DOI: 10.3901/JME.2020.17.116

联合载荷下角接触球轴承的动态特性分析*

李震 关先磊 钟锐 王青山

(中南大学高性能复杂制造国家重点实验室 长沙 410083)

摘要: 高速轴承是我国国民经济和国防工业急需的关键零部件, 基于非线性弹性赫兹接触理论以及琼斯哈里斯模型, 在原有三自由度动力学模型的基础上, 提出一个五自由度拟静力学分析模型, 考虑离心力, 陀螺力矩, 接触角等因素的影响。从角接触球轴承(Angular contact ball bearing, ACBB)内部几何关系入手, 根据勾股定理列出几何平衡方程, 分别对滚珠和轴承内圈进行受力分析, 列出受力平衡方程, 采用牛顿拉夫逊方法结合迭代步长调节因子对平衡方程组进行求解。通过求解特定工况下的轴承刚度和轴承动态参数与已有文献的结果进行对比, 验证本文方法的准确性, 稳定性和通用性。根据已建立的动力学模型, 分别开展轴承外载荷和转速对轴承动态特性的研究。结果表明, 在联合载荷作用下, 轴向和径向载荷对轴承动态参数和轴承刚度有重要影响, 且两者在一定程度上相互制约。力矩对轴承的动态特性影响较小。

关键词: 角接触球轴承; 轴承刚度; 轴向力; 滚珠方位角; 接触角

中图分类号: TG156

Analysis of Dynamic Characteristics of Angle Contact Bearings with Combined Loads

LI Zhen GUAN Xianlei ZHONG Rui WANG Qingshan

(State Key Laboratory of High Performance Complex Manufacturing, Central South University, Changsha 410083)

Abstract: High speed bearing is a key component of national economy defense industry, according to the nonlinear elastic Hertzian contact theory and Jones Harris model and the original three-degree-freedom dynamic model, a five-degree-freedom dynamic analysis model which take into account the influence of centrifugal force and gyroscopic moment and contact Angle and other factors is proposed. Based on Pythagorean theorem, the geometric equilibrium equations are listed and the forces on the ball and the inner ring of the bearing are analyzed respectively from the internal geometric relations of angular contact ball bearing (ACBB)., the accuracy, stability and generality of the proposed method is verified by comparing the stiffness of bearings under specific working conditions with the results of existing literatures. According to the established model of ACBB, the dynamic characteristics of ACBB are investigated under external loads and speed, respectively. The results are shown as follow, the axial and radial load have great influence on the dynamic parameters and stiffness of ACBB and the influences of axial and load are opposite in some degree. The effects of torques on the dynamic characteristics are very little than the other external loads.

Key words: angular contact ball bearing; bearing stiffness; axial force; ball azimuth; contact angle

0 前言

随着产业化升级, 尤其是机械行业, 对旋转机械的精度和稳定性要求越来越高。旋转机械的性能取决于转子系统。角接触球轴承(Angular contact ball bearing, ACBB)作为转子系统的重要组成部分, 它

的动态特性严重影响转子系统的性能, 进而影响旋转机械的性能。轴承的种类有很多, 但对于目前先进的转子系统来说, 要求轴承有高极限转速, 同时承受轴向载荷和径向载荷, 良好的润滑特性等特点。基于轴承的工况特点, ACBB 在转子系统中获得广泛应用。近年来许多国内外学者以 ACBB 研究对象进行动力学研究, 取得了显著的成果。

JONES^[1]基于非线性赫兹接触理论, 将滚珠与滚道之间的接触视为弹性接触, 考虑离心力和陀螺力矩, 提出三自由度的动力学模型, 但其应用范围具有一定的局限性。DEMUL 等^[2]通过建立轴承载荷

* 国家自然科学基金(51705537)、东北大学航空动力装备振动及控制教育部重点实验室研究基金(VCAME202006)、高性能复杂制造国家重点实验室自主课题(ZZYJKT2018-11)和中南大学创新驱动计划(2019CX006)资助项目。
20190910 收到初稿, 20200324 收到修改稿

分布与轴承变形之间的关系, 提出了一种简化的五自由度模型对轴承进行拟静力学分析, 考虑离心力, 但忽略了陀螺力矩的影响。LIM 等^[3]从滚动轴承的基本原理出发, 建立精密滚动轴承的数学模型, 对滚动轴承的刚度以及变化的接触角进行定性和定量描述, 但是计算耗时过大。ALTINTAS 等^[4]对机床轴承进行动力学建模, 分析高转速下轴承刚度的变化, 研究轴承刚度的变化对轴承转子系统的影响以及轴承的振动特性, 但是应用范围仅局限于机床轴承。EI-SAEIDY^[5]通过牛顿迭代法求解 ACBB 的非线性刚度, 同时根据经验公式确定轴承的阻尼矩阵, 研究整体刚度矩阵与对角刚度矩阵对轴承转子系统的影响, 最终通过实验验证理论分析的正确性, 但是并没有具体研究动态参数的变化。GUO 等^[6]采用有限元分析法进行滚动轴承刚度矩阵的计算, 并且通过实验证明了该方法的正确性, 但是计算过于复杂, 难以操作。LI^[7]提出一种滚动轴承接触分析的数学模型, 并用数值方法进行计算, 弥补了有限元软件接触分析的不足, 但是误差依旧较大。邓四二等^[8-9]在角接触球轴承动力学和热力学的基础上研究摩擦力矩的特性, 建立相应摩擦力矩的计算公式。留剑等^[10]分析 ACBB 的内部几何关系, 建立用于分析高速精密 ACBB 旋转精度的五自由度拟静力学模型, 考虑离心力以及陀螺力矩, 仅仅针对高精度机床轴承。黄伟迪^[11]采用拟静力学分析建立高速电主轴轴承的分析模型, 考虑了离心膨胀的影响, 采用 Demul 理论对轴承刚度进行求解, 但是没有考虑复杂工况。任泓睿^[12]采用简化的五自由度分析模型对 ACBB 分别进行静力学分析以及拟静力学分析, 研究轴承刚度的变化, 但仅考虑离心力。陈文华等^[13-14]采用滚动接触理论研究推力载荷作用下角接触球轴承的拟静力学分析。

综上所述, 本文基于非线性赫兹接触理论, 从 ACBB 内部几何关系着手, 在琼斯哈里斯模型的基础上提出一个五自由度 ACBB 的拟静力学分析模型, 该模型考虑离心力, 陀螺力矩等因素的影响, 应用范围较广, 适用于所有旋转机械。本文模型可以分析复杂载荷工况, 计算量小, 计算精度高, 可以与五自由度柔性转子模型进行耦合, 建立系统整体动力学模型。利用该模型求解 ACBB 非线性轴承刚度, 与已有文献结果进行对比, 验证本文模型的正确性。在上述模型基础上开展角接触球轴承动态特性的研究, 首先研究轴向力对轴承动态参数的影响以及轴承刚度随转速和轴向力的变化规律; 其次在一定轴向力和转速下研究径向力和力矩分别作用

和联合作用下接触角和接触力的变化规律; 最后研究在一定轴向力作用下, 研究轴承刚度在径向力和力矩各自联合作用下随转速的变化规律。

1 理论推导

1.1 ACBB 的几何模型

图 1 表示角接触球轴承的几何分析模型, F_x , F_y 和 F_z 分别表示作用在轴承上的力, M_x 和 M_y 分别表示作用在轴承上的力矩。考虑轴承五个方向的自由度, 在静止状态下轴承内外圈滚道的曲率中心与滚珠的中心位于同一条直线上, 即 O_i , O_o 和 O 三点共线, 该直线与通过滚珠中心且垂直于轴线的直线所夹的角为滚珠与滚道的初始接触角 α_0 , 内外圈曲率中心之间的距离用 BD 表示。

$$BD = (f_i + f_o - 1) \cdot D \quad (1)$$

式中, $f_i = r_i / D$ 为内圈曲率半径系数; $f_o = r_o / D$ 为外圈曲率半径系数; r_i 为内圈滚道曲率半径; r_o 为外圈滚道曲率半径; D 为滚珠直径; D_m 为轴承节圆直径。

$$r_p = D_m / 2 + (r_i - D / 2) \cdot \cos \alpha_0 \quad (2)$$

$$z_p = (r_i - D / 2) \cdot \sin \alpha_0 \quad (3)$$

式中, r_p 为内圈滚道曲率中心的径向距离; z_p 为内圈滚道曲率中心的轴向距离。

图 1 角接触球轴承模型

为了进一步了解 ACBB 整体模型的结构, 采用图 2a 和 2b 分别描述轴承内部结构。如图 2a 所示, 轴承考虑五个方向的自由度, 轴承就会产生五个方向的广义位移, 即 δ_x , δ_y 和 δ_z 分别表示 X , Y 和 Z 三个方向的平动位移; θ_x 和 θ_y 分别表示绕 X 和 Y 两个方向的转动位移。如图 2b 所示, 从图中可以看出滚珠的方位角, j 表示滚珠的序号, ω_c 表示保持架的角速度, 考虑保持架的角速度, 就可以得到轴承的时变刚度, 在 t 时刻第 j 个滚珠的方位角用 ψ_j 表示。

$$\psi_j = \omega_c t + 2 \cdot \pi / N \times (j - 1) \quad (4)$$

(a) 轴侧剖视图

(b) 径向剖视图

图2 角接触球轴承剖视图

$$\omega_c = \frac{\omega}{2} \left(1 + \frac{D \cos \alpha_0}{D_m} \right) \quad D_m = \frac{D_1 + D_2}{2} \quad (5)$$

式中, D_1 为轴承内圈直径; D_2 为轴承外圈直径; ω 为轴承内圈转速; N 为轴承内圈滚珠个数。轴承在工作过程中, 一般是轴承外圈与轴承座配合, 轴承内圈与转轴配合, 轴承内圈随转轴转动, 外圈与轴承座一起固定。在这里说明, 由于本文不考虑轴承的时变特性, 所以取 $t=0$ 。

1.2 ACBB 的几何分析

轴承在工作过程中, 尤其是对于高速转子系统而言, 要求轴承在高速下运行。由于高速产生的离心力以及陀螺力矩导致轴承内外圈的曲率中心不在同一条直线上, 外圈滚道是静止的, 所以轴承外圈的曲率中心是不变的, 但是滚珠中心与内圈滚道曲率中心都会发生改变, 综上所述需要对运动过程中轴承内外圈滚道的几何位置进行分析。

图3中 O 、 O_i 和 O_o 分别表示变形前滚珠中心, 内圈和外圈滚道曲率中心的位置; O' 、 O'_i 和 O'_o 分别表示变形后滚珠中心, 内圈和外圈滚道曲率中心的位置; l_{ij} 和 l_{oj} 分别表示变形后滚珠中心与内外圈滚道之间的距离; B_{1j} 和 B_{2j} 分别表示内圈滚道曲率中心在变形前后的轴向和径向距离; δ_{ij} 和 δ_{oj} 分别表示内外圈的接触变形; α_{ij} 为滚珠与内圈滚道的接

图3 滚珠中心与内外圈滚道曲率中心的位置关系

触角; α_{oj} 为滚珠与外圈滚道的接触角; A_{1j} 为变形后内圈滚道曲率中心相对外圈滚道曲率中心的轴向距离; A_{2j} 变形后内圈滚道曲率中心相对外圈滚道曲率中心的径向距离; X_{1j} 为变形后滚珠中心相对外圈滚道曲率中心的轴向距离; X_{2j} 为变形后滚珠中心相对外圈滚道曲率中心的径向距离。根据图3中的几何关系, 可以确定如下所示的表达式。

$$l_{ij} = (f_i - 0.5) \cdot D + \delta_{ij}$$

$$l_{oj} = (f_o - 0.5) \cdot D + \delta_{oj} \quad (6)$$

$$B_{1j} = \delta_z + r_p \cdot (\theta_x \cos \psi_j - \theta_y \sin \psi_j)$$

$$B_{2j} = \delta_x \sin \psi_j + \delta_y \cos \psi_j \quad (7)$$

$$A_{1j} = BD \sin \alpha_0 + B_{1j}$$

$$A_{2j} = BD \cos \alpha_0 + B_{2j} \quad (8)$$

$$\sin \alpha_{ij} = \frac{A_{1j} - X_{1j}}{l_{ij}} \quad \sin \alpha_{oj} = \frac{X_{1j}}{l_{oj}}$$

$$\cos \alpha_{ij} = \frac{A_{2j} - X_{2j}}{l_{ij}} \quad \cos \alpha_{oj} = \frac{X_{2j}}{l_{oj}} \quad (9)$$

根据轴承滚珠中心与内外圈滚道曲率中心的几何位置关系, 由勾股定理可以确定如下方程

$$(A_{1j} - X_{1j})^2 + (A_{2j} - X_{2j})^2 - l_{ij}^2 = 0$$

$$X_{1j}^2 + X_{2j}^2 - l_{oj}^2 = 0 \quad (10)$$

1.3 ACBB 的受力分析

轴承在运转过程中, 滚珠不仅受到内外滚道作用力, 还受到离心力和陀螺力矩的作用, 以第 j 个滚珠为研究对象, 对其进行受力分析。

图4中 λ_{ij} 和 λ_{oj} 分别表示内圈和外圈滚道控制参数, 控制参数的取值可以参考文献[16], 内圈和外圈滚道控制分别取 $\lambda_{ij} = \lambda_{oj} = 1$ 和 $\lambda_{ij} = 0$, $\lambda_{oj} = 2$, 本文采用内圈滚道控制。 Q_{ij} 和 Q_{oj} 分别表示滚珠与内外圈滚道的接触力, 其计算公式如下所示

$$Q_{ij} = K_{ij} \delta_{ij}^{3/2} \quad Q_{oj} = K_{oj} \delta_{oj}^{3/2} \quad (11)$$

式中, K_{ij} 为内圈接触变形系数; K_{oj} 为外圈接触变

图4 第j个滚珠的受力分析

形系数, 关于接触变形的计算可以参考文献[15]。

$$F_{cj} = \frac{1}{2} m D_m \omega^2 \left(\frac{\omega_m}{w} \right)_j^2 \quad (12)$$

$$M_{gj} = J \left(\frac{\omega_b}{\omega} \right)_j \left(\frac{\omega_m}{\omega} \right)_j \omega^2 \sin \beta_j \quad (13)$$

$$\left(\frac{\omega_m}{\omega} \right)_j = (1 + C_{1j} \cdot C_{2j})^{-1} \quad (14)$$

$$C_{1j} = \frac{1 + \gamma \cos \alpha_{oj}}{1 - \gamma \cos \alpha_{ij}}, \quad \gamma = \frac{D}{D_m} \quad (15)$$

$$C_{2j} = \frac{\cos \alpha_{ij} + \tan \beta_j \sin \alpha_{ij}}{\cos \alpha_{oj} + \tan \beta_j \sin \alpha_{oj}} \quad (16)$$

式(12)中 F_{cj} 为滚珠受到的离心力; 式(13)中 M_{gj} 为滚珠受到的陀螺力矩; m 和 J 分别为滚珠的质量和转动惯量, 其计算公式参考文献[17]; β_j 为第 j 个滚珠的螺旋角。对于螺旋角的计算在以往文献基本采用滚道控制理论求解, 本文参考文献[18]采用达朗贝尔原理进行计算, 相比于滚道控制理论, 不论转速和工况如何, 它都有统一的表达形式。

$$\tan \beta_j = \frac{C_j(S_j + 1) \sin \alpha_{ij} + 2 \sin \alpha_{oj}}{(C_j(S_j + 1) \cos \alpha_{ij} + 2(\cos \alpha_{oj} + \gamma) + A_j)} \quad (17)$$

$$A_j = \gamma C_j [\cos(\alpha_{ij} - \alpha_{oj}) - S_j]$$

$$C_j = \frac{Q_{ij} a_{ij} L_{ij}}{Q_{oj} a_{oj} L_{oj}}, \quad S_j = \frac{1 + \gamma \cos \alpha_{oj}}{1 - \cos \alpha_{ij}} \quad (18)$$

式(18)中 a_{ij} 为第 j 个滚珠与内圈滚道接触椭圆的长半轴; a_{oj} 为第 j 个滚珠与外圈滚道接触椭圆的长半轴; L_{ij} 和 L_{oj} 为接触椭圆的第二类椭圆积分, 具体计算方法可以参考文献[19]。以滚珠为研究对象, 根据牛顿定理, 列水平方向和竖直方向的局部平衡

方程。

$$\begin{aligned} & Q_{ij} \sin \alpha_{ij} - Q_{oj} \sin \alpha_{oj} - \\ & \frac{M_{gj}}{D} (\lambda_{ij} \cos \alpha_{ij} - \lambda_{oj} \cos \alpha_{oj}) = 0 \\ & Q_{ij} \cos \alpha_{ij} - Q_{oj} \cos \alpha_{oj} + \\ & \frac{M_{gj}}{D} (\lambda_{ij} \sin \alpha_{ij} - \lambda_{oj} \sin \alpha_{oj}) + F_{cj} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

经过几何分析以及对滚珠的受力平衡分析, 可以列出四个非线性方程, 如式(10)和(19)所示, X_{1j} , X_{2j} , δ_{ij} 和 δ_{oj} 是四个待求变量, 采用牛顿迭代法进行求解。考虑到所有滚珠的力作用在轴承的内圈上, 紧接着对轴承内圈进行受力平衡分析, 得到力和力矩的平衡方程。

$$\begin{aligned} F_x &= \sum_{j=1}^Z \left(Q_{ij} \cos \alpha_{ij} + \frac{\lambda_{ij} M_{gj}}{D} \sin \alpha_{ij} \right) \sin \psi_j \\ F_y &= \sum_{j=1}^Z \left(Q_{ij} \cos \alpha_{ij} + \frac{\lambda_{ij} M_{gj}}{D} \sin \alpha_{ij} \right) \cos \psi_j \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} F_z &= \sum_{j=1}^Z \left(Q_{ij} \sin \alpha_{ij} - \frac{\lambda_{ij} M_{gj}}{D} \cos \alpha_{ij} \right) \\ M_x &= \sum_{j=1}^Z \left(Q_{ij} \sin \alpha_{ij} - \frac{\lambda_{ij} M_{gj}}{D} \cos \alpha_{ij} \right) r_p \cos \psi_j \\ M_y &= \sum_{j=1}^Z \left(Q_{ij} \sin \alpha_{ij} - \frac{\lambda_{ij} M_{gj}}{D} \cos \alpha_{ij} \right) r_p \sin \psi_j \end{aligned} \quad (21)$$

通过式(10)和(19)求解得到 X_{1j} , X_{2j} , δ_{ij} 和 δ_{oj} 四个变量, 然后将其代入到公式(20)和(21), 采用同样的方法求解整体非线性方程组, 可以得到 δ_x , δ_y , δ_z , θ_x 和 θ_y 五个变量的值。根据如下轴承刚度的定义, 可以求解轴承的刚度矩阵 K 。

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial \delta_x} & \frac{\partial F_x}{\partial \delta_y} & \frac{\partial F_x}{\partial \delta_z} & \frac{\partial F_x}{\partial \theta_x} & \frac{\partial F_x}{\partial \theta_y} \\ \frac{\partial F_y}{\partial \delta_x} & \frac{\partial F_y}{\partial \delta_y} & \frac{\partial F_y}{\partial \delta_z} & \frac{\partial F_y}{\partial \theta_x} & \frac{\partial F_y}{\partial \theta_y} \\ \frac{\partial F_z}{\partial \delta_x} & \frac{\partial F_z}{\partial \delta_y} & \frac{\partial F_z}{\partial \delta_z} & \frac{\partial F_z}{\partial \theta_x} & \frac{\partial F_z}{\partial \theta_y} \\ \frac{\partial M_x}{\partial \delta_x} & \frac{\partial M_x}{\partial \delta_y} & \frac{\partial M_x}{\partial \delta_z} & \frac{\partial M_x}{\partial \theta_x} & \frac{\partial M_x}{\partial \theta_y} \\ \frac{\partial M_y}{\partial \delta_x} & \frac{\partial M_y}{\partial \delta_y} & \frac{\partial M_y}{\partial \delta_z} & \frac{\partial M_y}{\partial \theta_x} & \frac{\partial M_y}{\partial \theta_y} \end{bmatrix} \quad (22)$$

1.4 ACBB 的模型求解

由于在模型求解过程中, 涉及的变量较多, 需要两次使用牛顿迭代法进行非线性方程组的求解, 要明确各个变量之间的相对关系, 绘制图5所示的变量传递流程图。

图5中的虚线表示隐式关系, 实线表示显示关系。在编程过程中需要得到 $(\delta_x, \delta_y, \delta_z, \theta_x, \theta_y)$

图5 变量传递流程图

和 $(X_{1j}, X_{2j}, \delta_{ij}, \delta_{oj})$ 之间隐式关系的确切表达式。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial X_{1j}}{\partial d} \\ \frac{\partial X_{2j}}{\partial d} \\ \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial d} \\ \frac{\partial \delta_{oj}}{\partial d} \end{bmatrix} = [b_{ij}]^{-1} \begin{bmatrix} (A_{1j} - X_{1j}) \frac{\partial A_{1j}}{\partial d} \\ (A_{2j} - X_{2j}) \frac{\partial A_{2j}}{\partial d} \\ 0 \\ \frac{Q_{ij}}{l_{ij}} \frac{\partial A_{1j}}{\partial d} + \frac{M_{gj}}{D} \frac{1}{l_{ij}} \frac{\partial A_{2j}}{\partial d} \\ \frac{Q_{ij}}{l_{ij}} \frac{\partial A_{2j}}{\partial d} - \frac{M_{gj}}{D} \frac{1}{l_{ij}} \frac{\partial A_{1j}}{\partial d} \end{bmatrix} \quad (23)$$

式中, b_{ij} 的详细表达式可以参考文献[15], 为了便于进行编程求解, 给出图6所示的模型求解流程图, 更加直观表明角接触球轴承模型的求解过程。

图6 模型求解流程图

2 算例分析

2.1 模型验证

为了验证模型的准确性, 稳定性和收敛性, 分别验证轴承的刚度矩阵和轴承的动态参数。首先, 在给定工况下求解轴承的刚度矩阵, 与文献中采用试验得到的刚度矩阵进行对比。同时指出在轴承刚度矩阵中, 起主要作用的是对角刚度矩阵, K_{xx} 和 K_{yy} 表示径向刚度; K_{zz} 表示轴向刚度; $K_{\theta_x \theta_x}$ 和 $K_{\theta_y \theta_y}$ 表示角刚度。选取轴承的型号为 RPF7039, 其具体参数如表1所示, 轴承承受的外载荷为 $F_x = F_y = 500 \text{ N}$, $F_z = 2000 \text{ N}$, $M_x = M_y = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$, 轴承转速 $n = 0 \text{ r/min}$ 。

表1 RPF7039 轴承参数

参数名称	参数值
滚珠直径 D/mm	17.7
初始接触角 $\alpha_0/^\circ$	40
滚珠的个数 Z	12
内圈滚道曲率半径 r_i/mm	9.16
外圈滚道曲率半径 r_o/mm	9.38
轴承的公称直径 D_m/mm	72.5

表2 RPF7039 轴承对角刚度对比验证

刚度 (N/mm)	本文 模型	ZHANG ^[20] 结果	试验 ^[21] 结果	本文 误差	文献 误差
K_{xx}	170 034.5	166 573.8	172 131.6	1.22	-3.23
K_{yy}	154 678.2	166 573.8	155 520.7	0.54	7.11
K_{zz}	224 325.5	225 376.5	226 011.1	0.75	-0.28
$K_{\theta_x \theta_x}$	141 222 740.2	144 386 234.1	139 304 365.4	-1.38	3.65
$K_{\theta_y \theta_y}$	157 429 846.9	144 386 234.1	157 160 958.5	0.17	-8.13

表2中的误差单位是(%), 本文误差指的是本文结果与试验结果^[21]的对比误差, 文献误差指的是ZHANG^[20]文献中的结果与试验结果^[21]的对比误差。从表2看出, 本文误差的绝对值控制在1.5%以内, 然而文献误差的绝对值最大达到8.13%。不仅说明说明本文算法的正确性, 同时表明本文模型的计算精度较高。本文采用牛顿迭代法进行求解, 同时为了提高本文模型的收敛性和计算效率, 分别在求解局部平衡方程和内圈整体的平衡方程过程中分别设置迭代步长调节因子 h_1 和 h_2 。经过调试发现, 当 $h_1=0.001$ 和 $h_2=1$, 计算速度提高了10倍, 仅需14.9 s。本文的迭代精度值设为 10^{-8} mm , 设置最大迭代次数为10 000。

紧接着开展轴承动态参数的对比验证, 包括接触角以及接触载荷。轴承参数如表3所示, 轴承外

载荷为 $F_x=F_y=0$ N、 $F_z=889.84$ N、 $M_x=M_y=0$ N·m，轴承转速 $n=15\ 000$ r/min。

表 3 ACBB 参数

参数名称	参数值
滚珠直径 D /mm	15.081
初始接触角 α_0 (°)	25
滚珠的个数 Z	19
内圈滚道曲率半径系数 f_i /mm	0.52
外圈滚道曲率半径系数 f_o /mm	0.52
轴承的公称直径 D_m /mm	105

表 4 ACBB 动态参数对比验证

参数名称	本文结果	文献结果 ^[19]	误差(%)
内圈接触角 α_i (°)	37.42	37.51	0.2
外圈接触角 α_o (°)	5.569	5.358	-3.9
外圈接触载荷 Q_{n_i} /N	77.07	76.93	-0.18
内圈接触载荷 Q_{n_o} /N	482.53	484.52	0.41

从表 3 可以看出，采用本文模型得到的轴承动态参数与文献[19]中的结果对比十分吻合，且误差的绝对值最大不超过 4%。根据上述轴承刚度和动态参数的对比验证，表明本文模型的准确性、稳定性和通用性。

根据上文的数值对比验证，已经证明了本文模型的准确性、稳定性和通用性。接下来对 ACBB 动态特性进行研究，选取型号为 7011C 的 ACBB 作为研究对象，轴承滚珠与滚道材料的弹性模量 $E=200$ GPa；密度 $\rho=7\ 850$ kg/m³；泊松比 $\nu=0.3$ ，轴承的具体参数如表 5 所示。

表 5 7011C 轴承参数

参数名称	参数值
滚珠直径 D /mm	11
初始接触角 α_0 (°)	15
滚珠的个数 Z	17
内圈滚道曲率半径系数 f_i /mm	0.52
外圈滚道曲率半径系数 f_o /mm	0.52
轴承的公称直径 D_m /mm	72.5

2.2 轴向力和转速对 ACBB 动态特性的影响

为了研究轴向力对角接触球轴承动态特性的影响，令 $F_x=F_y=M_x=M_y=0$ ，改变轴向力 F_z 和转速 n 的大小。首先，研究轴向力和转速对轴承内外圈接触角的影响，结果如图 7 所示。

从图 7 中不难看出，当保持转速一定时，轴承内外圈接触角随着轴向力的增加而增加；当保持轴向力一定时，轴承内圈接触角随着转速的增加而增加，轴承外圈接触角随着转速的增加而减少。

图 7 轴向力和转速对轴承内外圈接触角的影响

接着研究轴向力和转速对轴承内外圈接触载荷的影响，结果如图 8 所示。

图 8 轴向力和转速对轴承内外圈接触载荷的影响

从图 8 中可以看出，当保持转速一定时，轴承内外圈接触载荷随着轴向力的增加而增加；当保持轴向力一定时，轴承内圈接触载荷随着转速的增加而减少，轴承外圈接触角随着转速的增加而增加。然后，研究轴向力和转速对轴承接触变形和离心力的影响，结果如图 9 所示。

图 9 轴向力和转速对轴承变形量和离心力的影响

从图 9 中可以看出，当保持一定转速时，轴承变形量和离心力均随着轴向力的增加而增加；当保持一定轴向力时，轴承变形量随着转速的增加而减少，离心力随着转速的增加而增加。最后，研究轴向力和转速对轴承对角刚度的影响，结果如图 10 所示。

从图 10 中可以看出，当保持一定转速时，轴承的径向刚度 K_{xx} ，轴向刚度 K_{zz} 和角刚度 $K_{\theta\theta}$ 均随着轴向力的增加而增加；当保持一定轴向力时，轴承的径向刚度 K_{xx} ，轴向刚度 K_{zz} 和角刚度 $K_{\theta\theta}$ 均随着转速的增加而减少，轴向力越小这种下降趋势就越明显。可以表明轴承刚度随着转速的增加出现弱化现象，轴向力的增加会阻止弱化现象的到来。

图10 轴向力和转速对轴承刚度的影响

2.3 径向力和转速对 ACBB 动态特性的影响

为了探究径向力对轴承动态特性的影响,本文在 $F_z=500\text{ N}$, 转速为 $n=10\ 000\text{ r/min}$ 的条件下,分别探究 F_x 和 F_y 以及两者共同作用下,轴承的动态参数随轴承径向力的变化规律。首先,研究径向力 F_x 对轴承动态特性的影响,结果如图 11 所示。其次,研究径向力 F_y 对轴承动态特性的影响,结果如图 12 所示。紧接着,研究 F_x 和 F_y 对轴承动态特性的影响,结果如图 13 所示。最后,研究径向力对轴承刚度的影响,结果如图 14 所示。

图11 径向力 F_x 对内外圈接触角和载荷的影响

如图 11 所示,内外圈接触角和载荷随着滚珠方位角呈正弦规律变化,随着径向力 F_x 的增加,正弦曲线的幅值也会增加。在滚珠方位角为 0° 和 180° 的位置,轴承内外圈接触角不受径向力的影响,该位置的点被称为“节点”。在滚珠方位角为 90° 和 270° 的位置,轴承内外圈接触角取得极值,该位置

的点被称作“极值点”。轴承内外圈接触载荷随着滚珠方位角呈先递增后衰减到一定程度后出现“W”型的现象。径向力 F_x 越大,曲线的峰值越大,“W”型的现象越明显, 90° 的位置表示“极值点”, 150° 和 270° 的位置表示“节点”。

如图 12 所示,内外圈接触角和载荷随着滚珠方位角呈余弦规律变化,随着径向力 F_y 的增加,余弦曲线的幅值也会增加,在滚珠方位角 90° 和 270° 的位置会有“节点”出现。轴承内外圈接触载荷随着滚珠方位角呈现“W”型变化,随着径向力 F_y 的增加,“W”型的变化会越来越明显,同时在 60° 和 180° 以及 300° 的位置出现“节点”。

图12 径向力 F_y 对内外圈接触角和载荷的影响

如图 13 所示,径向力 F_x 和 F_y 共同作用下内外圈接触角和载荷沿滚珠方位角的变化规律,可以看

图13 径向力 F_x 和 F_y 对内外圈接触角和载荷的影响

出图 13 分别是由图 11 和图 12 叠加得到的, 呈周期性变化, 相应的“节点”和“极值点”会发生偏移。

如图 14 所示, 在轴向力 $F_z=500$ N, 径向力 F_x 和 F_y 共同作用下轴承刚度随转速的变化规律。当径向力一定时, 轴承径向, 轴向和角刚度均随着转速的增加而减小。当转速一定时, 径向刚度和角刚度随着径向力的增加而增加, 轴向刚度随着径向力的增加而减少。可以表明径向力的增加会弱化轴承的轴向刚度。

图 14 径向力 F_x 和 F_y 对内外圈接触角和载荷的影响

2.4 力矩和转速对 ACBB 动态特性的影响

为了探究力矩对轴承动态特性的影响, 本文在 $F_x=F_y=500$ N、 $F_z=500$ N, 转速为 $n=10\ 000$ r/min 的条件下, 分别探究 M_x 和 M_y 以及两者共同作用下, 轴承的动态参数即接触角和接触力随轴承力矩的变化规律。首先, 研究力矩 M_x 对轴承动态特性的影响, 结果如图 15 所示。其次, 研究力矩 M_y 对轴承动态特性的影响, 结果如图 16 所示。紧接着, 研究 M_x 和 M_y 对轴承动态特性的影响, 结果如图 17 所示。最后, 研究力矩对轴承刚度的影响, 结果如图 18 所示。

如图 15 所示, 内外圈接触角随着滚珠方位角呈余弦规律变化, 随着力矩 M_x 的增加, 余弦曲线的幅值也会增加, 在滚珠方位角 90° 和 270° 的位置会出现“节点”, 在滚珠方位角 180° 的位置会出现“极值点”。轴承内外圈接触载荷随着滚珠方位角呈“W”型变化, 随着力矩的增加, “W”型越来越明显, 滚珠方位角 60° 和 300° 的位置会出现“节点”。

如图 16 所示, 内外圈接触角随着滚珠方位角呈正弦规律变化, 随着力矩 M_y 的增加, 正弦曲线的幅值也会增加, 在滚珠方位角 0° 和 180° 的位置会出现“节点”。内外圈接触载荷沿滚珠方位角呈“W”型变化, 然后增加, 最后减小。在滚珠方位角 90° 的位置会出现“节点”, 在滚珠方位角 270° 的位置会出现“极值点”。

图 15 力矩 M_x 对内外圈接触角和载荷的影响

图 16 力矩 M_y 对内外圈接触角和载荷的影响

图 17 力矩 M_x 和 M_y 对内外圈接触角和载荷的影响

图18 力矩 M_x 和 M_y 对轴承刚度的影响

如图17所示, 力矩 M_x 和 M_y 共同作用下内外圈接触角和载荷沿滚珠方位角呈周期性规律变化。可以看出图17分别是由图15和图16叠加得到的, 在描述内外圈接触力的图上, 可以看出有“W”型的变化, 随着力矩的增大, “W”型越明显。

如图18所示, 当轴向力 $F_z=500\text{ N}$ 时, 力矩 M_x 和 M_y 共同作用下轴承刚度随转速的变化规律。不难发现, 在转速一定的情况下, 轴承刚度随力矩的增加而增加, 但变化幅度较小, 基本保持不变。可以得到力矩对轴承刚度的影响较小。由此, 不难看出力矩 M_x 和 M_y 的变化对轴承的影响较小。

3 结论

(1) 本文建立了五自由度角接触球轴承拟静力学分析模型, 该模型具有准确性, 稳定性和通用性。可以求解任意联合载荷下角接触球轴承的动态特性。

(2) 随着轴承旋转速度的增加, 轴承刚度会发生“弱化”现象, 轴向载荷不仅增加轴向刚度而且会增加径向刚度和角刚度, 会阻止转速增加过程中出现的弱化现象。同时轴向载荷也会对内外圈接触角和载荷有重要影响, 对角接触球轴承的设计制造有重要影响。

(3) 在轴向力和径向力联合作用下, 随着径向力的增加, 轴承径向刚度和角刚度会增加, 轴向刚度会减少, 且径向力会阻止转速增加过程中出现的刚度“弱化”现象, 径向力在一定程度上会对轴承力的作用进行制约。随着径向力的增加, 会增加不同滚珠位置的接触角和接触载荷变化幅度。轴承在工作过程中, 需要联合作用, 发挥轴承的最佳工作性能。

(4) 在轴向力和力矩联合作用下, 随着力矩的增加, 轴承刚度会增加, 但是增加的幅度可以忽略

不计。与轴向力和径向力的影响相比, 力矩都对内外圈接触角和接触载荷的影响非常小。但对于高速精密角接触球轴承的设计和制造, 力矩的作用就显得十分重要。

参考文献

- [1] JONES A B. A general theory for elastically constrained ball and radial roller bearings under arbitrary load and speed conditions[J]. Journal of Basic Engineering, 1960, 82(2): 309.
- [2] DEMUL J M, VREE J M, MAAS D A. Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearings loaded in five degrees of freedom while neglecting friction—part I: general theory and application to ball bearings[J]. Journal of Tribology, 1989, 111(1): 142.
- [3] LIM T C, SINGH R. Vibration transmission through rolling element bearings, part II: system studies[J]. Journal of Sound & Vibration, 1990, 139(2): 201-225.
- [4] CAO Y, ALTINTAS Y. Modeling of spindle-bearing and machine tool systems for virtual simulation of milling operations[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2007, 47(9): 1342-1350.
- [5] EL-SAEIDY F M A. Time-varying total stiffness matrix of a rigid machine spindle-angular contact ball bearings assembly: theory and analytical/experimental verifications[J]. Shock and Vibration, 2011, 18(5): 641-670.
- [6] GUO Y, PARKER R G. Stiffness matrix calculation of rolling element bearings using a finite element/contact mechanics model[J]. Mechanism & Machine Theory, 2012, 51: 32-45.
- [7] LI S T. A mathematical model and numeric method for contact analysis of rolling bearings[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 119: 61-73.
- [8] 邓四二, 李兴林, 汪久根, 等. 角接触球轴承摩擦力矩特性研究[J]. 机械工程学报, 2011, 47(5): 114-120.
DENG Sier, LI Xinglin, WANG Jiugen, et al. The investigation of friction torque characteristics of angular contact ball bearings[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(5): 114-120.
- [9] 邓四二, 李兴林, 汪久根, 等. 角接触球轴承摩擦力矩波动性分析[J]. 机械工程学报, 2011, 47(23): 104-112.
DENG Sier, LI Xinglin, WANG Jiugen, et al. Analysis on the friction torque fluctuation of angular contact ball bearings[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(23): 104-112.

- [10] 留剑, 洪军, 杨朝晖, 等. 高速精密角接触球轴承旋转精度创成机理研究[J]. 西安交通大学学报, 2011, 45(11): 72-78.
LIU Jian, HONG Jun, YANG Chaohui, et al. Research on the mechanism of rotating precision generation of high-speed precision angular contact ball bearings[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2011, 45(11): 72-78.
- [11] 黄伟迪. 高速电主轴动力学建模及振动特性研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2018.
HUANG Weidi. Dynamic modeling and vibration characteristics of high-speed motorized spindle [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2018.
- [12] 任泓睿. 耦合球轴承拟静力解析模型的转子系统动态特性分析[D]. 沈阳: 东北大学, 2015.
REN Hongrui. Dynamic characteristics analysis of rotor system of coupling ball bearing quasi-static analytical model [D]. Shenyang: Northeastern University, 2015.
- [13] CHEN W H, MA Z H, GAO L, et al. Quasi-static analysis of thrust-loaded angular contact ball bearings Part I: Theoretical formulation[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2012, 1(1): 71-80.
- [14] CHEN W H, MA Z H, GAO L, et al. Quasi-static analysis of thrust-loaded angular contact ball bearings Part II: Results and discussion[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2012, 1(1): 81-87.
- [15] CAO Y, ALTINTAS Y. A general method for the modeling of spindle-bearing systems[J]. Journal of Mechanical Design, 2004, 126(6): 1089.
- [16] HARRIS T A, KOTZALAS M N. Advanced concepts of bearing technology: Rolling bearing analysis[M]. London: CRC Press, 2006.
- [17] NOEL D, RITOU M, FURET B, et al. Complete analytical expression of the stiffness matrix of angular contact ball bearings[J]. Journal of Tribology, 2013, 135(4): 041101.
- [18] DING C G, ZHOU F Z, ZHU J, et al. Raceway control assumption and the determination of rolling element attitude angle[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2001, 37(4): 58-65.
- [19] 万长森. 滚动轴承的分析方法[M]. 北京: 机械工业出版社, 1987.
WAN Changsen. Analytical method of rolling bearing [M]. Beijing: China Machine Press, 1987.
- [20] ZHANG X N, HAN Q K, PENG Z K, et al. A comprehensive dynamic model to investigate the stability problems of the rotor-bearing system due to multiple excitations[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2016, 70-71: 1171-1192.
- [21] DIETL P. Damping and stiffness characteristics of rolling element bearings-theory and experiment[D]. Technical University of Vienna, Vienna, 1997.
- [22] ZHANG X N, HAN Q K, PENG Z K, et al. Stability analysis of a rotor-bearing system with time-varying bearing stiffness due to finite number of balls and unbalanced force[J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(25): 6768-6784.
- [23] WANG H, HAN Q K, ZHOU D N. Nonlinear dynamic modeling of rotor system supported by angular contact ball bearings[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2017, 85: 16-40.

作者简介: 李震, 男, 1996年出生。主要研究方向为结构振动噪声分析与控制、轴承转子动力学。

E-mail: lizhen1402431211@csu.edu.cn

王青山(通信作者), 男, 1989年出生, 博士, 副教授, 硕士研究生导师。主要研究方向为振动噪声分析与控制、转子动力学以及现代隔振减振方法。

E-mail: qingshanwang@csu.edu.cn