DOI: 10.3901/JME.2020.20.001

Timoshenko梁的变形场重构及传感器位置优化*

赵飞飞¹ 曹开拓¹ 保宏¹ 高国明²

(1. 西安电子科技大学电子装备结构设计教育部重点实验室 西安 710071;

2. 中国船舶重工集团公司第七二四研究所 南京 210003)

摘要: 针对 KO 位移理论仅适用于重构单方向位移场问题, 提出一种适用于六自由度位移场重构的新方法, 称之为“多维积分法”。依据 Timoshenko 梁的静力学平衡方程, 建立了位移、转角与外载荷之间的数学模型。并针对不同的外载荷环境, 推导出相应的应变场函数和位移场函数, 建立了表面应变与截面应变之间的转换关系。为了提升该方法的容差性, 以重构位移场的精确性和稳定性为优化目标, 建立了关于应变传感器位置的多目标粒子群优化模型。以机翼框架为试验平台, 对其进行有限元分析, 建立优化目标模型, 给出优化后的应变传感器的布置方案。并以此方案为依据, 分别利用有限元分析结果和实测梁表面应变值来重构位移场。试验结果表明, 提出的“多维积分法”在两种不同形式的外载荷作用下均呈现出较高的重构精度。

关键词: KO 位移理论; Timoshenko 梁; 静力平衡方程; 容差性; 多目标粒子群优化模型

中图分类号: V19

Deformation Field Reconstruction of Timoshenko Beam and Optimization of Sensor Placement

ZHAO Feifei¹ CAO Kaituo¹ BAO Hong¹ GAO Guoming²

(1. Key Laboratory of Electronic Equipment Structure Design of Ministry of Education,

Xidian University, Xi'an 710071;

2. 724 Research Institute of China Shipbuilding Heavy Industry Group Corporation, Nanjing 210003)

Abstract: For the problem that KO displacement theory can be only applicable to the reconstruction of the one-dimensional deformation field, a new method is presented for reconstructing six degree of freedom displacement field, which is known as “multidimensional integration method”. According to the static equilibrium equation of Timoshenko beam, the mathematical model is established between displacement, rotation and external load. And the corresponding strain field functions and displacement field functions are deduced and the translation relation between section strain and surface strain is established for different external load. In order to improve the tolerance of the presented method, the accuracy and the robustness of the reconstruction displacement are taken as the optimization objective function to established multi-objective particle swarm optimization model for strain sensor placement. The wing frame is taken as the experimental platform to perform the finite element analysis, establish optimization objection model, and give the optimized strain sensor distribution scheme. And on the basis of this scheme, the displacement field is reconstructed by using the results of finite element analysis and the measured surface strain. The experimental results show that the proposed “dimensional integration method” presents a high reconstruction accuracy under the action of two different forms of external loads.

Key words: KO displacement theory; Timoshenko beam; static equilibrium equation; tolerance; multi-objective particle swarm optimization model

0 前言

近些年来, 为了对我国电子装备技术的改造升

级, 实现远距离大范围的动态目标搜索与跟踪。这一目的就要求天线需要很大的功率孔径积, 因此该类电子装备对结构的轻量化要求很高。然而轻量化必然带来结构刚度的降低, 结构易发生变形, 进而影响天线的电性能。为此, 有学者提出主动电补偿的技术方法, 即通过实时测量天线结构在空间中的

* 国家自然科学基金资助项目(51775401, 51675398)。20191205 收到初稿, 20200605 收到修改稿

相对位姿, 并反馈给控制系统或执行机构进行相关参数的调整, 进而达到电性能补偿的目的^[1-3]。

结构变形测量方式有很多种, 大致可分为两类: 接触式测量和非接触测量。非接触式测量主要采用摄影、激光跟踪仪和激光位置传感器 (Position sensing device, PSD) 等方式直接测量^[4-6]。但受限于测量时间、测量环境以及测量仪器本身的要求 (如: 摄影测量要求现场测量环境平静稳定, 不适合烟雾、粉尘以及强光环境), 难以实现对空间天线位姿的实时测量。接触式测量主要是采用加速度计、应变传感器等方式来获得变形信息, 进而间接计算结构变形位移。目前基于应变测量信息, 重构位移场的方法主要包含: KO 位移理论、插值形函数、神经网络法以及逆有限元法等。

插值形函数利用一组先验空间全局或者分段连续基函数结合合适的权系数来拟合测量应变场, 进而, 通过应变-位移关系来获得变形位移^[7-9]。尤其是当正态模型用作基函数时, 这个重构算法称作“模态法”。但其缺点在于需要高保真的三维模型和大量的应变传感器。封思远等^[10]采用模糊网络进行自主学习, 进而重构变形场。MAO 等^[11]将神经网络法和模态法做了比较, 发现当外部载荷不断变化时, 模态法就呈现出了较高的预测精度。美国兰利研究中心提出逆有限元法, 其利用一个最小二乘法来建立测量应变和变形位移之间的数学模型。这个方法的特点在于不需要大量先验知识, 例如: 外载荷大小、材料属性、惯性或阻尼结构特性等模型参数, 因而被不断发展, 广泛的应用于板、梁和壳单元的位移场重构^[12-15]。此外, KO 等^[16-19]通过对离散的测量应变做积分来估算梁的变形位移, 因此, 这个方法也成为了 KO 位移理论法。AKL 等^[20]基于传感器测量值和有限元法, 对连续测量的应变值做积分来获得节点位移。

在这个方法中, 由于结构单元划分十分精细, 大量应变传感器的运用使得该方法可高精度的重构结构变形。然而, 该方法仅准确测量出一维方向变形信息, 难以对结构变形进行三维重构。所以为了减少应变传感器的数量, 并适用于三维变形位移场的重构, 本文以 Timoshenko 梁受力平衡为依据, 分别建立了在两种工况下, 三维位移、转角与外载荷之间的关系, 推导出了两种工况下的应变场函数和位移场函数。然后, 考虑到试验过程中应变传感器位置的安装误差造成较大的位移场重构误差, 则提出以精度和鲁棒性为目标函数, 建立双目标优化模型。最后, 为了验证本方法的精确性与稳定性, 以优化结果为依据, 分别利用有限元提出的应变和实

际测量的应变来重构位移场。试验结果表明该方法在两种外载荷分布类型下均能实现精确和稳定的重构变形的位移场。

1 Timoshenko 梁理论

在经典欧拉-伯努利梁理论中, 由于不考虑横向剪切对变形的影响, 所以其仅适用于细长梁的变形场计算。然而对于短梁, 横向剪切对变形的影响就不容忽视。为此, 铁木辛柯提出了考虑横向剪切和扭转变形的修正理论, 其基于两个假设。

(1) 忽略翘曲变形, 即变形前垂直与中性轴的横截面, 变形后仍为平面。

(2) 变形后的横截面与中性轴具有一定的剪切角, 如图 1 所示。

图 1 铁木辛柯梁弯曲变形图

依据铁木辛柯梁变形理论, 梁横截面上任意一点位移可通过中性轴上的位移结合空间位置来表示

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = u(x) + z\theta_y(x) - y\theta_z(x) \\ u_y(x, y, z) = v(x) + z\theta_x(x) \\ u_z(x, y, z) = w(x) - y\theta_x(x) \end{cases} \quad (1)$$

式中, u 、 v 、 w 是中性轴上一点沿 x 、 y 和 z 方向的平移位移; θ_x 、 θ_y 、 θ_z 是绕坐标轴 x 、 y 和 z 的转角位移。其中由平移位移和转角组成的位移矢量为 $\mathbf{u} = (u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z)$, 并进一步对位移场函数沿轴向求一阶导, 可获得应变与位移之间的关系

$$\begin{cases} \epsilon_x(x, y, z) = e_1(x) + z e_2(x) + y e_3(x) \\ \gamma_{xz}(x, y, z) = e_4(x) + y e_6(x) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) = e_5(x) - z e_6(x) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} e_1(x) = u_{,x}(x) \\ e_2(x) = \theta_{y,x}(x) \\ e_3(x) = -\theta_{z,x}(x) \\ e_4(x) = w_{,x} + \theta_y(x) \\ e_5(x) = v_{,x} - \theta_z(x) \\ e_6(x) = \theta_{x,x}(x) \end{cases}$$

式中, ε_x 是 x 方向主应变; γ_{xy} , γ_{yz} 是切应变。

$e = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ 是截面应变。

当对梁单元施加均布载荷 $q(x)$ 和力矩载荷 $m(x)$ 时, 如图 2 所示, 根据截面受力平衡, 可得静力微分方程如下

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[kGA \left(\frac{ds}{dx} - \theta \right) \right] + q(x) = 0 \\ \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d\theta}{dx} \right) + kGA \left(\frac{ds}{dx} - \theta \right) + m(x) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中, k 是横截面修正系数; $s(x)$ 是变形位移; $\theta(x)$ 是绕坐标轴旋转角; EI 是梁的弯曲刚度; GA 是梁的剪切刚度; $m(x)$ 是载荷对横截面中心点的力矩^[21]。

图 2 梁单元承受的均布载荷和弯矩载荷

对于截面载荷 N 、 Q_y 和 Q_z 时, 可得如下等效方程

$$\begin{cases} N_{,x} + q_x = 0 \\ Q_{y,x} + q_y = 0 \\ Q_{z,x} + q_z = 0 \\ m_x = 0 \\ m_y = Q_z \\ m_z = Q_y \\ M_{x,x} = 0 \\ M_{y,x} = Q_z \\ M_{z,x} = Q_y \end{cases} \quad (4)$$

式中, M_x 是关于 x 轴的扭矩; M_y 、 M_z 是关于 y 、 z 轴的弯矩。

2 变形场重构

2.1 集中载荷

当对梁末端施加集中载荷时, 截面力(N 、 Q_y 和 Q_z)和扭矩(M_x)均为常数。弯矩(M_y 和 M_z)沿轴向线性分布。依据式(3)可得

$$\begin{cases} \frac{ds}{dx} - \theta(x) = \text{const} \\ \frac{d\theta}{dx} = \text{linear} \end{cases} \quad (5)$$

对于等截面梁单元来说, 当截面面积 A 为常数

时, 依据式(2)和(5)可以推论出截面应变 e_1 、 e_4 、 e_5 、 e_6 为常数; e_2 、 e_3 为线性分布, 表示为

$$\begin{cases} e_1(x) = \frac{N}{EA} = c_1 \\ e_2(x) = \frac{M_y}{D_y} = c_3x + c_4 \\ e_3(x) = \frac{M_z}{D_z} = c_5x + c_6 \\ e_4(x) = \frac{Q_z}{G_z} = c_7 \\ e_5(x) = \frac{Q_y}{G_y} = c_8 \\ e_6(x) = \frac{M_x}{J_x} = c_2 \end{cases} \quad (6)$$

式中, $D_y \equiv EI_y$ 和 $D_z \equiv EI_z$ 是弯曲刚度; $G_y \equiv k_y^2 GA$ 和 $G_z \equiv k_z^2 GA$ 是剪切刚度; k_y^2 和 k_z^2 是剪切修正系数^[22]。

依据式(2)中的截面与应变关系, 可推论获知位移函数 θ_y 和 θ_z 为二次函数; v 和 w 为三次函数; u 和 θ_x 为一次函数。因此, 移场可以表示为

$$\begin{cases} u(x) = \int e_1 dx = c_1x + d_1 \\ \theta_x(x) = \int e_6 dx = c_2x + d_2 \\ \theta_y(x) = \int e_2 dx = \frac{c_3}{2}x^2 + c_4x + d_3 \\ \theta_z(x) = -\int e_3 dx = -\left(\frac{c_5}{2}x^2 + c_6x + d_4\right) \\ v(x) = -\int (\theta_z + e_5) dx = (c_8x - d_4)x - \left(\frac{c_5}{6}x^3 + \frac{c_6}{2}x^2\right) + f_1 \\ w(x) = \int (e_4 - \theta_y) dx = (c_7x - d_3)x - \left(\frac{c_3}{6}x^3 + \frac{c_4}{2}x^2\right) + f_2 \end{cases} \quad (7)$$

进一步, 结合悬臂梁边界条件: $u(x)=0$; $\theta_x(x)=0$; $\theta_y(x)=0$; $\theta_z(x)=0$; $v(x)=0$; $w(x)=0$, 可以确定参数 $d_i=0$ ($i=1,2,3,4$) 和 $f_i=0$ ($i=1,2$)。

2.2 均布载荷

当对梁单元施加均布剪切载荷(q_y 、 q_z 和 q_x 为 0) 时, 依据式(3)和式(4), 可得

$$\begin{cases} \frac{ds}{dx} - \theta = \text{linear} \\ \frac{d\theta}{dx} = \text{parabo} \end{cases} \quad (8)$$

因此由推论可得截面应变 e_4 、 e_5 为线性分布, e_2 、 e_3 为抛物线分布。由于轴向力和扭矩(N 、 M_x)仍

为常数, 所以截面应变 e_1 、 e_6 保持不变。

$$\left\{ \begin{aligned} e_1(x) &= \frac{N}{EA} = c_1 \\ e_6(x) &= \frac{M_x}{J_x} = c_2 \\ e_2(x) &= \frac{M_y}{D_y} = c_3x^2 + c_4x + c_5 \\ e_3(x) &= \frac{M_z}{D_z} = c_6x^2 + c_7x + c_8 \\ e_4(x) &= \frac{Q_z}{G_z} = c_9x + c_{10} \\ e_5(x) &= \frac{Q_y}{G_y} = c_{11}x + c_{12} \end{aligned} \right. \quad (9)$$

随后, 依据式(2)可知, 位移 u 和 θ_x 仍为一次函数; v 和 w 为四次函数; θ_y 和 θ_z 为三次函数。位移场表示如下

$$\left\{ \begin{aligned} u(x) &= \int e_1 dx = c_1x + d_1 \\ \theta_x(x) &= \int e_6 dx = c_2x + d_2 \\ \theta_y(x) &= \int e_2 dx = \frac{c_3}{3}x^3 + \frac{c_4}{2}x^2 + c_5x + d_3 \\ \theta_z(x) &= -\int e_3 dx = -\left(\frac{c_6}{3}x^3 + \frac{c_7}{2}x^2 + c_8x + d_4\right) \\ v(x) &= -\int(\theta_z + e_5)dx = \left(\frac{c_{11}}{2} - \frac{c_8}{2}\right)x^2 + (c_{12} - d_4)x - \\ &\quad \left(\frac{c_6}{12}x^4 + \frac{c_7}{6}x^3\right) + f_1 \\ w(x) &= \int(e_4 - \theta_y)dx = \left(\frac{c_9}{2} - \frac{c_5}{2}\right)x^2 + (c_{10} - d_3)x - \\ &\quad \left(\frac{c_3}{12}x^4 + \frac{c_4}{6}x^3\right) + f_1 \end{aligned} \right. \quad (10)$$

同理, 结合悬臂梁边界条件: $u(0)=0$; $\theta_x(0)=0$; $\theta_y(0)=0$; $\theta_z(0)=0$; $v(0)=0$; $w(0)=0$, 参数 $d_i=0$ ($i=1, 2, 3, 4$) 和 $f_i=0$ ($i=1, 2$)。

3 截面与表面应变转换关系

然而对于截面应变场函数式(6)和式(9)中含有的未知参数 c_i , 通常采用安装应变传感器测量实际应变的方法来确定。在本论文中, 以等截面圆梁为案例来分析其计算过程(由测量的表面应变计算截面应变)。建立柱面坐标系如图 3 所示,

应变传感器安装在梁的外表面 (x_i, θ_i, β_i) 。因此, 一点的截面应变可以与表面应变之间建立转换关系如下所示。

图 3 应变传感器在梁外表面的安装位置

$$\begin{aligned} \varepsilon_2^* &= (\delta, \delta s_\theta R, \delta c_\theta R, c_\beta s_\beta c_\theta, c_\beta s_\beta s_\theta, c_\beta s_\beta R) \times \\ &\quad (e_1(x_i), e_2(x_i), e_3(x_i), e_4(x_i), e_5(x_i), e_6(x_i))^T = \\ &\quad T \times (e_1(x_i), e_2(x_i), e_3(x_i), e_4(x_i), e_5(x_i), e_6(x_i))^T \quad (11) \end{aligned}$$

式中, $c_\beta = \cos \beta$, $c_\theta = \cos \theta$, $s_\beta = \sin \beta$, $s_\theta = \sin \theta$; $\delta = (c_\beta^2 - \mu s_\beta^2)$; μ 是泊松比; R 是圆梁截面外径。

在集中载荷作用下, 由于截面应变场函数中含有未知参数数目为 8。所以安装的应变传感器的个数也为 8 个并需要安装在至少 2 个截面上。同时, 对于均布载荷, 未知参数数目为 12, 所以需要 12 个应变传感器, 并需要安装在至少 3 个截面上。

如果将式(6)和式(9)中的应变函数 e_2 、 e_3 、 e_4 和 e_5 代入式(4)中, 则可以获得如下关系

$$e_5 = \frac{D_z}{G_y} e_{3,x} = m_2 e_{3,x} \quad e_4 = \frac{D_y}{G_z} e_{2,x} = m_1 e_{2,x} \quad (12)$$

所以安装传感器数目可以通过式(13)进一步减少。例如在集中载荷作用下应变传感器数目可以减为 6; 均布载作用时, 应变传感器数目为 8。

通过缩减传感器数目后, 截面应变函数式(6)和式(9)可以表示为

$$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)^T = XSH \times C \quad (13)$$

当集中载荷作用时, 矩阵 XSH 和 C 表示为

$$XSH = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_i & 1 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix}$$

当均布载荷作用时, 矩阵 XSH 和 C 表示为

$$XSH = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_i^2 & x_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_i^2 & x_i & 1 & 0 \\ 0 & 2m_1x_i & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m_2x_i & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \end{pmatrix}$$

则截面应变函数式(6)、(9)中的参数通过下式计算获得

$$C = (T \times XSH)^{-1} \times \varepsilon_2 = TR \times \varepsilon_2 \quad (14)$$

$$\varepsilon_2 = (\varepsilon_2^*(x_1, \theta_1, \beta_1), \varepsilon_2^*(x_2, \theta_2, \beta_2), \dots, \varepsilon_2^*(x_n, \theta_n, \beta_n))^T$$

$$T = (T_1(x_1, \theta_1, \beta_1), T_2(x_2, \theta_2, \beta_2), \dots, T_n(x_n, \theta_n, \beta_n))^T$$

当集中载荷时, $n = 6$; 均布载荷时 $n = 8$ 。

因此将式(14)代入式(7)、(10)中可得重构位移。

4 应变传感器布局优化

在实际测量应变过程中, 测量应变(ε^a)由于应变传感器的安装误差($\Delta\varepsilon$), 造成偏离精确值(ε^e), 从而降低变形形状重建精度, 如下式所示

$$\varepsilon^a = \varepsilon^e + \Delta\varepsilon \quad (15)$$

为了提升本方法的容差性, 提出对传感器的位置布局进行优化, 使得系统在含有测量误差的情况, 仍然能够精确的重构变形场位移。因此将重构位移的鲁棒性和精确性作为优化模型的两个重要指标。

依据文献[23]提供鲁棒性判定方法, 对式(14)中的转换矩阵 TR 进行分析

$$\cos\theta_i = \frac{TR_i^T \cdot [P] \cdot TR_i}{\|TR_i\| \cdot \|[P] \cdot TR_i\|} \quad (16)$$

并且

$$P = TR^i ((TR^i)^T TR^i)^{-1} (TR^i)^T$$

式中, TR_i 表示 TR 矩阵的第 i 个行矢量; TR^i 表示

TR 矩阵中取出第 i 个列矢量后, 重新组成的矩阵。所以鲁棒性目标函数可以表示为

$$\begin{cases} f = \min\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n\} \\ f_1 = -f \end{cases} \quad (17)$$

同时, 将相对均方根误差(Rate of RMSE and maximum deformation value, RRMS)作为优化目标函数来评估重构精度, 计算方法如下

$$\begin{cases} RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^n (disp^m(x_i, \theta_i, \beta_i) - disp^p(x_i, \theta_i, \beta_i))^2 / n} \\ RRMS = \frac{RMSE}{\max(disp^m)} \times 100\% \\ f_2 = -RRMS \end{cases} \quad (18)$$

式中, $disp(x_i)$ 是中性轴上节点处的变形位移; 上角标“m”是来源于 ANSYS 仿真节点处的变形量; 上角标“p”是利用提出方法计算得到节点处的变形位移; $RMSE$ 是变形重构的均方根误差。

传感器的布置方案优化, 就是在梁的表面找到一组传感器分布方案使得转换关系的鲁棒性(f_1)和重构精度(f_2)均好。为此, 提出采用多目标粒子群优化算法(Multi-objective particle swarm optimization, MOPSO), 建立的优化模型如式(19)所示

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad f(x_i, \theta_i, \beta_i) = \max(f_1, f_2) \\ & \text{s.t.} \quad x_i \in (0.1L, 0.9L) \\ & \quad \theta_i \in (-180^\circ, 180^\circ), \quad \beta_i = 0^\circ \text{ 或 } 45^\circ \end{aligned} \quad (19)$$

在之前的工作过程中, 针对双目标优化问题已经做过说明^[23]。并且本文和之前工作中不同点仅在于优化目标函数不同, MOPSO 优化参数设置完全相同, 因此在本文中不再详细说明。

5 仿真分析与试验验证

5.1 仿真分析

首先, 在有限元分析软件中(ANSYS 14.5)中, 建立长度 $L=1\,000\text{ mm}$, 外径 $R=13\text{ mm}$, 内径 $r=11.5\text{ mm}$, 密度 $p=2\,712.63\text{ kg/m}^3$ 、泊松比 $\nu=0.3$ 、弹性模量 $E=0.73 \times 10^5\text{ MPa}$ 、188 单元的中空铝梁模型。并将其沿轴向划分为 200 个微小单元, 横截面划分为 120 小块。如图 4 所示。并依据图 4a 所示的加载方式, 分别施加集中载荷($F_Y=250\text{ N}$, $F_Z=200\text{ N}$)和均布载荷($q_z = 0.05\text{ MPa}$)。并基于建立的多目标优化模型, 对中空梁传感器布局位置进行优化, 结果如图 5、6 所示。将整个解空间分为精确域、稳定域和最优解域。而在实际工程中, 由于传感器定位误差, 影响变形重构精度。所以, 我们将传感器粘贴位置选在精度和稳定性均好的最优解域内, 具体位置如

表 1 所示。并依据表 1 所示传感器布局方案，在 ANSYS 分析结果中提取应变和变形位移。然后利

用本文提出的重构方法对两种变形场进行位移场计算，结果如图 7、8 和表 2 所示。

图 4 加载方式与单元划分

图 5 集中载荷作用下优化结果

图 6 均布载荷作用下优化结

表 1 在不同外载荷作用下的应变传感安装位置

编号	集中载荷	均布载荷
ε_1	(0.13L, 201°, 0°)	(0.18L, -9°, 0°)
ε_2	(0.13L, 201°, 0°)	(0.3L, -9°, 0°)
ε_3	(0.62L, 135°, 0°)	(0.3L, 45°, 0°)
ε_4	(0.74L, -72°, 0°)	(0.3L, -120°, 0°)
ε_5	(0.88L, 51°, 0°)	(0.52L, -9°, 0°)
ε_6	(0.88L, -130°, 45°)	(0.62L, -60°, 0°)
ε_7	—	(0.62L, 90°, 45°)
ε_8	—	(0.8L, 180°, 0°)

图 7 在集中载荷作用下的位移场比较

图 8 在均布载荷作用下的位移场比较

表 2 两种工况下重构位移和理论位移对比

误差种类	集中载荷		均布载荷	
	Y 方向	Z 方向	Y 方向	Z 方向
MD^F/mm	37.82	30.37	0	22.6
MD^P/mm	37.76	31.44	4.6×10^{-2}	23.2
MER/mm	0.25	1.07	4.6×10^{-2}	0.6
$RMSE/\text{mm}$	0.14	0.56	0.02	0.32
$RRMS/\text{mm}$	0.35%	1.86%	0%	1.39%

表 2 中, MD 是最大变形位移; 上标 “F”、“P” 表示来自有限元分析的理论值和利用本方法重构的变形值。 MER 是绝对误差的最大值。

表 2 对比了有限元仿真的变形位移和利用本文提出的方法重构的变形位移。从这个结果中发现在集中载荷作用时, Y 、 Z 方向的理论最大变形位移 (MD^F) 分别 37.82 mm 和 30.37 mm, 最大绝对误差 (MER) 仅为 0.25 mm 和 1.07 mm, 均方根误差 ($RMSE$)

仅为 0.56 mm。此外,在均布载荷时,由于外部载荷沿着 Z 方向,所以 MD^F 在 Y 方向为 0。然而,由于重构误差原因,在 Y 方向的 MD^P 和 MER 均为 4.6×10^{-2} mm。此时,在 Z 方向的 MD^F 为 22.6 mm, MER 为 0.6 mm, $RRMS$ 为 1.39%。基于以上的结论,说明基于优化结果给出的布置方案在没有传感器安装误差的影响下,本方法能够精确地重构出变形位移。

5.2 试验验证

为了验证本文提出的逆有限元法的稳定性与精确性,搭建如图 9 所示的试验平台。其中,将一个由三段桁架组成的悬臂梁通过螺栓与右侧的立柱连接。并按照表 1 所示的两种传感器分布方案,安装应变传感器与位置传感器,如图 10a 所示^[22]。当对悬臂梁分别施加集中载荷(50 N, 100 N)和均布载荷(40 N, 160 N)后,利用加拿大北方数码股份有限公司(Northern digital incorporation, NDI)生产的六维动态追踪系统捕获位置传感器发光点,进而可计算得到梁的变形位移,结果如图 11、12 所示,精度分析如表 3 所示。其中,六维动态追踪系统的测量精度为 0.1 mm。

(a) 集中载荷试验

(b) 均布载荷试验

图 9 试验测试平台

(a) 应变传感器和应变传感器

(b) 六维动态追踪系统

图 10 测量系统

(a) Y方向的重构位移与测量位移

(b) Z方向的重构位移与测量位移

图 11 比较在不同集中载荷作用下重构位移与测量位移

图 12 比较在不同均布载荷作用下重构位移与测量位移

$$MER = \max |disp(x_i)^N - disp(x_i)^I| \quad (20)$$

式中, 上标 “N”、“I” 表示来自于实际测量和逆有限元法估算的变形数值。

从表 3 中, 可以看出在集中载荷作用时, 在 Y 方向, MD^N 为 -6.59 mm, -17.5 mm, $RMSE$ 为 0.8 mm, $RRMS$ 仅为 2.16% 和 2.34%。同时在均布载荷作用时, MD^N 为 -8.35 mm, -23.52 mm, 均方根误差小于 0.7 mm, $RRMS$ 为 2.22% 和 2.70%, 仍然保持在 3% 以内。

此外, 在 Z 方向, 发生较小的变形位移。当变形位移与位移测量系统精度量级相当时, 则重构误差占最大变形位移比例较大。但其绝对误差较小。例如, 在均布载荷 40 N 时, 虽然 $RRMS$ 为 22.80%, 但最大绝对误差为 0.02 mm。

因此, 根据前面的分析结果, 可以得出结论: 本文提出的逆有限元法在集中和均布载荷环境中均具有精确和稳定的重构能力。

表 3 两种外载荷分布下重构精度分析

误差种类	集中载荷/N				均布载荷/N			
	100		50		40		160	
	Y 方向	Z 方向	Y 方向	Z 方向	Y 方向	Z 方向	Y 方向	Z 方向
MD^N/mm	-36.59	1.97	-17.50	0.97	-8.35	0.11	-23.52	0.18
MD^I/mm	-37.56	2.00	-18.11	0.96	-8.21	0.05	-23.99	0.16
MER/mm	0.98	0.11	0.60	0.10	0.31	0.03	1.02	0.05
$RMSE/\text{mm}$	0.79	0.06	0.41	0.06	0.19	0.02	0.63	0.02
$RRMS/\text{mm}$	2.16%	3.19%	2.34%	6.07%	2.22%	22.80%	2.70%	8.40%

6 结论

形状感知是结构健康监测的一项关键技术, 其由离散表面应变测量值重构变形场。但传统 KO 位移理论只能重构单方向的位移场。为了解决这个问题, 本文提出了一种新的重构变形场方法, 称为“多维积分法”。首先, 对 Timoshenko 梁截面进行受力分析, 以建立位移、转角和外载荷之间的数学模型。并推导出在不同外载荷条件下应变场和位移场函数。然而, 考虑到在实际工程中传感器安装误差对重构精度的影响, 本文以重构位移场的精确性和稳定性为双目标, 建立优化模型。最后, 以机翼框架为试验平台, 对其进行有限元分析, 并建立优化模

型。根据优化结果给出的传感器布置方案, 分别利用有限元中提取的表面应变和实际测量的表面应变来重构位移场。试验结果表明, 多维积分法在有限元和实际测量中都能呈现出高的重构精度和稳定性且精度在 3% 以内。因此, 本文提出的重构方法是智能结构的形状感知和健康监测的一种强有力的工具。

参 考 文 献

- [1] 胡乃岗, 保宏, 连培园. 大型相控阵天线结构与调整机构一体化设计[J]. 机械工程学报, 2015, 51(1): 196-197.
HU Naigang, BAO Hong, LIAN Peiyuan. Synthetic design of structure and adjustment mechanism of large phased array antennas[J]. Journal of Mechanical

- Engineering, 2015, 51(1): 196-197.
- [2] 康明魁. 有源相控阵天线机电热耦合建模、误差分析与优化设计[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2015.
- KANG Mingkui. Coupled structural electromagnetic thermal modeling, error analysis and optimization design of active phased array antennas[D]. Xi'an: Xidian University, 2015.
- [3] GHERLONE M, CERRACCHIO P, MATTONE M. Shape sensing methods: Review and experimental comparison on a wing-shaped plate[J]. Progress in Aerospace Sciences, 2018, 99: 14-26.
- [4] 程志峰, 金超, 孙伟. 数字摄影测量在大型天线主面测量中的应用[J]. 河北省科学院学报, 2019, 36(1): 47-50.
- CHENG Zhifeng, JIN Chao, SUN Wei. Application of digital photogrammetry in main surface measurement of large antenna[J]. Journal of the Hebei Academy of Science, 2019, 36(1): 47-50
- [5] 朱永国, 张文博, 邓正平. 基于激光跟踪仪和机器视觉的飞机翼身对接装配偏差动态综合修正[J]. 机械工程学报, 2019, 55(24): 187-196.
- ZHU Yongguo, ZHANG Wenbo, DENG Zhengping. Dynamic synthesis correction of deviation for aircraft wing-fuselage docking assembly based on laser tracker and machine vision[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(24): 187-196.
- [6] 刘博学, 柏宏武, 李冬. 基于数字摄影的高低温热变形测量研究[J]. 空间电子技术, 2018, 15(3): 52-55.
- LIU Boxue, BAI Hongwu, LI Dong. Research on thermal distortion measurement based on digital photogrammetry [J]. Space Electronic Technology, 2018, 15(3): 52-55.
- [7] KIM H I, KANG L H, HAN J H. Shape estimation with distributed fiber bragg grating sensors for rotating structures[J]. Smart Materials and Structures, 2011, 20: 1-11.
- [8] RAPP S, KANG L H, HAN J H. Displacement field estimation for a two-dimensional structure using fiber bragg grating sensors[J]. Smart Materials and Structures, 2009, 18(2): 025006.
- [9] KANG L H, KIM D K, HAN J H. Estimation of dynamic structural displacements using fiber bragg grating strain sensors[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 305(3): 534-542.
- [10] 封思远, 保宏, 张旭东. 基于模糊网络的机翼天线变形测量方法[J]. 现代雷达, 2015, 37(11): 59-63.
- FENG Siyuan, BAO Hong, ZHANG Xudong. An airfoil antenna deformation measurement method based on fuzzy network[J]. Modern Radar, 2015, 37(11): 59-63.
- [11] MAO Z, TODD M. Comparison of shape reconstruction strategies in a complex flexible structure[C]// Proceedings of the SPIE 6932, Sensors and Smart Structures Technologies for Civil, Mechanical, and Aerospace System, May 1, 2008, San Diego, United States. California: SPIE, 2008.
- [12] ZHAO Feifei, XU Libo, BAO Hong. Shape sensing of variable cross-section beam using the inverse finite element method and isogeometric analysis[J]. Measurement, 2020, 185: 1-11.
- [13] TESSLER A, SCIUVA M D, GHERLONE M. A consistent refinement of first-order shear deformation theory for laminated composite and sandwich plates using improved zigzag kinematics[J]. Journal of Mechanics of Materials and Structures, 2010, 5(2): 341-367.
- [14] CERRACCHIO P, GHERLONE M, SCIUVA M D. A novel approach for displacement and stress monitoring of sandwich structures based on the inverse finite element method[J]. Composite Structures, 2015, 127: 69-76.
- [15] KEFAL A, TESSLER A, OTERKUS E. An enhanced inverse finite element method for displacement and stress monitoring of multilayered composite and sandwich structures[J]. Composite Structures, 2015, 179: 514-540.
- [16] KO W L, FLEISCHER V T. Further development of Ko displacement theory for deformed shape predictions of nonuniform aerospace structures[R]. California: NTRS 2009.
- [17] KO W L, RICHARD W L, FLEISCHER V T. Displacement theories for in-flight deformed shape predictions of aerospace structures[R]. California: NTRS 2007.
- [18] JUTTE C V, KO W L, STEPHENS C A. Deformed shape calculation of a full-scale wing using fiber optic strain data from a ground loads test[R]. California: NTRS 2011.
- [19] KO W L, RICHARDS W L, FLEISHER V T. Applications of the ko displacement theory to the deformed shape predictions of the doubly-tapered ikhana wing[R]. California: NTRS 2009.
- [20] AKL W, POH S, BAZ A. Wireless and distributed sensing of the shape of morphing structures[J]. Sensors and Actuators A-physical, 2007, 140(1): 94-102.
- [21] 蒋纯志, 金桂, 陈亚琦. 等截面铁木辛柯梁的分布传递函数方法[J]. 湖南科技学院学报, 2009, 30(8): 51-52.

- JIANG Chunzhi, JIN Gui, CHEN Yaqi. The distributed transfer function method of uniformed timoshenko beam[J]. Journal of Hunan University of Science and Engineering, 2009, 30(8): 51-52.
- [22] ZHAO Feifei, BAO Hong, XUE Song. Multi-objective particle swarm optimization of sensor distribution scheme with consideration of the accuracy and the robustness for deformation reconstruction[J]. Sensors, 2019, 19(6): 1306.
- [23] JOSHUA H G, SHIN J C, BOUWENSE M A. Minimum condition number by orthogonal projection rows election of artificial boundary conditions for finite element model update and damage detection[J]. Journal of Sound and Vibration, 2018, 433(27): 179-197.
-
- 作者简介: 赵飞飞, 男, 1990 年出生, 博士研究生。主要研究方向为结构健康监测。
E-mail: ffzhao@stu.xidian.edu.cn
- 保宏(通信作者), 男, 1971 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为雷达天线机构/结构变形测量与健康检测、机电系统故障诊断与结构控制集成设计与指向控制。
E-mail: hbao@xidian.edu.cn