DOI: 10.3901/JME.2020.21.056

基于机械臂位姿变换的柔性负载伺服驱动 系统控制策略*

李小彭 尚东阳 陈仁桢 闻邦椿
(东北大学机械工程与自动化学院 沈阳 110819)

摘要: 伺服驱动系统的柔性负载端转动惯量等参数随柔性机械臂位姿变化而变化, 进而影响伺服驱动系统电动机输出端转速。为降低电动机输出端速度波动, 采用极点配置的方法设计伺服驱动系统转速环 PI 控制器参数, 该参数的选择随柔性机械臂位姿变化而变化, 从而使伺服驱动系统在不同位姿下获得良好的动态响应特性, 避免机械谐振发生。首先根据连续体振动理论和拉格朗日原理建立了柔性负载伺服驱动系统动力学模型, 并通过状态方程求得电动机转速到柔性负载驱动转矩的传递函数。将变参数 PI 控制策略应用于伺服驱动系统转速环控制中, 分析了柔性负载对转速环的控制特性的影响, 采用极点配置的方法设计控制器参数。接下来分别采用相同幅值、相同阻尼系数、相同实部 3 种极点配置策略设计控制器参数。讨论了这 3 种极点配置策略不同参数对系统谐振峰值、谐振频率和带宽的影响。最后通过数值仿真分析表明: 伺服驱动系统等效柔性负载参数与机械臂的位姿有关; 柔性负载回转半径、转动惯量较大的情况, 不适宜使用相同实部的极点配置方法, 但其余两种方法可通过适当选择参数使电动机输出转速波动程度减小。

关键词: 柔性机械臂; 伺服驱动系统; 柔性负载; PI 控制策略; 极点配置方法

中图分类号: TP13; TP249

Control Strategy of Flexible Load Servo Drive System Based on Manipulator Position and Position Transformation

LI Xiaopeng SHANG Dongyang CHEN Renzhen WEN Bangchun
(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819)

Abstract: The parameters such as the moment of inertia of the flexible load end of the servo drive system change with the position of the flexible manipulator, which affects the speed of the motor output of the servo drive system. In order to reduce the speed fluctuation of the motor output, the parameters of the servo drive system speed loop PI controller are designed by the pole configuration method. The selection of this parameter changes with the position of the flexible robot arm, so that the servo drive system can be obtained in different poses. Good dynamic response characteristics to avoid mechanical resonance. The dynamic model of the flexible load servo drive system is established based on the continuum vibration theory and the Lagrangian principle. The transfer function of the motor speed to the flexible load drive torque is obtained by the state equation. The variable parameter PI control strategy is applied to the servo drive system speed loop control. The influence of the flexible load on the control characteristics of the speed loop is analyzed. The pole parameters are used to design the controller parameters. Next, the controller parameters are designed by using the same amplitude, the same damping coefficient, and the same three real pole configuration strategies. The effects of different parameters of these three pole placement strategies on the system resonance peak, resonant frequency and bandwidth are discussed. Finally, the numerical simulation analysis shows that the equivalent flexible load parameters of the servo drive system are related to the pose of the mechanical arm; when the flexible load radius of gyration and the moment of inertia are large, it is not suitable to use the pole configuration method of the same real part, but the other two. The method can reduce the fluctuation of the motor output speed by appropriately selecting parameters.

Key words: flexible manipulator; servo drive system; flexible load; PI control strategy; pole placement method

* 国家自然科学基金(51875092)和中央高校基本科研业务专项资金
(N170302001)资助项目。20191121 收到初稿, 20200217 收到修改稿

0 前言

柔性机械臂因为具有工作半径大、结构刚度低等优点,广泛应用于工业装配、太空探索等诸多方面^[1]。柔性机械臂是一个多输入多输出、高度非线性、强耦合的复杂系统。对于许多高性能机械臂来说,负载端的柔性是一个不可忽略的影响因素。这种柔性负载的存在能够引发伺服驱动系统电动机输出端的速度波动,进而产生机械谐振,并且谐振的强弱可通过系统动态响应特性反映,有时会降低控制精度。伺服系统在高速运动的过程中,会因自身存在的固有振动模态而产生显著的振荡^[2]。当伺服驱动系统特性与机械环节特性符合一定条件时,系统将出现谐振现象,导致负载端、电动机端强烈抖动。这种谐振会影响机械臂的动态精度,甚至损坏机械臂^[3-5]。

在机械臂运动过程中,柔性负载的转动惯量等参数会随位姿发生变化,这非线性的变化会影响伺服驱动系统,导致输出端的转速改变。针对柔性负载伺服驱动系统的建模及控制谐振等问题,许多学者进行了相关的研究。

针对柔性负载的建模,文献[7, 9-12]首先将柔性负载简化为欧拉—伯努利梁,然后利用模态分析的方法描述柔性负载末端的挠度,利用拉格朗日原理,对其进行动力学建模。文献[6-7]在建立边界方程时考虑了柔性负载末端质量集中的影响、文献[9-10]既考虑了负载柔性、又考虑了关节柔性对伺服系统的影响。文献[11]考虑了柔性负载在外加载荷条件下的建模。通常伺服驱动系统的控制方法主要包括主动控制和被动控制两大类。主动控制方法是改变控制器参数或控制器结构使系统获得稳定的输出,主要包括 PI、PD、边界控制、状态反馈控制等。文献[8-10]在伺服系统中采用 PI 控制策略控制速度环,由此提高电动机端转速输出的快速性与稳定性。文献[11-13]采用边界控制的方法使系统输出更加平稳。文献[14]采用状态反馈控制策略,在速度环控制中使用状态空间控制方法减轻机械谐振。文献[15]采用自适应控制策略减少了伺服系统低速爬行的现象,提高伺服系统稳定性。被动控制方法就是在速度环输出与电流环给定之间插入陷波滤波器,主要包括频率陷波器、低通滤波器、自适应陷波器等,文献[10]同时也采用此种控制策略。

在机器人关节伺服驱动系统中,PI 控制仍是应用最为广泛的控制策略,尤其适合高性能的伺服系

统。可通过设计 PI 解调器参数,使系统获得良好的动态特性,进而减小谐振程度。文献[9]讨论了系统零极点对于系统谐振程度的影响,但并没有从系统的评价指标方面分析系统特性。

在柔性机械臂伺服驱动系统中,柔性负载端的长度、转动惯量随机械臂的姿态、位置变化而发生改变。这种非线性的改变会对系统输出的动态响应产生影响。控制策略在控制系数相同的情况下,系统参数的变化会引起系统输出速度波动程度、调整时间、最大超调量等动态响应特性的改变,进而影响系统的稳定性,或引起机械谐振。

本文首先建立机械臂柔性负载伺服驱动系统的动力学模型。结合文献[6, 8],采用 PI 控制策略对系统进行极点配置,提出了 3 种不同的极点配置方法,用来确定 PI 控制策略参数。针对每种极点配置策略,分析了阻尼系数和极点自然频率对系统特性的影响。通过仿真得到了柔性机械臂应用极点配置法在不同位置、姿态下的伺服驱动系统电动机转速输出结果,分析了阻尼系数对系统影响趋势以及选择范围。通过与传统 PI 调节器参数整定方法对比,数值仿真验证了本文所提出的基于极点配置的 PI 调节器参数整定方法的有效性。

1 柔性负载伺服驱动系统建模

柔性负载广泛存在于电动机传动领域,如工业机器人的柔性机械臂等。柔性机械臂由若干柔性连杆串联组成,如图 1 所示。其中电动机电磁转矩 T_m 、柔性负载外加转矩 T_l 、柔性负载驱动转矩 T_a 关系如式(1)所示

$$T_a = T_m - T_l \quad (1)$$

柔性机械臂各连杆的转角 q_i 随位姿的变化而变化,决定了末端执行器的空间位置。由此导致柔性机器臂负载端的参数发生改变。为简化模型,方便建模,忽略机械臂关节柔性与传动比,将柔性负载

(a) 带有柔性负载的机器人关节示意图

图1 柔性负载机械臂关节模型图

端各个连杆等效为一个柔性连杆，其尺寸如图1b所示。柔性机械臂位姿的改变导致等效柔性连杆的长度、密度、转动惯量、固有频率等均发生变化。简化后柔性负载伺服驱动系统如图2所示。图2中， $y(x,t)$ 表示柔性负载的横向柔性位移，它是负载截面位置 x 和时间 t 的二维函数、 $\theta_m(t)$ 表示表示伺服电动机转轴的转角。

图2 柔性负载伺服驱动系统

建模过程中，不考虑柔性负载末端所受外力，可以将上述系统等效为中心刚体——悬臂梁系统。当中心刚体转动时，柔性负载的横向弯曲振动明显，因此忽略纵向振动。建模过程中，只考虑柔性负载的横向振动，忽略柔性负载的纵向振动与变形影响，故将柔性负载等效为欧拉—伯努利梁。

在柔性负载上建立两个坐标系，一个动态坐标系 x_0Oy_0 和一个静态坐标系 XOY 。

根据振动理论，悬臂梁在 x 处的挠度如式(2)所示。

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \delta_i(t) = \phi^T \delta \quad (2)$$

式中， $\phi_i(x)$ 是模态函数； $\delta_i(t)$ 是模态坐标。

根据振动理论可得柔性负载横向振动的偏微分方程如式(3)所示

$$\rho(x)A(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] = f(x,t) \quad (3)$$

式中， $f(x,t)$ 表示作用在柔性负载上的单位横向力、 $\rho(x)$ 表示柔性负载的单位体积质量、 $A(x)$ 表示柔性负载的横截面积、 $EI(x)$ 表示柔性负载的抗弯刚度。

忽略柔性负载末端质量集中与受力，该柔性负载选择一端固定、一端自由，故边界条件如式(4)所示。

$$\begin{cases} y(0,t) = 0 \\ \frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = 0 \\ EI(x) \frac{\partial^2 y(l,t)}{\partial x^2} = 0 \\ EI(x) \frac{\partial^3 y(l,t)}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

不考虑外界作用力，即 $f(x,t)=0$ ，并假设柔性负载是均匀连续的，即 $\rho(x)$ 、 $EI(x)$ 、 $A(x)$ 为常值，分别用 ρ 、 EI 、 A 表示。则柔性负载自由振动的偏微分方程如式(5)所示

$$\rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (5)$$

将式(2)代入式(5)，有式(6)成立

$$\rho A \phi(x) \delta''(t) + EI \phi^{(4)}(x) \delta(t) = 0 \quad (6)$$

对式(6)进行变换有式(7)成立

$$\frac{\delta''(t)}{\delta(t)} = -\frac{EI \phi^{(4)}(x)}{\rho A \phi(x)} = -\omega^2 \quad (7)$$

式中， ω^2 表示常数。将式(7)整理可得到

$$\begin{cases} \frac{d^2 \delta(t)}{dt^2} + \omega^2 \delta(t) = 0 \\ EI \phi^{(4)}(x) - \omega^2 \rho A \phi(x) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

模态函数应满足上述的边界条件式(4)，将式(2)代入上述边界条件，并消去模态坐标 $\delta_i(t)$ ，得到以下边界条件的模态函数如式(9)所示

$$\begin{cases} \phi(0) = 0 \\ \frac{d\phi(0)}{dx} = 0 \\ EI \frac{d^2 \phi(l)}{dx^2} = 0 \\ EI \frac{d^3 \phi(l)}{dx^3} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

假设模态函数 $\phi(x)$ 解的形式如式(10)所示

$$\phi(x) = \exp(sx) \quad (10)$$

将式(10)改写成如下形式

$$\begin{cases} \frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} = \beta^4 \phi(x) \\ \beta^4 = \frac{\omega^2 \rho A}{EI} \end{cases} \quad (11)$$

可得到特征方程及其特征根如式(12)所示

$$\begin{cases} s^4 - \beta^4 = 0 \\ s_{1,2} = \pm \beta \\ s_{3,4} = \pm i\beta \end{cases} \quad (12)$$

故假设模态函数 $\phi(x)$ 的解为

$$\phi(x) = D_1 e^{\beta x} + D_2 e^{-\beta x} + D_3 e^{i\beta x} + D_4 e^{-i\beta x} \quad (13)$$

将式(13)解改写如式(14)所示

$$\phi(x) = D_1 \sin \beta x + D_2 \cos \beta x + D_3 \operatorname{sh} \beta x + D_4 \operatorname{ch} \beta x \quad (14)$$

式中, D_1 、 D_2 、 D_3 、 D_4 为积分常数, 可通过边界条件进行求解。

根据式(8)可以写出模态坐标 $\delta(t)$ 的解为

$$\delta(t) = C \sin(\omega t + \varphi) \quad (15)$$

故柔性负载的横向柔性位移 $y(x, t)$ 的解为

$$y(x, t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (16)$$

式中, A 的表达式为

$$A = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \operatorname{sh} \beta x + C_4 \operatorname{ch} \beta x \quad (17)$$

可根据边界条件和振动初始条件确定上式中 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 、 ω 、 φ 六个待定系数。

根据边界条件式(8)可求得频率方程为

$$\cos \beta l \operatorname{ch} \beta l = -1 \quad (18)$$

柔性负载的前几个特征根值如表 1 所示。

表 1 柔性负载的前五阶特征根值

$\beta_1 l$	$\beta_2 l$	$\beta_3 l$	$\beta_4 l$	$\beta_5 l$
1.875	4.694	7.855	10.996	14.137

柔性负载的固有频率如式(19)所示

$$\omega_i = \beta_i^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (19)$$

与 ω_i 相对应的模态函数表达式如式(20)所示

$$\phi_i(x) = \operatorname{ch} \beta_i x - \cos \beta_i x + \varsigma_i (\operatorname{sh} \beta_i x - \sin \beta_i x) \quad (20)$$

其中, ς_i 表达式如式(21)所示

$$\varsigma_i = -\frac{\operatorname{sh} \beta_i l - \sin \beta_i l}{\operatorname{ch} \beta_i l + \cos \beta_i l} \quad (21)$$

柔性负载上任意一点的矢量表示如式(22)所示

$$\mathbf{r}^T = [X, Y] \quad (22)$$

$$\begin{cases} X = x \cos \theta - y(x, t) \sin \theta \\ Y = x \sin \theta + y(x, t) \cos \theta \end{cases}$$

所以有式(23)成立

$$\dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} = (x^2 + y(x, t)^2) \dot{\theta}^2 + \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 + 2x \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \dot{\theta} \quad (23)$$

柔性连杆的动能如式(24)所示

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dx = \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \left[(x^2 + y(x, t)^2) \dot{\theta}^2 + \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 + 2x \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \dot{\theta} \right] dx \quad (24)$$

柔性连杆的弹性势能如式(25)所示

$$V = \frac{1}{2} EI \int_0^l \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} dx \quad (25)$$

根据拉格朗日动力学方程可得式(26)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (26)$$

式中, q_1 表示电动机机械角度 θ , q_2 表示柔性连杆第 i 阶模态坐标 $\delta_i(t)$, Q_i 表示广义力。

将式(26)写成如下形式

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = T_a \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}_i(t)} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta_i(t)} + \frac{\partial V}{\partial \delta_i(t)} = 0 \end{cases} \quad (27)$$

最终整理可得到如式(28)形式

$$\begin{cases} \ddot{\theta} \int_0^l \rho A x^2 dx + \ddot{\theta} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i(t)^2 + 2\dot{\theta} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i(t) \dot{\delta}_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\delta}_i(t) \int_0^l \rho A x \phi_i(x) dx = T_a \\ \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\delta}_i(t) + \ddot{\theta} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^l \rho A x \phi_i(x) dx - \dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i^2 \delta_i(t) = 0 \end{cases} \quad (28)$$

去掉非线性项有 $\ddot{\theta} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i(t)^2$ 、 $2\dot{\theta} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i(t) \dot{\delta}_i(t)$ 、

$\dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i(t)$ 后整理可得如式(29)所示

$$\begin{cases} \ddot{\theta} \int_0^l \rho A x^2 dx + \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\delta}_i(t) \int_0^l \rho A x \phi_i(x) dx = T_a \\ \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\delta}_i(t) + \ddot{\theta} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^l \rho A x \phi_i(x) dx + \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i^2 \delta_i(t) = 0 \end{cases} \quad (29)$$

定义式(30)~(34)成立

$$I_a = \rho A \int_0^L x^2 dx \quad (30)$$

$$F_{ai} = \int_0^L \rho A x \phi_i(x) dx \quad (31)$$

$$\mathbf{R}^2 = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2) \quad (32)$$

$$\mathbf{F}_a = [F_{a1} \ F_{a2} \ \dots \ F_{an}]^T \quad (33)$$

$$\boldsymbol{\delta}(t) = [\delta_1(t) \ \delta_2(t) \ \dots \ \delta_n(t)]^T \quad (34)$$

所以式(29)整理成式(35)所示的形式

$$\begin{cases} \ddot{\theta} I_a + \mathbf{F}_a^T \ddot{\boldsymbol{\delta}}(t) = T_a \\ \ddot{\boldsymbol{\delta}}(t) + 2\xi \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\delta}}(t) + \mathbf{R}^2 \boldsymbol{\delta}(t) + \ddot{\theta} \mathbf{F}_a = 0 \end{cases} \quad (35)$$

式中, ξ 为模态振动阻尼系数矩阵。

根据式(35)可得到系统的状态方程如式(36)所示

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\boldsymbol{\delta}}(t) \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\boldsymbol{\delta}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\mathbf{R}^2 \mathbf{F}_a^T}{\mathbf{F}_a^T \mathbf{F}_a - I_a} & 0 & -\frac{2\xi \mathbf{R} \mathbf{F}_a^T}{\mathbf{F}_a^T \mathbf{F}_a - I_a} \\ 0 & \frac{I_a \mathbf{R}^2}{\mathbf{F}_a^T \mathbf{F}_a - I_a} & 0 & \frac{2I_a \xi \mathbf{R}}{\mathbf{F}_a^T \mathbf{F}_a - I_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \boldsymbol{\delta}(t) \\ \dot{\theta} \\ \dot{\boldsymbol{\delta}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\mathbf{F}_a^T \mathbf{F}_a - I_a} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mathbf{F}_a}{\mathbf{F}_a^T \mathbf{F}_a - I_a} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

根据式(36)可得到系统的传递函数如式(37)所示

$$\frac{\omega_m(s)}{T_a(s)} = \frac{1}{s I_a \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s^2 F_{ai}^2 / I_a}{(s^2 + 2\omega_i \xi_i s + \omega_i^2)} \right)} \quad (37)$$

若只考虑一阶模态时系统的传递函数如式(38)所示

$$\frac{\omega_m(s)}{T_a(s)} = \frac{1}{s I_a \left(1 - \frac{s^2 F_{a1}^2 / I_a}{(s^2 + 2\omega_1 \xi_1 s + \omega_1^2)} \right)} \quad (38)$$

2 系统转速环控制特性

在伺服驱动系统中, 因为速度外环与电流内环带宽差别较大, 所以假设速度外环进行调节时电流内环已完成调节, 故可以忽略电流内环的影响^[14, 17]。不考虑电流内环影响, 并认为柔性负载外加转矩 T_l 为零。柔性负载伺服驱动系统 PI 控制的速度外环框图如图 3 所示。考虑系统具有三阶模态为例, 得到系统的传递函数如式(39)所示。

$$G_1(s) = \frac{1}{s I_a} (1 - M)^{-1} \quad (39)$$

图3 柔性负载伺服驱动系统转速环控制框图

式(39)中 M 的表达式为

$$M = \frac{s^2 F_{a1}^2 / I_a}{(s^2 + 2\omega_1 \xi_1 s + \omega_1^2)} + \frac{s^2 F_{a2}^2 / I_a}{(s^2 + 2\omega_2 \xi_2 s + \omega_2^2)} + \frac{s^2 F_{a3}^2 / I_a}{(s^2 + 2\omega_3 \xi_3 s + \omega_3^2)} \quad (40)$$

若不考虑负载柔性, 伺服系统驱动刚性负载时, 转速环控制框图如图 4 所示, 得到系统的传递函数如式(41)所示。

$$G_2(s) = \frac{1}{s I_a} \quad (41)$$

图4 伺服驱动柔性负载系统转速环控制框图

对比图 3、4 可看出, 柔性负载对于转速环的影响体现在如式(42)所示的柔性耦合部分

$$H(s) = \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s^2 F_{ai}^2 / I_a}{(s^2 + 2\omega_i \xi_i s + \omega_i^2)} \right)^{-1} \quad (42)$$

伺服系统驱动柔性负载时的转速环开环伯德图如图 5 所示。由图 5 可以看出柔性负载的振荡频率与转速环带宽相接近, 因此柔性对速度环的影响较大, 需要加以考虑。

图5 伺服驱动柔性负载转速环开环伯德图

3 系统转速环控制器设计

忽略电流内环影响、只考虑一阶模态, 系统采用 PI 调节器时系统的闭环传递函数如式(43)所示

$$\frac{\omega_m(s)}{\omega^*(s)} = \frac{(K_p s + K_I)(s^2 + 2\omega_1 \xi_1 s + \omega_1^2)}{N} \quad (43)$$

式中, K_p 、 K_I 分别为 PI 调节器比例参数、积分参数。

式(43)中分母 N 表达式如式(44)所示

$$N = (I_a - F_{a1}^2)s^4 + 2I_a \omega_1 \xi_1 s^3 + I_a \omega_1^2 s^2 + (K_p s + K_I)(s^2 + 2\omega_1 \xi_1 s + \omega_1^2) \quad (44)$$

本文借鉴文献[8]所提出的极点配置方法, 对极点进行配置, 将系统闭环传递函数中分母多项式写成式(45)所示, 通过式(45)变化可得到式(46)

$$\begin{cases} (I_a - F_{a1}^2)s^4 + 2I_a \omega_1 \xi_1 s^3 + I_a \omega_1^2 s^2 + \\ (K_p s + K_I)(s^2 + 2\omega_1 \xi_1 s + \omega_1^2) = (I_a - F_{a1}^2)D \\ D = (s^2 + 2\xi_{a1}\omega_{a1}s + \omega_{a1}^2)(s^2 + 2\xi_{b1}\omega_{b1}s + \omega_{b1}^2) \end{cases} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} & (s^2 + 2\xi_{a1}\omega_{a1}s + \omega_{a1}^2)(s^2 + 2\xi_{b1}\omega_{b1}s + \omega_{b1}^2) = \\ & s^4 + \frac{2I_a \omega_1 \xi_1 + K_p}{(I_a - F_{a1}^2)} s^3 + \frac{I_a \omega_1^2 + K_I + 2K_p \omega_1 \xi_1}{(I_a - F_{a1}^2)} s^2 + \\ & \frac{K_p \omega_1^2 + 2K_I \omega_1 \xi_1}{(I_a - F_{a1}^2)} s + \frac{K_I \omega_1^2}{(I_a - F_{a1}^2)} \end{aligned} \quad (46)$$

式中, ω_{a1} 、 ω_{b1} 表示极点的自然频率; ξ_{a1} 、 ξ_{b1} 表示极点阻尼系数。

忽略阻尼系数 ξ 影响有式(47)~(50)成立

$$2\xi_{a1}\omega_{a1} + 2\xi_{b1}\omega_{b1} = \frac{K_p}{(I_a - F_{a1}^2)} \quad (47)$$

$$\omega_{a1}^2 + \omega_{b1}^2 + 4\xi_{a1}\xi_{b1}\omega_{a1}\omega_{b1} = \frac{I_a \omega_1^2 + K_I}{(I_a - F_{a1}^2)} \quad (48)$$

$$2\xi_{a1}\omega_{a1}\omega_{b1}^2 + 2\xi_{b1}\omega_{b1}\omega_{a1}^2 = \frac{K_p \omega_1^2}{(I_a - F_{a1}^2)} \quad (49)$$

$$\omega_{a1}^2 \omega_{b1}^2 = \frac{K_I \omega_1^2}{(I_a - F_{a1}^2)} \quad (50)$$

所以有

$$K_p = (I_a - F_{a1}^2)(2\xi_{a1}\omega_{a1} + 2\xi_{b1}\omega_{b1}) \quad (51)$$

$$K_I = \frac{(I_a - F_{a1}^2)\omega_{a1}^2 \omega_{b1}^2}{\omega_1^2} \quad (52)$$

式(51)、(52)确定了系统零极点与 PI 调节器参数之间的联系; 式(48)、(49)限制了系统零极点位置。

4 基于极点配置的参数整定方法

确定 PI 调节器参数是应用 PI 控制策略控制伺服系统的核心。可根据式(51)、(52)利用极点配置方法计算 PI 调节器参数。本文将基于极点配置的 PI 参数整定方法划分为 3 种, 分类依据为: 极点限制

条件的不同。具体参数整定方法叙述如下。

4.1 相同幅值的极点配置法

所谓相同幅值的极点配置法, 即系统闭环传递函数极点具有相同的半径, ξ_{a1} 、 ξ_{b1} 在 $\omega_{a1} = \omega_{b1}$ 的圆周上移动。在此基础之上可确定系统零点的位置。此种极点配置法零极点的分布如图 6 所示。

图 6 相同幅值的极点配置法示意图

将 $\omega_{a1} = \omega_{b1}$ 代入式(47)~(50), 整理后可得到

$$\omega_{a1} = \omega_{b1} = \omega_1 \quad (53)$$

$$\xi_{a1}\xi_{b1} = \frac{1}{4} \left(\frac{F_{a1}^2}{I_a - F_{a1}^2} \right) \quad (54)$$

$$K_p = 2(I_a - F_{a1}^2)\omega_1(\xi_{a1} + \xi_{b1}) \quad (55)$$

$$K_I = (I_a - F_{a1}^2)\omega_1^2 \quad (56)$$

此时系统闭环传递函数如式(57)所示

$$\frac{\omega_m(s)}{\omega^*(s)} = \frac{2\omega_1(\xi_{a1} + \xi_{b1})s^3 + \omega_1^2 s^2 + 2\omega_1^3(\xi_{a1} + \xi_{b1})s + \omega_1^4}{N_1} \quad (57)$$

式(57)中分母 N_1 的表达式如式(58)所示

$$\begin{aligned} N_1 = & s^4 + 2\omega_1(\xi_{a1} + \xi_{b1})s^3 + 2\omega_1^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{F_{a1}^2}{I_a - F_{a1}^2} \right) \right) s^2 + \\ & 2\omega_1^3(\xi_{a1} + \xi_{b1})s + \omega_1^4 \end{aligned} \quad (58)$$

谐振峰值、谐振频率、带宽是控制系统的重要指标。谐振峰值表征控制系统的稳定性, 一般来说, 谐振峰值越大, 对应的阶跃瞬态响应中, 超调量便越大。此时系统受到外界干扰, 且干扰的频率与谐振频率相接近时, 在系统输出端会产生机械谐振现象。当谐振峰值处于 0~3 之间时, 认为系统可以获得满意的瞬态性能。谐振频率表征了瞬态响应的速度。谐振频率越大, 时间响应越快。为使系统能够精确的跟踪输入信号, 系统必须具有大的带宽。但带宽过大放大干扰对于系统的影响。因此带宽的选择上应该折中。

ξ_{a1} 、 ξ_{b1} 取值决定了系统的谐振峰值、谐振频率、截止带宽,如图7所示。

图7 相同幅值的极点配置法系统评价指标图

从图7可以得出: ξ_{a1} 、 ξ_{b1} 取值较小时系统谐振峰值、谐振频率较大、带宽较小,此时系统超调量过大,反映迅速,但对输入信号的跟踪整理较弱;

ξ_{a1} 、 ξ_{b1} 取值逐渐增大时系统谐振峰值、谐振频率变小、带宽较大,系统反映速度逐渐降低。因此 ξ_{a1} 、 ξ_{b1} 的选择不易过小或过大。

4.2 相同阻尼系数的极点配置法

所谓相同阻尼系数的极点配置法,即系统闭环传递函数具有相同的阻尼系数, ω_{a1} 、 ω_{b1} 在 $\xi_{a1} = \xi_{b1}$ 的射线上移动。在此基础之上可确定系统零点的位置。此种极点配置法零极点的分布如图8所示。

图8 相同阻尼系数的极点配置法示意图

将 $\xi_{a1} = \xi_{b1} = \xi_1$ 代入式(48)、(49), 整理后可得到

$$\omega_{a1}\omega_{b1} = \omega_1^2 \quad (59)$$

$$\left(\frac{\omega_{a1}^2 + \omega_{b1}^2}{\omega_{a1}\omega_{b1}} \right) = \frac{F_{a1}^2}{I_a - F_{a1}^2} - 4\xi_1^2 + 2 \quad (60)$$

将式(60)写成式(61)、(62)

$$\left(\frac{\omega_{a1} + \omega_1}{\omega_1} \right)^2 = \frac{F_{a1}^2}{I_a - F_{a1}^2} - 4\xi_1^2 + 4 \quad (61)$$

$$\left(\frac{\omega_{a1} - \omega_1}{\omega_1} \right)^2 = \frac{F_{a1}^2}{I_a - F_{a1}^2} - 4\xi_1^2 \quad (62)$$

可得到式(63)、(64)

$$\omega_{a1} = \frac{\sqrt{\frac{F_{a1}^2}{I_a - F_{a1}^2} - 4\xi_1^2 + 4} - \sqrt{\frac{F_{a1}^2}{I_a - F_{a1}^2} - 4\xi_1^2}}{2} \omega_1 \quad (63)$$

$$\omega_{b1} = \frac{\sqrt{\frac{F_{a1}^2}{I_a - F_{a1}^2} - 4\xi_1^2 + 4} + \sqrt{\frac{F_{a1}^2}{I_a - F_{a1}^2} - 4\xi_1^2}}{2} \omega_1 \quad (64)$$

可根据式(51)、(52)可得到 PI 参数如式(65)、(66)所示

$$K_p = 2\xi_1(I_a - F_{a1}^2) \sqrt{\frac{F_{a1}^2}{I_a - F_{a1}^2} - 4\xi_1^2 + 4\omega_1} \quad (65)$$

$$K_I = (I_a - F_{a1}^2)\omega_1^2 \quad (66)$$

此时系统闭环传递函数如式(67)所示

$$\frac{\omega_m(s)}{\omega^*(s)} = \frac{D_2}{N_2} \quad (67)$$

式(67)中分子 D_2 、分母 N_2 的表达式如式(68)、(69)所示

$$D_2 = 2\xi_1 \sqrt{\frac{F_{a1}^2}{I_a - F_{a1}^2} - 4\xi_1^2 + 4\omega_1 s^3 + \omega_1^2 s^2 + 2\xi_1 \sqrt{\frac{F_{a1}^2}{I_a - F_{a1}^2} - 4\xi_1^2 + 4\omega_1^3 s + \omega_1^4}} \quad (68)$$

$$N_2 = s^4 + \left(2\xi_1 \sqrt{\frac{F_{a1}^2}{I_a - F_{a1}^2} - 4\xi_1^2 + 4} \right) \omega_1 s^3 + \left(\frac{F_{a1}^2}{I_a - F_{a1}^2} + 2 \right) \omega_1^2 s^2 + 2\xi_1 \omega_1^3 \sqrt{\frac{F_{a1}^2}{I_a - F_{a1}^2} - 4\xi_1^2 + 4s + \omega_1^4} \quad (69)$$

ξ_1 、 ω_{a1}/ω_{b1} 取值决定了系统的最大超调量、峰值时间、调整时间, 如图 9 所示。

从图 9 可以得出: 在相同阻尼系数情况下, ξ_{a1} 取值较小时系统谐振峰值、谐振频率较大, 此时系统需要较短时间达到稳定状态, 系统稳定性较差。随着 ξ_{a1} 逐渐增大, 系统谐振峰值逐渐减小, 系统动态性能愈加平稳, 当 $\xi_{a1} \geq 0.8$ 时系统谐振峰值、谐振频率变化不大, 但 ξ_{a1} 取值对带宽影响不大。 ω_{a1}/ω_{b1} 比值对系统谐振峰值影响不大, 但对谐振频率和带

图 9 相同阻尼系数的极点配置法系统评价指标图

宽有影响, 谐振频率和带宽随着 ω_{a1}/ω_{b1} 比值的增大而增大, 系统反映时间增加, 当 ω_{a1}/ω_{b1} 比值为 3 时系统获得良好的动态响应。

4.3 相同实部的极点配置法

所谓相同实部的极点配置法, 即系统闭环传递函数具有相同的阻尼系数, ξ_{a1} 、 ξ_{b1} 在 $-\xi_{a1}\omega_{a1} = -\xi_{b1}\omega_{b1}$ 的线上移动。在此基础之上可确定系统零点的位置。此种极点配置法零极点的分布如图 10 所示。

图 10 相同实部的极点配置法示意图

将 $\xi_{a1}\omega_{a1} = \xi_{b1}\omega_{b1}$ 代入式(48)、(49), 整理后可得到

$$\omega_{a1}^2 + \omega_{b1}^2 = 2\omega_1^2 \quad (70)$$

$$\omega_1^2(\omega_{a1}^2 + \omega_{b1}^2 + 4\xi_{a1}^2\omega_{a1}^2) - \omega_{a1}^2\omega_{b1}^2 = \omega_1^4 \left(1 - \frac{F_{a1}^2}{I_a - F_{a1}^2} \right) \quad (71)$$

将式(71)改写成式(72)所示的形式

$$(\omega_{a1}^2 + \omega_{a1}^2(2\xi_{a1}^2 - 1))^2 = \omega_1^4 \left(4\xi_{a1}^4 - 4\xi_{a1}^2 + \frac{F_{a1}^2}{I_a - F_{a1}^2} \right) \quad (72)$$

进一步整理可得

$$\omega_{a1} = \omega_1 \sqrt{1 - 2\xi_{a1}^2 + \sqrt{4\xi_{a1}^4 - 4\xi_{a1}^2 + \frac{F_{a1}^2}{I_a - F_{a1}^2}}} \quad (73)$$

同理可得式(74)

$$\omega_{b1} = \omega_1 \sqrt{1 + 2\xi_{a1}^2 - \sqrt{4\xi_{a1}^4 - 4\xi_{a1}^2 + \frac{F_{a1}^2}{I_a - F_{a1}^2}}} \quad (74)$$

所以有式(75)、(76)成立

$$K_P = 4(I_a - F_{a1}^2)\xi_{a1}\omega_1 \sqrt{1 - 2\xi_{a1}^2 + \sqrt{4\xi_{a1}^4 - 4\xi_{a1}^2 + \frac{F_{a1}^2}{I_a - F_{a1}^2}}} \quad (75)$$

$$K_I = (I_a - F_{a1}^2) \sqrt{1 - \left(2\xi_{a1}^2 - \sqrt{4\xi_{a1}^4 - 4\xi_{a1}^2 + \frac{F_{a1}^2}{I_a - F_{a1}^2}}\right)^2} \quad (76)$$

此时系统闭环传递函数如式(77)所示

$$\frac{\omega_m(s)}{\omega^*(s)} = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s^1 + a_4} \quad (77)$$

式(77)中具体系数如下所示

$$\begin{aligned} b_0 &= 4\xi_{a1}\omega_1 \sqrt{1 - 2\xi_{a1}^2 + \sqrt{4\xi_{a1}^4 - 4\xi_{a1}^2 + R}} \\ b_1 &= \sqrt{1 - \left(2\xi_{a1}^2 - \sqrt{4\xi_{a1}^4 - 4\xi_{a1}^2 + R}\right)^2} \\ b_2 &= 4\xi_{a1}\omega_1^3 \sqrt{1 - 2\xi_{a1}^2 + \sqrt{4\xi_{a1}^4 - 4\xi_{a1}^2 + R}} \\ b_3 &= \omega_1^2 \sqrt{1 - \left(2\xi_{a1}^2 - \sqrt{4\xi_{a1}^4 - 4\xi_{a1}^2 + R}\right)^2} \\ a_1 &= 4\xi_{a1}\omega_1 \sqrt{1 - 2\xi_{a1}^2 + \sqrt{4\xi_{a1}^4 - 4\xi_{a1}^2 + R}} \\ a_2 &= \left(\omega_1^2(1 + R) + \sqrt{1 - \left(2\xi_{a1}^2 - \sqrt{4\xi_{a1}^4 - 4\xi_{a1}^2 + R}\right)^2} \right) \\ a_3 &= 4\xi_{a1}\omega_1^3 \sqrt{1 - 2\xi_{a1}^2 + \sqrt{4\xi_{a1}^4 - 4\xi_{a1}^2 + R}} \\ a_4 &= \omega_1^2 \sqrt{1 - \left(2\xi_{a1}^2 - \sqrt{4\xi_{a1}^4 - 4\xi_{a1}^2 + R}\right)^2} \end{aligned}$$

其中 R 的表达式如式(78)所示

$$R = \frac{F_{a1}^2}{I_a - F_{a1}^2} \quad (78)$$

ξ_1 、 ω_{b1}/ω_{a1} 取值决定了系统的最大超调量、峰值时间、调整时间,如图 11 所示。

从图 11 可以得出:在相同实部情况下, ξ_{a1} 和 ω_{a1}/ω_{b1} 取值较小时系统谐振峰值较大,此时系统需要较短时间达到稳定状态,系统稳定性较差。随着 ξ_{a1} 和 ω_{a1}/ω_{b1} 逐渐增大,系统谐振峰值变化不大,系统动态性能愈加平稳。当 $0.6 \leq \xi_{a1} \leq 0.8$ 时系统谐振频率取得最大值,但 ω_{a1}/ω_{b1} 取值对带宽影响不大, ω_{a1}/ω_{b1} 比值大于 1 时系统谐振频率不变。 ξ_{a1} 取值对系统带宽影响不大, ω_{a1}/ω_{b1} 比值增大,系统带宽增大,系统抗干扰能力变弱。

图 11 相同实部的极点配置法系统评价指标图

5 数值仿真分析

5.1 极点阻尼系数、位姿对系统影响

本文分析柔性机械臂在三种不同的位姿下,伺服驱动系统使用极点配置的 PI 控制策略,伺服系统转速环输出转速的情况。根据上述公式计算可得柔性机械臂在不同位姿等效后的柔性负载参数如表 2 所示。对柔性负载伺服驱动系统电动机端进行转速控制,分别采用三种极点配置策略确定 PI 参数,

进行仿真, 探究柔性机器臂不同位姿和极点阻尼系数对伺服驱动系统电动机输出转速的影响。仿真结果如图 12~14 所示。

表 2 等效柔性负载参数表

参数	位姿 1	位姿 2	位姿 3
弹性模量 $EI / (\text{N} \cdot \text{m}^2)$	395	395	395
线密度 $\rho_l / (\text{kg}/\text{m})$	0.78	0.585	0.468
长度 l / m	1.2	1.6	2
体密度 $\rho / (\text{kg}/\text{m}^3)$	7 800	5 850	4 680
厚度 b / m	0.01	0.01	0.01
高度 h / m	0.01	0.01	0.01
负载转动惯量 $I_a / (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	0.449 28	0.798 72	1.248
一阶模态柔性耦合系数 $F_{a1} / (\text{kg}^{1/2} \cdot \text{m})$	0.638 99	0.851 84	1.064 8
一阶模态频率 $\omega_1 / (\text{rad}/\text{s})$	54.94	35.686 4	25.534
一阶模态特征根值 β_1	1.562 5	1.171 9	0.937 5

由图 12 可知: 相同幅值的极点配置策略下, 在 $\xi_{a1} \in (0, 2)$ 的区间上, 随着阻尼系数的增大, 系统超调量减小, 电动机端输出速度波动减弱, 机械谐振程度减弱。在电动机启动阶段, 阻尼系数取值越小, 电动机速度越小。

对比图 12a、12b、12c 可以发现: 在位姿 1 时柔性机械臂等效的柔性负载长度、转动惯量较小, 在此位姿若选择较小的阻尼系数, 电动机输出速度波动频率较快, 但随着时间的增加速度波动程度降

低。选择同一阻尼系数随着等效柔性负载的长度、转动惯量增大, 电动机端输出速度达到稳定所需的时间变长, 电动机输出转速到达稳定前速度的波动越剧烈。故使用此种极点配置方法时, 长度、转动惯量较大的柔性负载应选择较大的阻尼系数。该方法相比较于另两种方法, 系统调整时间较长。

由图 13 可知: 相同阻尼系数的极点配置策略下, 阻尼系数对电动机输出端速度的影响与相同幅值配置策略相同。对比图 13a、13b、13c 可以发现: 在位姿 3 时柔性机械臂等效的柔性负载长度、转动惯量较大, 在此位姿若选择较小的阻尼系数, 电动机输出速度波动频率较小, 但随着时间的增加速度波动程度降低。柔性负载长度、转动惯量变化的情况与幅值相同配置策略一致。故使用此种极点配置方法时, 长度、转动惯量较大的柔性负载应选择较大的阻尼系数。

由图 14 可知: 相同实部的极点配置策略下, 阻尼系数取小值时电动机端输出速度需要较长时间都无法达到规定值。随着阻尼系数的增大, 系统达到规定转速所需时间减小。但应用此种极点配置方法, 会出现欠阻尼现象。对比图 14a、14b、14c 可以发现: 柔性机械臂等效的柔性负载长度、转动惯量较大, 使用此种极点配置方法难以取得理想的效果。故该方法只适合柔性负载长度、转动惯量较小的情况。

(a) 位姿1

(b) 位姿2

图12 柔性机械臂相同幅值的极点配置策略仿真结果

图13 柔性机械臂相同阻尼系数的极点配置策略仿真结果

图 14 柔性机械臂相同实部的极点配置策略仿真结果

5.2 极点配置法与传统方法对比

针对上文柔性机械臂处于三种不同位姿，分别采用 3 种极点配置法和传统方法——Ziegler-Nichols 方法确定 PI 参数，数值仿真结果如图 15 所示。

由图 15 可知，使用极点配置法较传统方法，系统达到稳定状态的时间更短，控制效果较好。3 种极点配置法相比较，应该优先选择相同幅值、相同阻尼系数方法。

图15 不同PI参数整定方法仿真结果图

6 结论

本文将柔性机械臂等效成柔性负载,建立柔性负载伺服驱动系统动力学模型,采用PI控制策略对伺服驱动系统转速环进行控制,应用的3种不同类型的极点配置法,确定了柔性机械臂在不同位姿下的PI解调器参数。并讨论了阻尼系数对电动机端输出转速的影响。

(1) 本文所提出的采用PI调节器对柔性负载伺服驱动系统进行极点配置的方法,能够清楚地看出PI调节器参数与系统指标的关系。可以通过选择PI解调器参数来减小电动机输出转速的波动,对PI调节器参数整定有实用价值。

(2) 在应用极点配置法时,应首先考虑相同幅值、相同阻尼系数的极点配置方法。此两种方法可以适应柔性负载回转半径、转动惯量较大的情况,并且对于阻尼系数的选取不是十分严格。若选择相同实部的极点配置方法,应谨慎选择阻尼系数,阻尼系数过大、过小都不能使系统达到稳定状态。

(3) 通过数值仿真实例可知,对于柔性机械臂,其等效柔性负载参数与机械臂的位姿有关,应在设计PI调节器参数时考虑这种位姿变化对系统的影响。通过仿真结果验证了基于极点配置的参数整定方法的有效性。

参考文献

- [1] MENG Deshan. Vibration suppression of a large flexible spacecraft for on-orbit operation[J]. Science China (Information Sciences), 2017(5): 36-50.
- [2] 杨亮亮,王杰,王飞,等. 基于最优控制迭代学习的直线伺服系统振动抑制研究[J]. 机械工程学报, 2019, 55(15): 217-225.
YANG Liangliang, WANG Jie, WANG Fei, et al. Research on vibration suppression of linear servo system based on optimal control iterative learning[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(15): 217-225.
- [3] MA C, CAO J, QIAO Y. Polynomial-method-based design of low-order controllers for two-mass systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2013, 60(3): 969-978.
- [4] OH S. High-precision robust force control of a series elastic actuator[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2017, 22(1): 71-80.
- [5] O' SULLIVAN T M, BINGHAM C M, SCHOFIELD N. High-performance control of dual-inertia servo-drive systems using low-cost integrated SAW torque transducers[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2006, 53(4): 1226-1237.
- [6] O' SULLIVAN T M, BINGHAM C M, SCHOFIELD N.

- Observer-based tuning of two-inertia servo-drive systems with integrated SAW torque transducers[J]. IEEE Transaction on Industrial Electronics, 2007, 54(2): 1080-1091.
- [7] KATSURA S, OHNISHI K. Force servoing by flexible manipulator based on resonance ratio control[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2007, 54(1): 539-547.
- [8] FELIU V, PEREIRA E, DÍAZ I M. Passivity-based control of single-link flexible manipulators using a linear strain feedback[J]. Mechanism and Machine Theory, 2014, 71: 191-208.
- [9] 丁有爽, 肖曦. 基于极点配置的永磁同步电机驱动柔性负载 PI 调节器参数确定方法[J]. 中国电机工程学报, 2017(4): 293-307.
- DING Youshuang, XIAO Xi. Parameter tuning methods based on pole placement for PI controllers of flexible loads driven by PMSM[J]. Proceedings of CSEE, 2017(4): 293-307.
- [10] 丁有爽, 肖曦. 伺服系统柔性负载建模方法研究[J]. 中国电机工程学报, 2016(3): 818-827.
- DING Youshuang, XIAO Xi. Mathematical modeling of flexible load in servo system[J]. Proceedings of CSEE, 2016(3): 818-827.
- [11] HE W, HE X, ZOU M, et al. PDE model-based boundary control design for a flexible robotic manipulator with input backlash[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2018(1): 1-8.
- [12] ZHANG S, HUANG D. End-point regulation and vibration suppression of a flexible robotic manipulator[M]. John Wiley & Sons, Inc., 2017.
- [13] CAO F, LIU J. An adaptive iterative learning algorithm for boundary control of a coupled ODE-PDE two-link rigid-flexible manipulator[J]. Journal of the Franklin Institute, 2016: S0016003216303738.49/5000.
- [14] SAARAKKALA S E, HINKKANEN M. State-space speed control of two-mass mechanical systems: Analytical tuning and experimental evaluation[J]. IEEE Transactions on Industry Applications, 2014, 50(5): 3428-3437.
- [15] 姜仁华, 刘闯, 宁银行. 雷达伺服系统的自适应摩擦力矩补偿控制策略[J]. 机械工程学报, 2019, 55(18): 187-195.
- JIANG Renhua, LIU Chuang, NING Yinhang. Control strategy with adaptive friction torque compensation for radar servo system[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(18): 187-195.
-
- 作者简介: 李小彭, 男, 1976 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为机械综合设计理论方法及应用、结合面振动摩擦耦合动力学。
- E-mail: xpli@me.neu.edu.cn
- 尚东阳(通信作者), 1995 年出生, 硕士研究生。主要研究方向为机器人动力学与控制策略。
- E-mail: 844377236@qq.com