DOI: 10.3901/JME.2020.17.082

7 杆 Goldberg 机构的结构参数和位移方程*

牟德君^{1,2} 张一同^{1,2} 李艳文^{1,2} 胡 波^{1,2} 卢文娟^{1,2}

(1. 燕山大学机械工程学院 秦皇岛 066004;

2. 燕山大学河北省并联机器人与机电系统实验 秦皇岛 066004)

摘要: 目前, 5 杆和 6 杆 Goldberg 机构的闭环位移方程都是用相邻杆件外角表示的。为了能更清晰和直观地表达多杆 Goldberg 机构相邻杆之间的角度关系, 给出了用相邻杆件内角表示 5 杆和 6 杆 Goldberg 机构的位移方程。通过对 5 杆和 6 杆 Goldberg 机构的分析, 提出了一种新的 7 杆 Goldberg 机构, 给出了它的用相邻杆件内角表示的结构参数方程和闭环位移方程。通过实例验证了 7 杆 Goldberg 机构的闭环位移方程和输入输出方程的正确性。分析并给出了 7 杆 Goldberg 机构的存在条件: 除了满足连杆和连架杆必要的 Bennett 约束条件之外, 还必须满足不同虚拟环路的机架共线的条件。在理论上拓宽了 Goldberg 机构的概念和应用范围。

关键词: Goldberg 机构; Bennett 机构; 7R 机构; 闭环位移方程; 型综合

中图分类号: TH112

Structural Parameters and Displacement Equation of 7-Bar Goldberg Mechanism

MU Dejun^{1,2} ZHANG Yitong^{1,2} LI Yanwen^{1,2} HU Bo^{1,2} LU Wenjuan^{1,2}

(1. School of Mechanical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004;

2. Parallel Robot and Mechatronic System Laboratory of Hebei Province, Yanshan University, Qinhuangdao 066004)

Abstract: At present, the closed-loop displacement equations of 5-bar and 6-bar Goldberg mechanisms are expressed by the outer angles of adjacent links. In order to express the angle relationship more clearly and intuitively between adjacent bars of multi-bar Goldberg mechanism, the displacement equations of 5-bar and 6-bar Goldberg mechanism were expressed by the internal angles of adjacent bars. Through the analysis of 5-bar and 6-bar Goldberg mechanisms, a new 7-bar Goldberg mechanism was proposed, and its structural parameter equations and closed-loop displacement equations were expressed by the internal angles of adjacent bars were given. The closed-loop displacement equation and the input-output equations of the 7-bar Goldberg mechanism were verified by an example. The existing conditions of the 7-bar Goldberg mechanism were given. In addition to meeting the necessary constraint conditions of Bennett mechanism for side links and connecting link, it must also meet the condition that the frames with different virtual loops must be collinear. In theory, it broadens the concept and the applied range of Goldberg mechanism.

Key words: Goldberg mechanism; Bennett mechanism; 7R mechanism; close-loop displacement equation; type synthesis

0 前言

1943 年 GOLDBERG 在 BENNETT 的研究基础上, 提出了机架共线的 5 杆和 6 杆 Goldberg(GBG) 机构^[1-5]。二者都是由多环路的 BNT 机构演变来的, 因此也都含有 Bennett(BNT)机构的特性。

传统的 BNT 机构相邻杆的交错角取值区间为

(0°, 180°), 对应这种交错角的 BNT 机构被称之为非对称的 BNT 机构, 它的位移参数方程都是用相邻杆外角表示的。

由于借鉴了 BNT 机构杆件交错角和位移方程的处理方法, 所以现有的 5 杆和 6 杆 GBG 机构杆件的交错角取值区间也是(0°, 180°), 相邻杆的角位移方程也都是用相邻杆外角表示的^[6-10]。这些文献的作者都对研究 5 杆和 6 杆 GBG 机构特性和位移方程的研究做出了有益的贡献。

在这些研究基础之上, 文献[11]给出了线性对称安装的 BNT 机构, 以及对应的相邻杆外角表示的

* 河北省自然科学基金资助项目(2011203193)。20190530 收到初稿, 20191104 收到修改稿

角位移方程, 扩展了人们对 BNT 机构类型的认识。

用相邻杆外角表示 BNT 机构和 GBG 机构位移方程的不足之处是, 处理 5 杆和 6 杆 GBG 机构时, 各相邻杆之间的角度关系没有用内角表示更加简单、清晰。

为了能更加简单、清晰地给出一种新提出的 7 杆 GBG 机构各杆件的几何关系和闭环位移方程, 本文给出一种新的用交错角锐角和相邻杆内角表示 5 杆、6 杆和 7 杆 GBG 机构位移方程的方法。

1 交错角为锐角的 5 和 6 杆 GBG 机构

为了能够用各相邻杆内角简洁、清晰的表示出各杆件的角位移关系, 本文规定 GBG 机构中连架杆和连杆两端回转副的交错角均为锐角, 其取值区间为第 4 象限和第 1 象限, 即 $(-90^\circ, 90^\circ)$ 。

图 1 是两个虚拟环路机架不共线的 5 杆 GBG 机构, 由机架 AF 延长线转向 EF 杆的夹角为 γ_c , 逆时针为正, 顺时针为负。

图 1 $\gamma_c < 0$ 的 5 杆 GBG 机构

图 2 是虚拟环路机架共线的 5 杆 GBG 机构, $\gamma_c = 0$ 。

图 2 机架共线($\gamma_c = 0$)的 5 杆 GBG

图 3 是虚拟环路机架共线的 6 杆 GBG 机构。5 杆和 6 杆 GBG 机构, 分别是由两环和三环 BNT 机构拆去相邻环路公用的连架杆得到的。

图 3 6 杆虚拟环路机架共线的 GBG 机构

拆杆后, 5 杆和 6 杆 GBG 机构的 C 点和 D 点仍然和拆杆前一样, 分别在以 O_C 和 O_D 为圆心的轨迹圆 S_C 和 S_D 上运动, 说明原有两环和三环的 BNT 约束条件没有破坏, 它们的运动学性能是完全等效的。

5 杆和 6 杆 GBG 机构是自由度为 1 的机构, 它们的环路阶, 分别为 $d=4$ 和 $d=5$ 。这两种机构都是含过约束的机构, 前者有两个过约束, 后者有一个过约束。这种过约束的特性使得无论相邻虚拟环路机架是否共线, 拆去相邻环路公用的连架杆以后, 都能保证所得到的单环路机构, 仍然保持原有多环路的 BNT 约束条件不变。

在现有 5 杆和 6 杆 GBG 机构研究基础上^[12-18], 本文探讨由四环路 BNT 机构拆去相邻环路公用的连架杆, 得到单环路的 7 杆机构是否还会有保持 BNT 约束条件不变的特性, 以及保持 BNT 约束条件不变的几何条件是什么, 怎样给出该 7 杆机构的结构参数和闭环位移方程。

2 7 杆 GBG 机构的形成和特性

图 4 是各环路机架共线自由度为 1 的四环路 BNT 机构, 分别以 O_C 、 O_D 、 O_E 为圆心, 以连架杆长 a 为半径, 做出连杆回转副中心点 C 、 D 、 E 的轨迹圆 S_C 、 S_D 、 S_E 。

图 4 四环路 BNT 机构结构参数和它的轨迹圆

拆去相邻环路公用的连架杆 8、9、10, 得到图 5 虚拟环路机架共线的新型单环路 7 杆机构。

图 5 7 杆 GBG 机构结构参数和它的轨迹圆

当驱动连架杆 1 时, 7 杆机构的 C 、 D 、 E 点仍然像图 4 的四环路 BNT 机构一样在各自的轨迹圆 S_C 、 S_D 、 S_E 上运动。

因此, 虚拟环路机架共线的单环路 7 杆机构, 仍然保持了四环路 BNT 的约束条件, 约束性质没有改变, 机构的运动学性能也是完全相同的, 具有等效性, 机构的自由度也是 1。

由于这个 7 杆机构和机架共线的 5 杆、6 杆 GBG

机构一样,都是满足 BNT 条件的自由度为 1 的单环路机构,为纪念 GBG 的发明和维护机构体系的完整性,这个新提出的符合 BNT 约束条件的 7 杆机构称之为 7 杆 GBG 机构,它是扩展了的 GBG 机构。

5 杆和 6 杆 GBG 机构只要满足 BNT 约束条件就行,不要求 GBG 机构各虚拟环(指拆杆前的环路)机架一定共线。例如图 1 和图 6 是两种不同类型的虚拟环路机架不共线的 5 杆 GBG 机构。

图 6 $\gamma_C > 0$ 的 5 杆 GBG 机构

图 1、图 2 和图 6 的三种结构的 5 杆 GBG 机构,在运动过程中 C 点都在轨迹圆 S_C 上,也就是它们的约束条件和多环路 BNT 机构的约束条件是相同的,没有因为虚拟环路机架是否共线而发生改变,所以运动学性能也没改变。

图 7 是虚拟环机架不共线的 6 杆 GBG 机构,运动过程中 C 点和 D 点仍然在轨迹圆 S_C 和 S_D 上。

图 7 6 杆 GBG 机构结构参数和它的轨迹圆

7 杆 GBG 机构的存在条件,除了需要满足 BNT 机构的结构参数的约束条件外,还必须满足虚拟环路机架共线的约束条件,或者说要求机架长度等于各连杆长度之和。

如果图 5 的 7 杆 GBG 机构,增加件 4 的杆长,破坏了虚拟环路 III 的 BNT 约束条件,使 C、D、E 三点都脱离了它们的轨迹圆 S_C 、 S_D 、 S_E ,从而使图 5 的 7 杆 GBG 机构演变成了图 8 的普通 7R 机构。

图 8 不满足 BNT 条件的 7R 机构

当图 5 的 7 杆 GBG 机构,把机架像图 9 一样,使 $O_E G$ 和 $A O_E$ 不在同一直线上时,也造成 C、D、E 三点都明显脱离了它们的轨迹圆 S_C 、 S_D 、 S_E ,使该机构演变成普通的 7R 机构。所以虚拟环机架共线是 7 杆 GBG 机构的必要几何条件之一。

图 9 机架不共线的 7R 机构

为了更加清晰和直观地反映 7 杆 GBG 机构各杆件的角位移关系,后面采用相邻杆的内角来介绍机构的闭环位移方程。为此,先把现有文献用外角表示的 5 杆和 6 杆 GBG 机构的位移方程改用相邻杆的内角给出。

5 杆和 6 杆 GBG 机构都是过约束机构,而新发现的 7 杆 GBG 机构是没有过约束的机构。因此可以得出一个重要的结论:过约束不是 GBG 机构的必要约束条件。与 5 杆和 6 杆 GBG 机构相比,7 杆 GBG 机构的一个显著的优点是,可以通过改变机架的共线性,既能得到含 BNT 约束条件的机构,也能得到不含 BNT 约束条件的两种性质截然不同的机构。这就比 5 杆和 6 杆 GBG 机构具有更广泛的应用条件。

3 5 杆 GBG 机构参数和内角位移方程

以往的 5 杆和 6 杆的 GBG 机构位移参数方程都是用相邻杆的外角表示的,如果用相邻杆的内角表示,讨论各环路角度关系是会更加清晰、直观和简便,为阅读方便我们从内角表示的 5 杆和 6 杆的 GBG 机构开始,给出它们的结构参数方程和闭环位移方程。

3.1 5 杆 GBG 机构用锐角表示的结构参数

图 6 是机架不共线的右旋型(连杆相对机架成右螺旋型)5 杆 GBG 机构。件 1 和 4 是连架杆,长为 a ,交错角为 α ,第 j 个连杆的长度为 b_j ,交错角为 β_j , α 和 β_j 均为锐角,取值区间为 $(-90^\circ, 90^\circ)$,逆时针为正,顺时针为负。第 j 个虚拟环机架杆长为 d_j ,交错角为 β_{dj} 。 γ_C 是第 I 环路机架延长线和第 II 环路机架的夹角,逆时针为正,顺时针为负。连杆的数目 L 等于总构件数 N 减 3,即 $L = N - 3$ 。

5 杆 GBG 机构的结构参数方程为

$$a_1=a_4=a \quad \alpha_1=\alpha_4=\alpha \quad b_j=d_j \quad \beta_j=\beta_{dj} \quad j=1, 2 \quad (1)$$

$$\frac{\sin \alpha}{a} = -\frac{\sin \beta_j}{b_j} \quad j=1, 2 \quad (2)$$

$$\tau_a = -\tau_j \quad |\tau_a| = |\tau_j| = 1 \quad j=1, 2 \quad (3)$$

τ_a 和 τ_j 分别是连架杆和连杆交错角的单位矢量, 逆时针为正, 顺时针为负。

虚拟环机架共线时($\gamma_c=0$), 机架总长为 d_r , 总交错角为 β_r , 则

$$d_r = \sum_{j=1}^2 b_j \quad \beta_r = \sum_{j=1}^2 \beta_j \quad j=1, 2 \quad (4)$$

3.2 5杆 GBG 机构用内角表示的位移方程

图 6 中, 各相邻杆内角的角位移, 分别为 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 、 θ_5 。根据 BNT 机构性质, 环路 I 和 II 中, $\theta_1=\theta_1'=\theta_3'$, $\theta_2=\theta_2'=\theta_4'$; $\theta_4=\theta_1''=\theta_3''$, $\theta_5=\theta_4''=\theta_2''$ 。 $\theta_3=\theta_3'+\theta_2''$ 。为简明起见省略推导, 直接给出用相邻杆内角表示的 5 杆 GBG 机构位移参数方程

$$\theta_3 - \theta_5 - \theta_1 = 0 \quad (5)$$

$$\theta_2 + \theta_4 = \pi - \gamma_c \quad (6)$$

$$\tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_2}{2} = \frac{\cos[(\beta_1 - \alpha)/2]}{\cos[(\beta_1 + \alpha)/2]} = k_1 \quad (7)$$

$$\tan \frac{\theta_4}{2} \tan \frac{\theta_5}{2} = \frac{\cos[(\beta_2 - \alpha)/2]}{\cos[(\beta_2 + \alpha)/2]} = k_2 \quad (8)$$

式(7)、(8)是环路 I 和 II 的相邻杆内角余弦正切积方程。式(5)~(8)是 4 个独立方程, 有 5 个位移参数(θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 、 θ_5), 因此可以求解。在环路 I 和 II 的机架不共线时, 把 $\theta_2=\pi-\gamma_c-\theta_4$ 代入式(7)和式(8)之积, 得到连架杆 1 和 4 的输入输出方程

$$\tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_5}{2} = k_1 k_2 \tan \frac{\gamma_c + \theta_4}{2} / \tan \frac{\theta_4}{2} \quad (9)$$

图 10 给出了 5 杆 GBG 机构相邻杆角位移的检测值。

图 10 5 杆 GBG 机构位移检测

机构的结构参数为: 连架杆的交错角 $\alpha=-30^\circ$, 连杆的交错角 $\beta_1=\beta_2=30^\circ$, $\gamma_c=6.68^\circ$, 各杆长相等。把 $\theta_1=84.40^\circ$, $\theta_4=85.77^\circ$ 代入式(9), 得

$$\tan \frac{84.40^\circ}{2} \tan \frac{\theta_5}{2} = \left(\frac{\cos 30^\circ}{\cos 0^\circ} \right)^2 \tan \frac{6.86^\circ + 85.77^\circ}{2} / \tan \frac{85.77^\circ}{2}$$

求得 $\theta_5=85.99^\circ$, 与图 10 的检测结果 $\theta_5=86^\circ$ 一致, 说明式(9)是正确的。环路 I 和 II 机架共线时, $\gamma_c=0^\circ$, 由式(9)得到连架杆 1 和 4 的输入输出方程为

$$\tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_5}{2} = \frac{\cos[(\beta_1 - \alpha)/2]}{\cos[(\beta_1 + \alpha)/2]} \frac{\cos[(\beta_2 - \alpha)/2]}{\cos[(\beta_2 + \alpha)/2]} = k_1 k_2 \quad (10)$$

这是用内角 θ_1 、 θ_5 表示的输入输出参数的正切积位移方程。

3.3 5杆 GBG 机构用外角表示的位移方程

图 11 是 1979 年机构学者 BAKER 在文献[6]给出的用环路 I 和环路 II 的两个传统 Bennett 机构组合成的 5 杆 Goldberg 机构。各轴角位移都是用传统的外角表示的, 其中 1' 和 3'' 点重合后为 1 轴, 1 轴的外角为 θ_1' , 内角为 θ_1 。

图 11 5 杆 Goldberg 机构的各轴外角

文献[6]给出了下面用传统位移分析的过程。在 4' 和 4'' 重合点, 由 $2\pi - \theta_2' + (2\pi - \theta_5') = \pi$, 得到 1 个线性位移方程, 即

$$\theta_2' + \theta_5' = 3\pi \quad (11)$$

在 1' 和 3'' 重合点, 由 $2\pi - \theta_3' + (2\pi - \theta_4') = \pi + \theta_1'$, 得到另一个线性位移方程, 即

$$\theta_1' + \theta_3' + \theta_4' = 3\pi \quad (12)$$

两个正弦形的正切积位移方程为

$$\tan \frac{\theta_2'}{2} \tan \frac{\theta_5'}{2} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha_{12} + \alpha_{23}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha_{12} - \alpha_{23}}{2}\right)} \quad (13)$$

$$\tan \frac{\theta_4'}{2} \tan \frac{\theta_5'}{2} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha_{51} + \alpha_{23}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha_{51} - \alpha_{23}}{2}\right)} \quad (14)$$

式中的 θ_1' , θ_2' , ..., θ_5' 分别为轴 1~5 的相邻杆外角, α_{23} 是连架杆的交错角, α_{12} 和 α_{51} 是连杆的交错角。

虽然, 式(11)~(14)都是正确的, 但是两个外角的线性方程式(11)、(12), 无论是几何关系的推导, 还是位移方程的表达形式, 都比内角的线性方程式(5)、(6)复杂, 因此用外角的位移方程推导多环路 BNT 机构和多杆的 GBG 机构的角位移关系, 都不如用内角简单、方便。这就是本文采用内角表示多杆 GBG 机构位移的原因。

4 6 杆 GBG 机构参数和内角位移方程

4.1 6 杆 GBG 机构的结构参数

图 7 所示, 各环路机架不共线的右旋型 6 杆 GBG 机构, 连架杆长为 a , 两个回转副轴线的交错角为 α 。第 j 个虚拟环连杆长度为 b_j , 交错角为 β_j , α 和 β_j 为锐角。第 j 个虚拟环机架长度为 d_j , 交错角为 β_{dj} 。 γ_C 是第 I 环机架延长线与第 II 环机架的夹角, γ_D 是第 II 环机架延长线与第 III 环机架的夹角。

6 杆 GBG 机构虚拟环路数为 $L=N-3=3$, 它的结构参数方程为

$$a_1=a_5=a \quad \alpha_1=\alpha_5=\alpha \quad b_j=d_j \quad \beta_j=\beta_{dj} \quad j=1,2,3 \quad (15)$$

$$\frac{\sin \alpha}{a} = -\frac{\sin \beta_j}{b_j} \quad j=1,2,3 \quad (16)$$

$$\tau_a = -\tau_j \quad |\tau_a| = |\tau_j| = 1 \quad j=1,2,3 \quad (17)$$

虚拟环机架共线时, 机架的总杆长为 d_r , 总交错角为 β_r 。

$$d_r = \sum_{j=1}^3 b_j \quad \beta_r = \sum_{j=1}^3 \beta_j \quad j=1,2,3 \quad (18)$$

4.2 6 杆 GBG 机构内角的位移方程

如图 12 所示, 机构的构件数为 $N=6$, 虚拟环路数为 $L=3$, 6 杆 GBG 机构各相邻杆杆内角的角位移分别为 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 、 θ_5 、 θ_6 。

图 12 6 杆 GBG 机构位移参数

在 O_C 点, 可以直观地得到

$$\theta_4^I + \theta_1^{II} = \theta_2 + \theta_3^{II} = \pi - \gamma_C \quad \theta_3^{II} = \theta_4 - \theta_2^{II} = \theta_4 - \theta_2$$

$$\theta_2 + \theta_4 - \theta_6 = \pi - \gamma_C$$

这是相邻杆内角的偶数角位移方程。

在 O_D 点, 得到

$$\theta_4^{II} + \theta_1^{III} = \theta_2^{II} + \theta_5 = \pi - \gamma_D \quad \theta_2^{II} = \theta_3 - \theta_3^I = \theta_3 -$$

$$\theta_3 - \theta_1 + \theta_5 = \pi - \gamma_D$$

这是相邻杆内角的奇数角位移方程。

再考虑到各虚拟环路相邻杆的余弦正切积, 可以给出用相邻杆内角表示的机架不共线的 6 杆 GBG 机构位移参数方程

$$\theta_3 + \theta_5 - \theta_1 = \pi - \gamma_D \quad (19)$$

$$\theta_2 + \theta_4 - \theta_6 = \pi - \gamma_C \quad (20)$$

$$\tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_2}{2} = \frac{\cos[(\beta_1 - \alpha)/2]}{\cos[(\beta_1 + \alpha)/2]} = k_1 \quad (21)$$

$$\tan \frac{\theta_1^{II}}{2} \tan \frac{\theta_2^{II}}{2} = \frac{\cos[(\beta_2 - \alpha)/2]}{\cos[(\beta_2 + \alpha)/2]} = k_2 \quad (22)$$

$$\tan \frac{\theta_5}{2} \tan \frac{\theta_6}{2} = \frac{\cos[(\beta_3 - \alpha)/2]}{\cos[(\beta_3 + \alpha)/2]} = k_3 \quad (23)$$

式(19)~(23)为 5 个独立方程, 其中有 6 个位移参数 (θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 、 θ_5 、 θ_6), 因此可以求解。

因为 $\theta_1^{II} = \pi - \gamma_C - \theta_2$, $\theta_2^{II} = \theta_4^{II} = \pi - \gamma_D - \theta_5$, 式(22)可以改写成下面的形式

$$\tan \frac{\theta_1^{II}}{2} \tan \frac{\theta_2^{II}}{2} = \tan \frac{\pi - \gamma_C - \theta_2}{2} \tan \frac{\pi - \gamma_D - \theta_5}{2} = \frac{\cos[(\beta_2 - \alpha)/2]}{\cos[(\beta_2 + \alpha)/2]} = k_2 \quad (24)$$

由式(21)、式(24)、式(23)相乘, 得

$$\tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_2}{2} \tan \frac{\pi - \gamma_C - \theta_2}{2} \tan \frac{\pi - \gamma_D - \theta_5}{2} \tan \frac{\theta_5}{2} \tan \frac{\theta_6}{2} = k_1 k_2 k_3$$

因为

$$\tan \frac{\pi - \gamma_C - \theta_2}{2} \tan \frac{\pi - \gamma_D - \theta_5}{2} = \tan^{-1} \frac{\gamma_C + \theta_2}{2} \tan^{-1} \frac{\gamma_D + \theta_5}{2}$$

代入上式, 得到连架杆 1 和 5 的输入输出方程

$$\tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_6}{2} = k_1 k_2 k_3 \tan \frac{\gamma_C + \theta_2}{2} \tan \frac{\gamma_D + \theta_5}{2} \left/ \left(\tan \frac{\theta_2}{2} \tan \frac{\theta_5}{2} \right) \right. \quad (25)$$

机架共线时, $\gamma_C=0$, $\gamma_D=0$, 连架杆 1 和 5 的输入和输出方程为

$$\tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_6}{2} = \frac{\cos[(\beta_1 - \alpha)/2]}{\cos[(\beta_1 + \alpha)/2]} \cdots \frac{\cos[(\beta_3 - \alpha)/2]}{\cos[(\beta_3 + \alpha)/2]} = k_1 k_2 k_3 \quad (26)$$

这是机架共线时, 用内角 θ_i 、 θ_6 表示的输入输出参数的正切积位移方程。

5 7 杆 GBG 机构结构参数和位移方程

5.1 7 杆 GBG 机构的结构参数

图 5 是 7 杆 GBG 机构, 虚拟环路数 $L=4$, 虚拟环机架共线, 连架杆是件 1 和 6。

机架长为 d_r , 交错角为 β_j 。其他符号含义与 6 杆 GBG 机构相同。7 杆 GBG 机构的结构参数为

$$a_1=a_6=a \quad \alpha_1=\alpha_6=\alpha \quad d_r=\sum_{j=1}^4 b_j \quad \beta_j=\sum_{j=1}^4 \beta_j \quad (27)$$

$$\frac{\sin \alpha}{a} = -\frac{\sin \beta_j}{b_j} \quad j=1,2,3,4 \quad (28)$$

$$\tau_a = -\tau_j \quad |\tau_a| = |\tau_j| = 1 \quad j=1,2,3,4 \quad (29)$$

5.2 7 杆 GBG 机构位移方程

如图 13 所示, 7 杆 GBG 机构各相邻杆内角的角位移分别为 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 、 θ_5 、 θ_6 、 θ_7 。在第 j 个虚拟环路中, 4 个相邻杆内角的角位移分别为 θ_1^j 、 θ_2^j 、 θ_3^j 、 θ_4^j ($j=I, II, III, IV$)。

图 13 7 杆 GBG 机构的位移参数

由于 7 杆 GBG 机构与图 4 的 BNT 机构具有运动学的等效性, 所以图 13 中每个虚拟环路都仍然相当于是一个 BNT 机构。每个环路的角位移都可以用 BNT 机构相邻杆内角的余弦正切积的三角方程来计算, 即

$$\tan \frac{\theta_1^I}{2} \tan \frac{\theta_2^I}{2} = \frac{\cos[(\beta_1 - \alpha)/2]}{\cos[(\beta_1 + \alpha)/2]} = k_1 \quad (30)$$

$$\tan \frac{\theta_1^{II}}{2} \tan \frac{\theta_2^{II}}{2} = \frac{\cos[(\beta_2 - \alpha)/2]}{\cos[(\beta_2 + \alpha)/2]} = k_2 \quad (31)$$

$$\tan \frac{\theta_1^{III}}{2} \tan \frac{\theta_2^{III}}{2} = \frac{\cos[(\beta_3 - \alpha)/2]}{\cos[(\beta_3 + \alpha)/2]} = k_3 \quad (32)$$

$$\tan \frac{\theta_1^{IV}}{2} \tan \frac{\theta_2^{IV}}{2} = \frac{\cos[(\beta_4 - \alpha)/2]}{\cos[(\beta_4 + \alpha)/2]} = k_4 \quad (33)$$

分别从 C 和 D 点分析环路的角位移关系, 可以得到两个角位移的线性方程。在 C 点, 因为

$$\theta_1 = \theta_3^I \quad \theta_2 = \theta_2^I \quad \theta_6 = \theta_3^{IV} \quad \theta_7 = \theta_4^{IV}$$

所以

$$\theta_3 = \theta_3^I + \theta_2^{II} = \theta_3^I + \theta_4^{II} = \theta_1 + (\pi - \theta_1^{III}) = \theta_1 + \pi - (\theta_5 - \theta_2^{IV}) = \theta_1 + \pi - \theta_5 + (\theta_4^{IV}) = \theta_1 + \pi - \theta_5 + \theta_7$$

得到所有含奇数角位移的线性方程

$$\theta_3 + \theta_5 - \theta_7 - \theta_1 = \pi \quad (34)$$

在 D 点

$$\theta_4 = \theta_3^{II} + \theta_2^{III} = \pi - \theta_2 + (\pi - \theta_1^{IV}) = 2\pi - \theta_2 - \theta_6$$

得到所有含偶数角位移的线性方程

$$\theta_2 + \theta_4 + \theta_6 = 2\pi \quad (35)$$

$$\theta_1^I = \theta_1 \quad \theta_2^I = \theta_2 \quad \theta_1^{IV} = \theta_3^I \quad \theta_2^{IV} = \theta_4^I \quad \theta_3^I = \theta_3$$

$$\theta_1^{II} = \pi - \theta_4^I = \pi - \theta_2 \quad \theta_2^{II} = \theta_3 - \theta_3^I = \theta_3 - \theta_1$$

$$\theta_1^{III} = \theta_3^{III} = \theta_5 - \theta_2^{IV} = \theta_5 - \theta_7 \quad \theta_2^{III} = \pi - \theta_1^{IV} = \pi - \theta_1$$

将式(30)~(35)用相邻杆的内角表示, 分别得到下面的内角余弦正切积的方程

$$\tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_2}{2} = \frac{\cos[(\beta_1 - \alpha)/2]}{\cos[(\beta_1 + \alpha)/2]} = k_1 \quad (36)$$

$$\tan \frac{\pi - \theta_2}{2} \tan \frac{\theta_3 - \theta_1}{2} = \frac{\cos[(\beta_2 - \alpha)/2]}{\cos[(\beta_2 + \alpha)/2]} = k_2 \quad (37)$$

$$\tan \frac{\theta_3 - \theta_1}{2} \tan \frac{\pi - \theta_6}{2} = \frac{\cos[(\beta_3 - \alpha)/2]}{\cos[(\beta_3 + \alpha)/2]} = k_3 \quad (38)$$

$$\tan \frac{\theta_6}{2} \tan \frac{\theta_7}{2} = \frac{\cos[(\beta_4 - \alpha)/2]}{\cos[(\beta_4 + \alpha)/2]} = k_4 \quad (39)$$

式(34)~(39)为 6 个独立方程, 其中有 7 个位移参数 (θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 、 θ_5 、 θ_6 、 θ_7), 因此这 6 个显式的闭环位移可以求解。

如果把连架杆件 1 和 6 作为输入输出, 它们的输入输出方程为

$$\tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_7}{2} = \frac{\cos[(\beta_1 - \alpha)/2]}{\cos[(\beta_1 + \alpha)/2]} \cdots \frac{\cos[(\beta_4 - \alpha)/2]}{\cos[(\beta_4 + \alpha)/2]} = k_1 \cdots k_4 \quad (40)$$

这就是连架杆件 1 和 6 的输入输出的内角余弦正切积形式方程。

5.3 7 杆 GBG 机构位移方程的检验

图 14 是四环路的 BNT 机构, 其中 $\theta_3 = \theta_3^I + \theta_2^{II}$, $\theta_4 = \theta_3^{II} + \theta_2^{III}$, $\theta_5 = \theta_3^{III} + \theta_2^{IV}$, 拆除相邻环路公用连架杆 8、9、10 之后得到图 15 的 7 杆 GBG 机构。

对比图 14 和图 15 的两个机构, 实际检测的角位移 $\theta_1 \sim \theta_7$, 都是一一相等的, 说明拆除公用的连架杆后, 机构的运动学性质没有改变, 是完全等效的。为了使角位移的理论值与实际值对比方便, 把各角位移的理论值用上角标 L 表示, 即第 j 个角位移用 $^L\theta_j$ 表示。

在图15中, 7杆GBG机构的结构参数为: 连架杆 $a=120\text{ mm}$, 交错角 $\alpha=-30^\circ$, 连杆 $b_1=b_2=b_3=b_4=120\text{ mm}$, 交错角 $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4=30^\circ$, 机架 $d_r=\sum_{j=1}^4 b_j=480\text{ mm}$, $\beta_r=\sum_{j=1}^4 \beta_j=120^\circ$ 。

图14 四环BNT机构的位移参数

图15 7杆GBG机构位移参数

把 ${}^L\theta_1''=180^\circ-{}^L\theta_2=180^\circ-113.366^\circ=66.634^\circ$ 代入式(31), $\tan\frac{66.634^\circ}{2}\tan\frac{{}^L\theta_2''}{2}=\frac{\cos 30^\circ}{\cos 0^\circ}$, 求得理论值 ${}^L\theta_2''=105.604^\circ$, 与实测值 $\theta_2''=105.60^\circ$, 相差 0.004° 。理论值 ${}^L\theta_3={}^L\theta_2''+\theta_1=105.604^\circ+59.30^\circ=164.904^\circ$, 与实测值 $\theta_3=164.90^\circ$ 的误差为 0.004° 。

理论值

$${}^L\theta_1'''=180^\circ-{}^L\theta_2''=180^\circ-105.604^\circ=74.396^\circ$$

代入式(32), $\tan\frac{74.396^\circ}{2}\tan\frac{{}^L\theta_2'''}{2}=\frac{\cos 30^\circ}{\cos 0^\circ}$, 求得理论值 ${}^L\theta_2'''=97.537^\circ$, 与实测值 $\theta_2'''=97.54^\circ$ 相差 0.003° 。 ${}^L\theta_4={}^L\theta_2''' + {}^L\theta_1''=97.537^\circ+66.634^\circ=164.171^\circ$, 与实测值 $\theta_4=164.17^\circ$ 的误差为 0.001° 。把 $\theta_1=59.30^\circ$ 代入式(40), $\tan\frac{59.30^\circ}{2}\tan\frac{{}^L\theta_7}{2}=\left(\frac{\cos 30^\circ}{\cos 0^\circ}\right)^4$, 求得 ${}^L\theta_7=89.318^\circ$, 与实测值 $\theta_7=89.32^\circ$ 的误差为 0.002° 。把 ${}^L\theta_7$ 代入式(39), $\tan\frac{{}^L\theta_6}{2}\tan\frac{89.318^\circ}{2}=\frac{\cos 30^\circ}{\cos 0^\circ}$, 求得 ${}^L\theta_6=82.462^\circ$, 与实测值 $\theta_6=82.47^\circ$ 相差 0.008° 。

件1作为原动件, 用 $\theta_1=59.30^\circ$ 代入式(36)或式(30), 得到 $\tan\frac{59.30^\circ}{2}\tan\frac{{}^L\theta_2}{2}=\frac{\cos 30^\circ}{\cos 0^\circ}$, 求得理论值 ${}^L\theta_2=113.366^\circ$, 与实测值 $\theta_2=113.36^\circ$ 仅相差 0.006° 。

${}^L\theta_5={}^L\theta_1''' + {}^L\theta_7=74.396^\circ+89.318^\circ=163.714^\circ$, 与实测值 $\theta_4=163.71^\circ$ 的误差为 0.004° 。

用理论值检验奇数角位移线性方程的式(34), ${}^L\theta_3 + {}^L\theta_5 - {}^L\theta_7 - {}^L\theta_1=164.904^\circ+163.714^\circ-89.318^\circ-59.30^\circ=180^\circ$ 。误差为 0° 。用实测值检验式(34) $\theta_3 + \theta_5 - \theta_7 - \theta_1=164.90^\circ+163.71^\circ-89.32^\circ-59.30^\circ=179.99^\circ$ 。误差为 0.001° 。由于这四个实测值都有精度的取舍, 并且其代数差的误差很小, 所以可以忽略不计。

用理论值检验偶数角位移线性方程的式(35) ${}^L\theta_2 + {}^L\theta_4 + {}^L\theta_6=113.366^\circ+164.171^\circ+82.462^\circ=359.999^\circ$ 误差为 0.001° 。式(35)的三个理论值都是由三角函数计算得到的, 误差很小, 可以忽略不计。用实测值检验式(35) $\theta_2 + \theta_4 + \theta_6=113.36^\circ+164.17^\circ+82.47^\circ=360^\circ$ 。误差为 0° 。

表1是通过公式计算的理论结果和在Solidworks中检测得到的实际结果, 以及两者的误差($\alpha=-30^\circ$, $\beta_1=30^\circ$)。

表 1 位移的实测值与计算理论值对比表(°)

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7
理论值	59.30	113.366	164.904	164.171	163.714	82.462	80.318
实测值	59.30	113.36	164.90	164.17	163.71	82.47	89.32
误差	0	0.006	0.004	0.001	0.004	0.008	0.002

从表 1 的结果可以看出, 用公式计算的理论值和实际检测值的误差不超过 0.01° 。考虑到各角度之间都是三角函数的关系, 无论是理论计算值, 还是实测值都有取舍的误差问题, 所以 0.01° 的误差是可以忽略不计的。

以上的计算分析, 充分证明了 7 杆 GBG 机构各环路之间的内角正切积方程式(30)~(33), 以及式(36)~(39)都是正确的, 用相邻杆内角分析多杆 GBG 机构具有直观、清晰的特性。检验结果也证明了, 用轨迹圆检验多环路是否具有 BNT 约束条件具有充分的可靠性和实用性。

6 结论

(1) 机架共线的四环路 BNT 机构, 拆去相邻环路中公用的连架杆, 可以得到自由度为 1 的具有 BNT 约束条件的单环路 7 杆 GBG 机构。

(2) 单环路的 7 杆 GBG 机构与拆除相邻环路公用连架杆的四环 BNT 机构具有等效的运动学性能。

(3) 7 杆 GBG 机构的存在条件: 1)连架杆与连杆的结构参数满足 BNT 约束条件; 2)机架长度等于连杆长度之和, 机架的交错角等于连杆的交错角之和。

(4) 用相邻杆内角分析多杆 GBG 机构的几何关系比用相邻杆外角更直观、简明和清晰。

(5) 在 Solidworks 中, 对 7 杆 GBG 机构的各相邻杆角位移进行测试, 测试结果与公式(34)~(40)的理论计算结果一致, 证明了这些公式的正确性, 也证明了用轨迹圆检验机构是否存在 BNT 约束条件具有可靠性和实用性。

参 考 文 献

[1] BENNETT G T. A new mechanism[J]. Engineering, 1903, 76: 777-778.

[2] BENNETT G T. The parallel motion of Sarrus and some allied mechanisms[C]//Philosophical Magazine Series 6, 1905, 9 (54): 803-810.

[3] BENNETT G T. Deformable octahedra[C]//Proceedings of the London Mathematical Society, 1911, 2s-10(1): 309-343.

[4] BENNETT G T. The skew isogram mechanism[C]//Proceedings of the London Mathematical Society, 1914, 2s-13(1): 151-173.

[5] GOLDBERG M. New five-bar and six-bar linkages in three dimensions[J]. Transactions of the ASME, 1943, 65: 649-663.

[6] BAKER J E. The Bennett, Goldberg and Myard linkages- in perspective[J]. Mechanism and Machine Theory, 1979, 14(4): 239-253.

[7] SONG C Y, CHEN Y. A spatial 6R linkage derived from subtractive Goldberg 5R linkages[J]. Mechanism and Machine Theory, 2011, 46(8): 1097-1106.

[8] WOHLHART K. Merging two general Goldberg 5R linkages to obtain a new 6R space mechanism[J]. Mechanism and Machine Theory, 1991, 26(7): 659-668.

[9] CHEN Y, YOU Z. Spatial 6R linkages based on the combination of two Goldberg 5R linkages[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(11): 1484-1498.

[10] SONG C Y, CHEN Y. Multiple linkage forms and bifurcation behaviours of the double-subtractive-Goldberg 6R linkage[J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 57(2): 95-110.

[11] SONG C Y, CHEN Yan, CHEN I-Ming. A 6R linkage reconfigurable between the line-symmetric Bricard linkage and the Bennett linkage[J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 70: 278-292.

[12] CHEN Y, CHAI W H. Bifurcation of a special line and plane symmetric Bricard linkage[J]. Mechanism and Machine Theory, 2011, 46(4): 515-533.

[13] CHEN Y, YOU Z, TARNAI T. Threefold-symmetric Bricard linkages for deployable structures[J]. Int. J. Solids Struct., 2005, 42(8): 2287-2301.

[14] BAKER J E. Introducing the supplementary Bennett loop[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2010, 225(2): 472-479.

[15] FENG Huijuan, CHEN Yan, DAI Jian S, et al. Kinematic study of the general plane-symmetric Bricard linkage and its bifurcation variations[J]. Mechanism and Machine Theory, 2017, 116: 89-104.

[16] DENG Zongquan, HUANG Hanlin, LI Bing, et al. Synthesis of deployable/foldable single loop mechanisms with revolute joints[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2011, 3(3): 031006.

[17] 牟德君, 张一同, 张兴. 机构自由度和构件自由度的关系及本质区别[J]. 机械工程学报, 2018, 54(5): 74-83.

- MU Dejun, ZHANG Yitong, ZHANG Xing. Relations between DOF of mechanism and DOF of links and their essential differences[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(5): 74-83
- [18] 张兴, 牟德君, 张一同, 等. 基于广义杆组对多环路三移一转位移输出机构的型综合[J]. 机械工程学报, 2019, 55(15): 154-162.
- ZHANG Xing, MU Dejun, ZHANG Yitong, et al. Type synthesis of multi-loop mechanisms with three translational and one rotational displacement parameters based on generalized link group[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(15): 154-162.
- [19] 郭金伟, 许允斗, 刘文兰, 等. 基于四面体单元的新型可展机构自由度分析[J]. 机械工程学报, 2019, 55(12): 9-18.
- GUO Jinwei, XU Yundou, LIU Wenlan, et al. Mobility analysis of novel deployable mechanism based on tetrahedral element[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(12): 9-18.
- [20] XI Da, GAO Feng. Type synthesis of walking robot legs[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2018, 31: 15-27.
-
- 作者简介: 牟德君, 女, 1967 年出生, 副教授。主要研究方向为并联机构的设计和分析理论。
E-mail: djmu@ysu.edu.cn
- 张一同(通信作者), 男, 1945 年出生, 教授。主要研究方向为机构结构理论。
E-mail: ytzhang@ysu.edu.cn
- 李艳文, 女, 1966 年出生, 教授。主要研究方向为并联机构的设计和分析理论。
E-mail: ywl@ysu.edu.cn
- 胡波, 男, 1982 年出生, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为并联机构的设计和分析理论。
E-mail: hubo@ysu.edu.cn
- 卢文娟, 女, 1983 年出生, 副教授。主要研究方向为并联机构的设计和分析理论。
E-mail: luwenjuan@ysu.edu.cn