DOI: 10.3901/JME.2020.17.137

考虑感应电动机模型的质量偏心单盘转子系统 Sommerfeld 效应及不平衡响应分析*

孔祥希¹ 牛俊开² 罗园庆¹ 许琦¹

(1. 沈阳工业大学机械工程学院 沈阳 110870;

2. 东北大学机械工程与自动化学院 沈阳 110819)

摘要: Sommerfeld 效应是由于非理想原动机在转子系统临界转速附近无法提供足够的动力而产生的一种非线性跳跃现象。研究了由感应电动机驱动的一个质量偏心单盘转子系统的 Sommerfeld 效应及不平衡响应。将感应电动机的动力学模型引入到转子系统中,建立了电动机-转子系统动力学模型。在充分考虑电动机与转子系统相互作用的基础上,得到了供电频率与转子转速之间的关系表达式,并进行了稳定性分析。对具有不同质量偏心的电动机-转子系统的不平衡响应进行了分析,并基于 Matlab/Simulink 进行了仿真验证。结果表明:当转子偏心质量与转子总质量的质量比 $\eta < 0.026$ 时,电动机能够提供足够动力使转子系统平稳通过临界转速,电动机-转子系统不会出现 Sommerfeld 效应;当质量比满足 $0.026 < \eta < 0.083$ 时,在转子系统临界转速附近,电动机所提供的最大电磁转矩小于转子系统平稳通过临界转速所需输出转矩,电动机-转子系统出现 Sommerfeld 效应;当 $\eta > 0.083$ 时,随着感应电动机供电频率的增加,电动机将无法提供足够的动力使转子系统通过临界转速,转子系统转速将始终低于临界转速。通过研究,可以为转子系统的动力设计与选型提供借鉴。

关键词: 转子系统; 感应电动机; Sommerfeld 效应; 非线性跳跃

中图分类号: TH113

Sommerfeld Effect and Unbalanced Response Analysis in Single Disk Rotor System with Eccentric Mass Considering Induction Motor Model

KONG Xiangxi¹ NIU Junkai² LUO Yuanqing¹ XU Qi¹

(1. School of Mechanical Engineering, Shenyang University of Technology, Shenyang 110870;

2. School of Mechanical Engineering and Automation, Northeastern University, Shenyang 110819)

Abstract: Sommerfeld effect is a nonlinear jumping phenomenon caused by the failure of a non-ideal motor to provide enough power near the critical speed of the system to enable the system to pass through the resonance region smoothly. Sommerfeld effect and unbalanced response of an induction motor driven single disk rotor system with eccentric mass are studied. The dynamic model of induction motor is introduced into the rotor system, and the induction motor rotor dynamic model is established. It is found that Sommerfeld effect will occur in the induction motor - rotor system based on fully considering the interaction between induction motor and rotor system. The influences of the eccentric mass on Sommerfeld effect and unbalanced response are analyzed. The results show that when the mass ratio of eccentric mass to total rotor mass η is about less than 0.026, namely $\eta < 0.026$, since the motor can provide enough power to ensure the rotor system smoothly pass the critical speed, Sommerfeld effect will not occur in the induction motor - rotor system. When $0.026 < \eta < 0.083$, since the max electromagnetic torque provided by the motor is less than the output torque required for the rotor system to smoothly pass the critical speed, Sommerfeld effect will occur. When $\eta > 0.083$, with the supply frequency increasing, the induction motor will not provide enough power to make the rotor system pass through the critical speed, and the rotor system's speed will always be lower than the critical speed. The research can provide reference for the power design and selection of rotor system.

Key words: rotor system; induction motor; Sommerfeld effect; nonlinear jump

* 国家自然科学基金(51705337, 51675350)和中国博士后科学基金(2017M611258)资助项目。20190813 收到初稿, 20200515 收到修改稿

0 前言

通常认为提供有限动力的原动机称为非理想原动机,例如,柴油机、感应电动机、直流电动机等。在工程中,几乎所有的原动机所提供的动力均是有限的。而在大多数机械系统的研究中,均未考虑原动机对系统的影响,而将原动机视为理想原动机,能够完全满足系统所需动力的要求^[1]。当原动机驱动机械系统接近共振区时,系统振动加大,需要原动机提供足够的动力才能达到系统的共振点。当原动机提供的动力不足以使系统实现共振时,系统激励频率将直接由共振前跳跃至共振后,而不会出现系统共振,这种非线性跳跃现象称为 Sommerfeld 效应。

在工程中,很多旋转机械均由非理想原动机驱动,例如离心压缩机、燃气轮机、航空发动机、数控机床主轴等,而其中如压缩机、涡轮机等旋转机械往往工作于超临界转速的状态下。因此,避免 Sommerfeld 效应对转子系统正常运转产生影响在机械结构设计阶段是一个不可忽视的问题。国外许多学者对转子系统中的 Sommerfeld 效应进行了研究。BHARTI 等^[2]将非理想直流电动机模型引入到转子系统中,分析转子正进动与反进动中的 Sommerfeld 现象。JHA 等^[3]考虑内阻尼因素,研究非理想直流电动机驱动的偏心转子系统的 Sommerfeld 效应。SAMANTARAY 等^[4]考虑内、外阻尼以及陀螺力矩等因素建立转子动力学模型,分析阻尼对产生 Sommerfeld 效应发生阈值的影响。KARTHIKEYAN 等^[5]运用有限元原理建立转子有限元模型,将理想直流电动机和非理想直流电动机分别驱动转子系统,分析两组的 Sommerfeld 效应特征。BISOI 等^[6]研究非理想直流电动机驱动悬臂梁转子系统的 Sommerfeld 效应。虽然国内学者对于转子系统 Sommerfeld 效应的研究还鲜有报道,但是,在很多学者的研究结果中可以看到明显的跳跃现象。张微等^[7]调节电动机转速,对转子系统进行升速试验,可以看出转子系统的振幅在 1 阶临界转速之前平缓增大,而在转速通过 1 阶临界转速之后,振幅并不是平缓降低,而是突然急剧降低,明显发生了非线性跳跃现象。同样,在张力豪等^[8]对转子系统升速过临界的试验研究中,转子系统的振动幅值在过临界转速之后均快速降低,可以看出转子系统发生了非线性跳跃现象。而在文献[9-10]对转子系统过临界转速减振方法的研究中,可以清楚地看到数值计算

得到的振幅在 1 阶临界转速前后是基本对称的,而试验结果却显示在 1 阶临界转速之前振幅平缓增大,而过 1 阶临界转速之后振幅突然迅速下降,数值计算结果与试验结果不一致。显然,产生上述差异的原因就是在转子系统试验中出现了 Sommerfeld 效应。综上所述,国内学者对于转子系统 Sommerfeld 效应的研究较少,但在很多研究结果中已经可以看到明显的 Sommerfeld 效应;大多数国外学者仅仅对直流电动机驱动的转子系统的 Sommerfeld 效应进行了研究,而对于感应电动机驱动的转子系统 Sommerfeld 效应的研究鲜有报道。一般情况下,直流电动机的静态与动态数学模型均是线性的,而感应电动机却是典型的非线性静态与动态模型,因此对于感应电动机驱动转子系统的动态特性的研究是非常必要的。

将更加复杂的非理想原动机——感应电动机的动力学模型引入到转子系统中,在充分考虑感应电动机与转子系统的相互作用的基础上,建立感应电动机-转子系统动力学模型,并应用所建模型,对感应电动机-转子系统 Sommerfeld 效应进行研究,为转子系统的动力设计与选型提供理论借鉴。

1 电动机-转子系统动力学模型

将感应电动机动力学模型引入单圆盘转子系统中,所得到的感应电动机-转子模型示意图,如图 1 所示。转子系统忽略陀螺力矩,圆盘存在不平衡量,转子系统与感应电动机之间用刚性连接。感应电动机-转子系统动力学方程为

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = m_e r \Omega^2 e^{i\Omega t} + m_e r \dot{\Omega} e^{i(\Omega t - \pi/2)} \\ J\dot{\Omega} + f_c \Omega = T_e - T_l \quad (1)$$

式中 $\dot{\bullet} = d(\bullet)/dt$;

$\ddot{\bullet} = d^2(\bullet)/dt^2$;

z ——轴颈中心复位移矢量;

$z = x + iy$;

m ——转子质量;

c ——转子阻尼;

k ——转子刚度;

J ——感应电动机的转动惯量;

f_c ——感应电动机阻尼系数;

Ω ——电动机角速度;

m_e ——圆盘偏心质量;

r ——圆盘偏心半径;

T_e ——电动机电磁转矩;

T_l ——电动机负载转矩;
 $T_l = m_e r (\ddot{y} \cos \Omega t - \ddot{x} \sin \Omega t)$ 。

图1 电动机-转子结构示意图

在工程中,由于电动机转速的波动远远小于平均转速,因此可以忽略转速波动,则式(1)变为

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = m_e r \omega^2 e^{i\omega t} + m_e r \dot{\omega} e^{i(\omega t - \pi/2)} \quad (2)$$

$$J\dot{\omega} + f_c \omega = \bar{T}_e - \bar{T}_l$$

式中 ω ——感应电动机的平均转速;
 $\bar{T}_e$ ——平均电磁转矩;
 $\bar{T}_e = T_e(\omega)$;
 $\bar{T}_l$ ——平均负载转矩。

2 理论求解与稳定性分析

2.1 理论求解

当系统达到稳态时,感应电动机的平均转速为常数,即 $\omega = \text{常数}$, $\dot{\omega} = 0$ 。将 $\dot{\omega} = 0$ 代入式(2),得

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = m_e r \omega^2 e^{i\omega t} \quad (3)$$

$$\bar{T}_e = T_o$$

式中 T_o ——电动机平均输出转矩;
 $T_o = \bar{T}_l + f_c \omega$ 。

引入量纲一参数

$$\tau = \omega t \quad X = x'/r \quad Y = y'/r \quad \eta = m_e/m$$

$$\zeta = c/(2m\omega_n) \quad \omega_n = \sqrt{k/m} \quad \lambda = \omega/\varphi$$

式中 ω_n ——转子系统的临界转速;
 ζ ——转子系统的阻尼比。

将上述量纲一参数代入式(3)并整理,得

$$\lambda^2 Z'' + 2\zeta \lambda Z' + Z = \eta \lambda^2 e^{i\tau} \quad (4)$$

式中 $Z = X + iY$ 。

设方程式(4)的解为

$$Z = A e^{i(\tau - \alpha)} \quad (5)$$

式中 A ——振动幅值;
 α ——相位角。

将式(5)代入式(4),计算可得

$$X = \frac{\eta \lambda^2 \cos(\tau - \alpha)}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4\zeta^2 \lambda^2}} \quad Y = \frac{\eta \lambda^2 \sin(\tau - \alpha)}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4\zeta^2 \lambda^2}} \quad (6)$$

式中, $\alpha = \arctan(2\zeta\lambda/(1 - \lambda^2))$ 。

将 X 、 Y 代入负载转矩 T_l ,并以 τ 为变量,计算得到平均负载转矩 $\bar{T}_l$ 为

$$\bar{T}_l = 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} T_l d\tau = \frac{2\eta^2 m r^2 \omega^2 \lambda^3 \zeta}{(1 - \lambda^2)^2 + 4\zeta^2 \lambda^2} \quad (7)$$

根据文献[11],感应电动机平均电磁转矩 $\bar{T}_e$ 为

$$\bar{T}_e = \frac{3n_p U^2 R_r}{(\omega_s - n_p \omega)((R_s + R_r \omega_s/(\omega_s - n_p \omega))^2 + \omega_s^2 (L_{1s} + L_{1r})^2)} \quad (8)$$

式中 n_p ——极对数;

U ——相电压;

R_s ——电动机定子电阻;

R_r ——电动机转子电阻;

ω_s ——同步角速度;

$\omega_s = 2\pi f$;

f ——电动机的供电频率;

L_s ——电动机定子自感系数;

L_r ——电动机转子自感系数;

L_m ——定子和转子互感系数;

L_{1s} ——定子漏感系数;

$L_{1s} = L_s - L_m$;

L_{1r} ——转子漏感系数;

$L_{1r} = L_r - L_m$ 。

将式(7)和式(8)代入式(3)的第二个方程,并整理,得

$$\bar{T}_e / (m r^2 \omega^2) = \frac{2\eta^2 \lambda^3 \zeta}{(1 - \lambda^2)^2 + 4\zeta^2 \lambda^2} + f_c / (m r^2 \omega) \quad (9)$$

显然,式(9)是关于 ω 的非线性高次超越方程,不能得到 ω 的解析解,需要通过数值方法计算 ω 的值。

2.2 稳定性分析

由式(9)可以看出,由于转子系统的不平衡响应,电动机-转子系统在同一供电频率条件下可能出现多个不同转速的情况,即关于 ω 的解是不唯一的。因此,需要通过稳定性分析得到电动机的稳定转速。下面研究解 ω 的稳定性。设 ω_0 是已求得的 ω 的解, ε 为 ω 在 ω_0 处的摄动量,则

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \quad \dot{\omega} = \dot{\varepsilon} \quad (10)$$

将式(10)代入式(2)的第二个方程,并略去关于 ε 的高阶小量,可以得到关于 ε 的摄动方程

$$J \dot{\varepsilon} + f_c \varepsilon = c_e \varepsilon - c_L \varepsilon \quad (11)$$

式中

$$c_e = \frac{dT_e}{d\omega_0} = \frac{3n_p^2 U^2 R_r}{(\omega_s - \omega_0 n_p)^2 \left(\left(R_s + \frac{R_r \omega_s}{\omega_s - \omega_0 n_p} \right)^2 + \omega_s^2 (L_{1s} + L_{1r})^2 \right)} - \frac{6n_p^2 U^2 R_r^2 (R_s + R_r \omega_s / (\omega_s - \omega_0 n_p)) \omega_s}{(\omega_s - \omega_0 n_p)^3 \left(\left(R_s + \frac{R_r \omega_s}{\omega_s - \omega_0 n_p} \right)^2 + \omega_s^2 (L_{1s} + L_{1r})^2 \right)^2};$$

$$c_L = \frac{d\bar{T}_L}{d\omega_0} = \frac{2\eta^2 m r^2 \omega \lambda^3 \zeta (\lambda^4 + 6(2\zeta^2 - 1)\lambda^2 + 5)}{((1 - \lambda^2)^2 + 4\zeta^2 \lambda^2)^2}.$$

式(11)可整理为

$$\dot{\varepsilon} = \Lambda \varepsilon \quad (12)$$

式中, $\Lambda = (c_e - c_L - f_c) / J$ 。

显然, 如果 $\Lambda < 0$, $\omega = \omega_0$ 的解是稳定的; 反之, $\omega = \omega_0$ 的解是不稳定的。

3 研究实例

以下, 应用所建立电动机-转子系统的动力学模型对电动机-转子系统所产生的 Sommerfeld 效应进行研究, 分析圆盘偏心质量对 Sommerfeld 效应的影响。对于感应电动机, 采用 V/F 开环控制方式。感应电动机与转子系统相关参数, 见表 1。

表 1 电动机-转子系统参数表

参数	数值
转子质量 m/kg	50
转子刚度 $k/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	2.97×10^5
转子阻尼比 ζ	0.049 8
圆盘偏心半径 r/m	0.05
电动机转动惯量 $J/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	0.02
电动机极对数 n_p	3
电动机定子电阻 R_s/Ω	40
电动机转子电阻 R_r/Ω	12.6
电动机定子自感系数 L_s/H	1.21
电动机转子自感系数 L_r/H	1.22
定子与转子互感系数 L_m/H	1.116
电动机阻尼系数 $f_c/(\text{Nms} \cdot \text{rad}^{-1})$	0.005
电动机额定电压 U_n/V	220
电动机额定频率 f_n/Hz	50

3.1 理论分析

当 $\eta = 0.02$ 时, 电动机-转子系统的供电频率-转速曲线以及供电频率-幅值的响应曲线, 如图 2 所示, 图中 f^* 为量纲一供电频率 ($f^* = f/f_n$)。根据图 2a 可知, 随着感应电动机供电频率的增加, 电动机供电

频率与转子转速之间呈现近似线性关系, 没有出现跳跃现象。在图 2b 中, 当 $f^* = 0.782$ ($f = 39.1 \text{ Hz}$) 时, 转子系统的幅值达到最大值, 同样未见跳跃现象。在电动机-转子系统中, 电动机所提供的电磁转矩一部分用于维持转子系统的转动, 一部分用于维持转子系统的振动, 由于 η 较小, 共振点前后转子系统振动所需电磁转矩变化不大, 最终导致 $\lambda = 1$ 处的 $f^* - \lambda$ 曲线出现微小的变化。图 3 为 Λ 随供电频率的变化曲线, 可以看出随着供电频率由 0.4 增加到 1, Λ 值始终小于 0, 说明计算得到的 ω 均为稳定解, 可以进一步说明电动机-转子系统未出现非线性跳

图 2 电动机-转子系统动态特性($\eta=0.02$)

图 3 电动机-转子系统稳定性分析($\eta=0.02$)

图 4 电动机-转子系统动态特性($\eta=0.026$)

图 5 电动机-转子系统稳定性分析($\eta=0.026$)

跃现象。通过上述分析可知,由于 η 较小,转子系统的振动对电动机电磁转矩的影响较小, Sommerfeld 效应不明显。

当 $\eta=0.026$ 时,电动机-转子系统的供电频率-转速曲线以及供电频率-幅值关系曲线,如图4所示。由图4a可知,对于供电频率 f^* 由0.4增加至1的情况:当供电频率 $f^*<0.7$ 时,随着供电频率的增加,转子系统的转速线性增加;而当供电频率 $f^*>0.7$ 时,随着供电频率的增加,转子系统的转速的增量趋于平缓;当供电频率到达 a 点时,即 $f^*=0.864$ ($f=43.2$ Hz),随着供电频率的增加,转子系统转速迅速从 a 点跳跃到 b 点,出现跳跃现象;随着供电频率的继续增加,转子系统的转速继续线性增加。而对于供电频率 f^* 由1逐渐减小至0.4的情况,转子系统的转速并不是由 b 点跳跃至 a 点,而是从 c 点跳跃至 d 点,电动机-转子系统出现明显的跳跃现象。图4b为转子系统的幅值 A 随供电频率 f^* 的变化曲线,可以看出:该曲线同样出现跳跃现象。与图2相比较,随着转子系统偏心质量的增加,转子系统共振点处的幅值增大,需要电动机提供更大的电磁转矩才能通过共振点,而在维持电动机转速不变的前提下($\lambda=1$),只有通过增加供电频率才能增大电磁转矩,从而导致转子系统的共振点处的供电频率明显增大;当转子系统的转速大于临界转速($\lambda>1$),转子系统的振幅减小,转子系统振动所需提供的电磁转矩降低,而电动机的电磁转矩仅仅与供电频率和转速有关,电动机只能将剩下的电磁转矩全部用于维持转子系统的转动,造成转子系统转速突然增加(图4a中转速由 a 点跳跃到 b 点),转速的突然增加导致转子系统振幅的突然减小(图4b中 A 由 a 点跳跃到 b 点);对于电动机由 $f^*=1$ 减小供电频率的过程中出现跳跃现象的原因与上述增加供电频率产生跳跃现象的原因是一致的,在此不做过多分析。图5为 λ 随供电频率 f^* 的变化曲线,可以看出 a - c 段的 λ 值大于0,充分说明该段所对应的转速与转子系统的响应均为不稳定的,与图4所示结果是一致的。通过上述分析可知,由于电动机系统与转子系统之间的相互作用,导致电动机-转子系统产生了明显 Sommerfeld 效应。

当 $\eta=0.083$ 时,电动机-转子系统的供电频率-转速曲线以及供电频率-幅值关系曲线,如图6所示。由图6a可知,当供电频率 $f^*<0.6$ 时,随着供电频率的增加,转子系统的转速线性增加;当供电频率 $f^*>0.6$ 时,随着供电频率的增加,转子系统的转速趋于平缓;通过计算发现,当 $f^*=0.862$ 时,转子系统的转速达到最大, $\lambda\approx 0.886$;而随着供电频率的继

续增加,转子系统的转速反而略有减小。可以看出,由于转子系统的偏心质量过大,导致维持转子系统振动所需要的电磁转矩大大增大,维持转子系统振动与转动所需要的总的电磁转矩的值等于电动机所能提供的最大电磁转矩,转子系统的转速将不能继续增大,最终导致转子系统的转速不能通过共振点,只能以 $\lambda<1$ 的转速运转。因此,转子系统的幅值随供电频率的变化曲线不会出现共振峰,如图6b所示。图7为 λ 随供电频率 f^* 的变化曲线,可以看出 λ 值始终小于0,说明计算得到的转速与转子系统的响应均是稳定的。通过上述分析可知,当电动机负载增大到一定值时,电动机-转子系统将不能通过共振区。

图6 电动机-转子系统动态特性($\eta=0.083$)

图7 电动机-转子系统稳定性分析($\eta=0.083$)

通过以上分析可以发现,在不同偏心质量下电动机-转子系统的动态特性出现较大差异。下面,从能量角度对产生上述现象的原因进行分析,并得到相应的临界值。电动机-转子系统分别在 $\eta=0.02$ 、 0.0268 、 0.04 、 0.083 、 0.12 情况下最大电磁转矩 $T_{\max}$ 与输出转矩 T_o 随转速的变化曲线,如图8所示。由式(9)可知, $T_{\max}$ 与转子偏心质量 η 无关,因此在不同偏心质量下 $T_{\max}$ 不变。当 $\eta=0.02$ 时, T_o 随转速的变化曲线始终小于 $T_{\max}$,因此电动机-转子系统可以正常运行,不会出现 Sommerfeld 现象。当 $\eta=0.04$ 时,在 $\lambda=1$ 附近, $T_{\max}<T_o$,电动机不能提供足够的转矩使转子系统运行于共振区;当 $\lambda>1.07$ 时, $T_{\max}>T_o$,说明转子系统过共振区后电动机可以继续提供足够的能量让转子系统继续稳定运转;因此,在 $\eta=0.04$ 时临界转速附近会产生非线性跳跃现象,

即 Sommerfeld 效应。当 $\eta=0.0268$ 时, 由图可知, $T_o \leq T_{\text{emax}}$ 始终成立, 且 T_{emax} 与 T_o 随转速的变化曲线存在唯一交点, 说明 $\eta=0.0268$ 是转子系统能否产生 Sommerfeld 效应的临界值, 即当 $\eta>0.0268$ 时, 系统产生 Sommerfeld 效应, 反之, 系统不产生 Sommerfeld 效应。对于 $\eta=0.12$, 当 $\lambda>0.84$ 时, T_{emax} 始终低于 T_o , 说明电动机无法提供足够的能量使转子系统越过共振区, 转子系统的转速将始终低于临界转速。对于 $\eta=0.083$, T_{emax} 与 T_o 随转速的变化曲线相切, 说明 $\eta=0.083$ 是转子系统能否通过共振区的临界值, 即当 $\eta>0.083$ 时, 转子系统不能通过共振区, 反之, 转子系统能通过共振区。

图8 不同偏心质量电动机最大电磁转矩与输出转矩变化曲线

3.2 仿真验证

为了验证本文所提出理论方法的正确性, 采用表1所示参数, 依据式(1)所示电动机-转子系统动力学方程, 基于 Matlab/Simulink 并采用其中的感应电动机模型, 根据 ode23tb 算法, 对其进行仿真验证。仿真框图如图9所示。 f 在 30~50 Hz 中每 1 Hz 进行一次仿真计算, 当系统达到稳态时, 计算得到电动机的平均转速及转子系统的振幅。采用 V/F 开环控制方法, 计算得到不同频率下的电压 u_a , u_b , u_c 。然后, 通过 3/2 变换^[12]得到二相电压 u_α , u_β 。最后, 采用 SVPWM 控制实现电动机的开环控制。图中 U_{dc} 为直流电压。

图9 V/F 开环控制仿真框图

当 $\eta=0.02$ 时, 仿真结果如图10所示。从图10a中可以看出, 随着电动机供电频率的逐渐增加, 电动机供电频率与转速之间呈近似线性关系, 仅仅在 $\lambda=1$ 附近出现了一定的波动。从图10b中可知, 在 $f^*=0.78(f=39 \text{ Hz})$ 处, 转子系统幅值达到最大值, 未出现非线性跳跃现象。上述仿真结果与图2所示分析结果相一致, 验证了理论分析方法的正确性。

图10 电动机-转子系统仿真结果($\eta=0.02$)

当 $\eta=0.026$ 时, 电动机-转子系统的仿真结果, 如图11所示。根据图11a可知, 当 f^* 由 0.82($f=41 \text{ Hz}$) 上升到 0.84($f=42 \text{ Hz}$) 时, 转子系统的平均转速发生跳跃现象, 直接由 p_1 点跳跃至 p_2 点, 转速由 0.98($\omega=75.6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$) 跳跃到 1.15($\omega=85.8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$), 由共振前直接跳跃至共振后; 而当 f^* 由 0.84($f=42 \text{ Hz}$) 下降到 0.82($f=41 \text{ Hz}$) 时, 转子系统的平均转速却不是由 p_2 点跳跃至 p_1 点, 而是由 p_2 点降至 p_3 点, 转速由 1.15($\omega=85.8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$) 降至 1.08($\omega=85.8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$), λ 仍然大于 1, 未发生非线性跳跃现象。由图11b可知, 当 f^* 由 0.82($f=41 \text{ Hz}$) 上升到 0.84($f=42 \text{ Hz}$) 时, 转子系统幅值 A 由 p_1 点跳跃至 p_2 点, 幅值大幅度下降; 而当 f^* 由 0.84($f=42 \text{ Hz}$) 下降到 0.82($f=41 \text{ Hz}$) 时, A 并没有从 p_2 点跳跃回 p_1 点, 而是从 p_2 点上升至 p_3 点。可以看出, 虽然上述仿真结果与图8所示理论分析结果略有不同, 但是仿真结果表明电动机-转子系统出现了 Sommerfeld 现象。

图11 电动机-转子系统仿真结果($\eta=0.026$)

为了进一步解释上述现象, 得到转速及转子系统响应随时间的变化曲线, 如图12所示。仿真时间为 10 s, 初始供电频率分别为 41 Hz 和 42 Hz, 当 $t=5 \text{ s}$ 时, 分别变为 42 Hz 和 41 Hz。从图12a中几乎不能看到转速的波动, 因此可以充分说明转速的波动与平均转速相比较是非常小的, 可以忽略; 当供电频率由 41 Hz 增加到 42 Hz 所获得的转速与直接供电 42 Hz 所获得转速是相同的; 而当供电频率由 42 Hz 减小到 41 Hz 所获得的转速却大于直接供电 41 Hz 所获得转速; 可以清楚地看出, 升频与降频所获得的转速是不同的。电动机系统与转子系统是相互作用的, 电动机转速产生非线性跳跃现象, 转子系统的响应发生响应的变化, 如图12b所示。可以看出上述仿真结果与图4所示理论分析结果是一致的, 可以再次充分说明理论分析方法的正确性。

图 12 电动机-转子系统转速与响应随时间变化曲线
($\eta=0.026$)

当 $\eta=0.08$ 时, 电动机-转子系统的仿真结果, 如图 13 所示。由图 13a 可知, 当供电频率 f^* 由 0.6 增加到 1 时, 转子系统的转速 λ 始终小于 1, 可见转子系统不能通过共振区。由于偏心质量较大, 转子系统的幅值较大, 但是未出现跳跃现象, 如图 13b 所示。可见, 当偏心质量较大时, 转子系统将不能通过共振区, 仿真结果与理论分析结果是一致的。

图 13 电动机-转子系统仿真结果($\eta=0.08$)

3.3 对比分析与试验验证

为了验证本文研究所得到的结论, 直接利用 YAO 等在 Mechanical Systems and Signal Processing 杂志上的试验结果进行分析, 其试验装置如图 14 所示^[9]。可以清楚地看到, 当不施加动力吸振器的时候, 其试验装置为典型的滚动轴承支撑单盘转子系统, 与本文所研究模型是完全一致的。因此, 应用其试验结果对本文的研究结果进行验证是合理的。

在该试验中, 通过调节电动机的供电频率来调节电动机转速, 并通过光电编码器测量并计算电动机转速的值, 用电涡流传感器测量转子系统的振幅, 最终得到转速-幅值曲线, 如图 15 所示。由不同供

电频率条件下的转速-幅值曲线可以看到, 当转速约为 46.5 Hz 时, 转子系统的幅值达到最大值; 当转速低于 46.5 Hz 时, 随着电动机转速的增加, 转子系统的幅值平缓增大; 而当转速由 46.5 Hz 继续增大时, 转子系统的幅值并不是平缓减小, 而是突然急剧降低; 当转速继续增大时, 转子系统的幅值又缓慢减小。显然, 通过对比发现该试验结果与本文研究所得出的结果是基本一致的, 可以充分说明本文所采用的研究方法正确, 得到相应的研究结论合理。

图 14 电动机-转子试验台^[9]

图 15 电动机-转子系统试验结果^[9]

4 结论

(1) 将感应电动机动力学模型引入到转子动力学模型中, 充分考虑了感应电动机与转子系统的相互作用, 推导了电动机-转子系统的转速解析表达式, 并进行了稳定性分析。在此基础上, 对电动机-转子系统在不同的偏心质量条件下的 Sommerfeld 效应进行分析, 并基于 Matlab/Simulink, 进行了仿真验证。仿真计算结果与解析分析结果基本一致, 验证了所采用解析方法的正确性。

(2) 当转子的偏心质量较小时, 共振点前后转子系统振动所需能量变化不大, 电动机转速在共振

点前后变化较小, 系统不会出现 Sommerfeld 效应; 当转子的偏心质量较大时, 共振点前后转子系统振动所需能量变化较大, 电动机转速在共振点前后变化较大, 产生非线性跳跃现象, 电动机-转子系统出现了 Sommerfeld 效应; 当转子偏心质量过大时, 感应电动机无法提供足够的能量使转子系统通过共振区, 转子系统转速将始终低于临界转速。

参 考 文 献

- [1] BLEKHMANN I I. Vibrational mechanics: Nonlinear dynamic effects, general approach, applications[M]. Singapore: World Scientific Press, 2000.
- [2] BHARTI S K, BISOI A, SINHA A, et al. Sommerfeld effect at forward and backward critical speeds in a rigid rotor shaft system with anisotropic supports[J]. Journal of Sound and Vibration, 2019, 442: 330-349.
- [3] JHA A K, DASGUPTA S S. Attenuation of Sommerfeld effect in an internally damped eccentric shaft-disk system via active magnetic bearings[J]. Meccanica, 2019, 54(1-2): 311-320.
- [4] SAMANTARAY A K, DASGUPTA S S, BHATTACHARYYA R. Sommerfeld effect in rotationally symmetric planar dynamical systems[J]. International Journal of Engineering Science, 2010, 48(1): 21-36.
- [5] KARTHIKEYAN M, BISOI A, SAMANTARAY A K, et al. Sommerfeld effect characterization in rotors with non-ideal drive from ideal drive response and power balance[J]. Mechanism and Machine Theory, 2015, 91: 269-288.
- [6] BISOI A, SAMANTARAY A K, BHATTACHARYYA R. Sommerfeld effect in a gyroscopic overhung rotor-disk system[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 88(3): 1565-1585.
- [7] 张微, 韩兵兵, 李响, 等. 基于胞映射算法的转子-挤压油膜阻尼器系统多目标优化设计[J]. 机械工程学报, 2019, 55(19): 68-74.
- [8] ZHANG Wei, HAN Bingbing, LI Xiang, et al. Multi-objective optimization design of rotor-squeeze film damper system based on cell mapping method[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(19): 68-74.
- [9] 张力豪, 何立东, 陈钊, 等. 整体式弹性环挤压油膜阻尼器结构设计与转子过临界实验研究[J]. 振动与冲击, 2019, 38(18): 72-78, 108.
- [10] ZHANG Lihao, HE Lidong, CHEN Zhao, et al. Structure design of an integral elastic ring squeeze film damper and experiments on the rotor passing through critical speed[J]. Journal of Vibration and Shock, 2019, 38(18): 72-78, 108.
- [11] YAO H, WANG Y, XIE L, et al. Bi-stable buckled beam nonlinear energy sink applied to rotor system[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2020, 138: 106546.
- [12] YAO H, WANG Y, CAO Y, et al. Multi-stable nonlinear energy sink for rotor system[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2020, 118: 103273.
- [13] 陈坚. 交流电机数学模型及调速系统[M]. 北京: 国防工业出版社, 1989.
- [14] CHEN Jian. Mathematical model and speed adjustment system of alternating motors[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1989.
- [15] 丁学文. 电力拖动运动控制系统[M]. 北京: 机械工业出版社, 2013.
- [16] DING Xuewen. Electric drive motion control system[M]. Beijing: China Machine Press, 2013.

作者简介: 孔祥希(通信作者), 男, 1987 年出生, 博士, 副教授, 博士研究生导师。主要研究方向为振动利用、非线性动力学与控制。
E-mail: xiangxikong0128@sut.edu.cn