吻合, 且在更大范围内也能密切吻合有限元结果, K 因子最大相对误差均不超过 1%。

表 1 EE-KSM 参数(平面应力)

参数	试样			
	CTS- K_I	CTS- K_{II}	Arcan- K_I	Arcan- K_{II}
几何尺寸/ mm	W=50		W=30、H=100	
a/W 适用范围	0.20~0.70	0.30~0.70	0.20~0.65	0.40~0.80
p_1	9.188 3	13.241 3	4.009 2	12.329 1
p_2	21.431	4.338 5	-10.966 5	-1.239 7
p_3	-14.803 9	-3.226 7	21.797 3	2.582
$k_0/\times 10^{-7}$	98.905 9		1.646 4

图 12 CTS- K_I 试样平面应力条件结果对比 图 13 CTS- K_{II} 试样平面应力条件结果对比 图 14 Arcan- K_I 试样平面应力条件结果对比

图15 Arcan- K_{II} 试样平面应力条件结果对比

为验证半解析模型的普适性,对 CTS 和 Arcan 试样进行平面应变条件研究,表2给出了两种试样在平面应变条件下的模型参数,其预测的和有限元提取的 K 因子如图16~19所示。对比结果可知,在不同

表2 EE-KSM 参数(平面应变)

参数	试样			
	CTS- K_I	CTS- K_{II}	Arcan- K_I	Arcan- K_{II}
几何尺寸/mm	$W=50$		$W=30, H=100$	
a/W 适用范围	0.20~0.75	0.30~0.80	0.40~0.80	0.40~0.80
p_1	9.239 9	13.323 3	3.999 8	12.433 4
p_2	21.733 2	4.171 1	-11.036 7	-1.194 1
p_3	-15.072 5	-3.109 9	21.989 9	2.494 4
$k_0/\times 10^{-7}$	98.905 9		1.646 4

图16 CTS- K_I 试样平面应变条件结果对比 图17 CTS- K_{II} 试样平面应变条件结果对比 图18 Arcan- K_I 试样平面应变条件结果对比 图19 Arcan- K_{II} 试样平面应变条件结果对比

工况下,本文提出的 EE-KSM 预测结果与有限元结果均密切吻合,且 K 因子最大相对误差不超过 1%。

5 结论

(1) 基于能量中值等效原理,针对 I-II 混合型裂纹试样,通过对比试验所得载荷位移曲线验证了有限元模型的有效性,提出了仅含 7 个参数的 K 因子半解析统一模型。

(2) 针对 CTS 和 Arcan 两种试样,借助少量 FEA 计算确定了模型参数。结果表明,模型可预测平面应力和平面应变条件下的任意加载角度下的 K_I 和 K_{II} ,预测结果与文献公式结果和有限元结果密切吻合,且适用范围更广,在较大范围内最大相对误差小于 1%。

(3) 本文所用的半解析方法,或可用于求解 II 型与 III 型裂纹试样的 K 因子半解析表达式,有助于进一步研究各类裂纹试样的脆性断裂和疲劳裂纹扩展行为。

参考文献

- [1] RICHARD H A, SANDER M, FULLAND M, et al. Fatigue crack growth in real structures[J]. International Journal of Fatigue, 2013, 50: 83-88.
- [2] RICHARD H A, SCHRAMM B, SCHIRMEISEN N H.

- Cracks on mixed mode loading: Theories, experiments, simulations[J]. International Journal of Fatigue, 2014, 62: 93-103.
- [3] LESIUK G, KUCHARSKI P, CORREIA J A F O, et al. Mixed mode (I + II) fatigue crack growth of long term operating bridge steel[J]. Procedia Engineering, 2016, 160: 262-269.
- [4] WANG Qiang, LIU Xuesong, WANG Wei, et al. Mixed mode fatigue crack growth behavior of Ni-Cr-Mo-V high strength steel weldments[J]. International Journal of Fatigue, 2017, 102: 79-91.
- [5] DEMIR O, IRIC S, AYHAN A O, et al. Investigation of mixed mode I/II fracture problem-Part 1 computational and experimental analyses[J]. Fracture and Structural Integrity, 2016, 10(35): 330-339.
- [6] DEMIR O, AYHAN A O. Investigation of mixed mode I/II fracture problems: Part 2 evaluation and development of mixed mode fracture[J]. Fracture and Structural Integrity, 2016, 10(35): 340-349.
- [7] TANAKA K. Fatigue crack propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1974, 6(3): 493-507.
- [8] RICHARD H A, BENITZ K. A loading device for the creation of mixed mode in fracture mechanics[J]. International Journal of Fracture, 1983, 22(2): 55-58.
- [9] RICHARD H A. Fracture mechanical predictions for cracks with superimposed normal and shear loading[M]. Dusseldorf: VDI-Verlag, 1985.
- [10] KIM T Y, KIM H K. Mixed-mode fatigue crack growth behavior of fully lower bainite steel[J]. Materials Science and Engineering: A, 2013, 580: 322-329.
- [11] LESIUK G, KUCHARSKI P, CORREIA J A F O, et al. Mixed mode (I + II) fatigue crack growth in puddleiron[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2017, 185: 175-192.
- [12] JAMALI J, FAN Y, WOOD J T. The mixed-mode fracture behavior of epoxy by the compact tension shear test[J]. International Journal of Adhesion and Adhesives, 2015, 63: 79-86.
- [13] JAMALI J, MOURAD A-HI, FAN Y, et al. Through thickness fracture behavior of unidirectional glass fibers epoxy composites under various in-plane loading using the CTS test[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2016, 156: 83-95.
- [14] 朱莉. 三维复合型脆性断裂行为的数值计算与实验研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2012.
- ZHU Li. Numerical calculation and experimental investigation on 3D mixed mode brittle fracture behavior[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2012.
- [15] 杨超. I / II 型复合加载下高强度钢焊接接头的疲劳裂纹扩展行为[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2015.
- YANG Chao. Fatigue crack propagation behavior of high strength steel welded joint under I / II mixed-mode loading[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2015.
- [16] BANKS-SILLS L, ARCAN M, BORTMAN Y. A mixed mode fracture specimen for mode II dominant deformation[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1984, 20(1): 145-157.
- [17] AMSTUTZ B E. Characterization of mixed-mode stable tearing in thin sheet 2024-T3 aluminum alloy[D]. South Carolina: University of South Carolina, 1995.
- [18] AMSTUTZ B E, SUTTON M A, DAWICKE D S, et al. Effects of mixed mode I/II loading and grain orientation on crack initiation and stable tearing in 2024-T3 aluminum[C]// Fatigue and Fracture Mechanics: 27th Volume, ASTM International, 1997.
- [19] CARLSSON L A, ADAMS D F, PIPES R B. Experimental characterization of advanced composite materials[M]. Boca Raton: CRC Press, 2014.
- [20] CHEN Hui, CAI Lixun. Theoretical model for predicting uniaxial stress-strain relation by dual conical indentation based on equivalent energy principle[J]. Acta Materialia, 2016, 121: 181-189.
- [21] QI Shuang, CAI Lixun, BAO Chen, et al. Analytical theory for fatigue crack propagation rates of mixed-mode I - II cracks and its application[J]. International Journal of Fatigue, 2019, 119: 150-159.
- [22] CHEN Hui, CAI Lixun. Unified elastoplastic model based on a strain energy equivalence principle[J]. Applied Mathematical Modelling, 2017, 52: 664-671.
- [23] RICE J, ROSENGREN G F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1968, 16(1): 1-12.

作者简介: 黄茂波, 男, 1998 年出生, 博士研究生。主要研究方向为疲劳与断裂、材料测试理论与技术。

E-mail: 1149098839@qq.com

蔡力勋(通信作者), 男, 1959 年出生, 教授。主要研究方向为断裂与疲劳、强度理论、材料测试理论与技术。

E-mail: lix_cai@263.net

祁爽, 女, 1990 年出生, 博士研究生。主要研究方向为疲劳与断裂、材料测试理论与技术。

E-mail: daisy_ishuang@126.com