DOI: 10.3901/JME.2020.17.048

变胞机构构态切换时的冲击问题分析与仿真研究*

宋艳艳^{1,2} 畅博彦^{1,2} 金国光^{1,2} 魏展^{1,2} 李博^{1,2}

(1. 天津工业大学机械工程学院 天津 300387;

2. 天津工业大学天津市现代机电装备技术重点实验室 天津 300387)

摘要: 研究变胞机构在构态切换过程中的冲击问题。根据变胞机构的变胞方式, 将构态切换时产生的冲击运动分为静冲击运动和动冲击运动两类。采用 Newton-Euler 方程分别建立变胞机构的静/动冲击动力学模型, 并结合经典碰撞理论和恢复系数方程, 推导出构态切换时变胞构件的静/动冲量求解模型。对变胞机构的静/动冲击动力学模型进行等效分析, 分别求得变胞运动副处的冲量与静/动冲量之间的函数表达式, 并以此为基础, 结合树系统内部冲击动力学理论, 建立变胞机构非变胞运动副处的冲量求解模型。以平面 3 自由度变胞机构和平面纸板折叠变胞机构为例, 研究机构在构态切换时的冲击问题并进行数值仿真计算, 分析不同输入特性和恢复系数对机构冲击运动的影响。所提理论与方法也适用于多体系统内部构件之间冲击问题的研究。

关键词: 变胞机构; 构态切换; 冲击运动; 冲量求解模型

中图分类号: TH12

Analysis and Simulation of Impact Problem of Metamorphic Mechanism Considering Configuration Transformation

SONG Yanyan^{1,2} CHANG Boyan^{1,2} JIN Guoguang^{1,2} WEI Zhan^{1,2} LI Bo^{1,2}

(1. School of Mechanical Engineering, Tiangong University, Tianjin 300387;

2. Tianjin Key Laboratory of Advanced Mechatronics Equipment Technology, Tiangong University, Tianjin 300387)

Abstract: The impact problem of metamorphic mechanism in the process of configuration transformation is investigated. According to the metamorphic mode of the metamorphic mechanism, the impact motion generated by configuration transformation can be divided into stable impact motion and movable impact motion. The stable/movable impact dynamic models of metamorphic mechanism are established by the Newton-Euler equation, and the stable/movable impulse solving models are derived from classical collision theory and recovery coefficient equation. By equivalent analysis of the stable/movable impact dynamic models of the metamorphic mechanism, the functional relations between the impulse at the metamorphic joint and the stable/movable impulse are obtained respectively. Based on the internal impact dynamic theory of serial mechanism, the impulse solving model at non-metamorphic joint is established. Taking the planar 3-DOF metamorphic mechanism and the planar double folded metamorphic mechanism as examples, their impact problems are studied and numerical simulations are carried out to analyze the effect of different input characteristics and recovery coefficients on the impact motion. The proposed theory and method can also be applied to the study of impact between internal components of multi-body system.

Key words: metamorphic mechanism; configuration transformation; impact motion; impulse solving model

0 前言

变胞机构^[1-2]在运动或工作过程中, 随着构态的

不断切换, 变胞运动副^[3]的约束类型和约束性态将发生变化, 由此产生的“内冲击”^[4-5]将导致系统中部分构件的加速度发生突变并产生较大振动, 严重时将直接影响系统的稳定性、可靠性和安全性^[6], 必须予以重点考虑。因此, 在含有变胞机构的机械系统中, 变胞机构构态切换时的冲击运动性能直接决定了系统能否安全正常地工作。近年来, 关于变胞机构构态切换过程的研究引起了学术界的普遍关

* 天津市自然科学基金(17JCQNJC03900, 18JCQNJC05300)、天津市教委科研计划(2018KJ205)、天津市高等学校创新团队培养计划(TD13-5037)和国家自然科学基金(51475330)资助项目。20190930 收到初稿, 20200109 收到修改稿

注。HU 等^[7]研究了非接触刀具的变轨迹变位姿特性,并针对数控火焰切割机床的运动特点,研制了一种能改变其拓扑结构的变胞数控火焰切割机床;荣誉等^[8]提出一种通过对超冗余并联机构的电动机抱闸组合锁定,实现其机构变胞变换的方法;李小彭等^[9-10]以等效阻力梯度模型为基础,对一种约束变胞五杆机构构态变换的随机性进行分析,并对其在构态切换时的运动学和动力学进行了研究;崔允浩等^[11]根据变胞机构构态切换过程中的运动学和动力学特性,分析了影响变胞机构构态变换可靠性的主要因素;刘秀莲等^[12]通过 ADAMS 仿真分析了空间复杂曲面切割机变胞机构构态切换时的冲击问题;王黎斌等^[13]以平面五杆变胞机构为例,对构态切换时的动力学性能进行了分析;甄伟鲲等^[14]提出腰部构态变换原则,并用几何方法说明了腰部构型变化可扩大机器人腿部的活动空间;王汝贵等^[15]以面向任务的可控变胞式码垛机器人机构为研究对象,将最大李雅普诺夫指数作为系统动态稳定度的评价指标,对其进行了稳定性分析;XU 等^[16]基于变胞原理,提出了多足机器人稳定裕度的定义,用来评价机器人的稳定性。以上研究成果为变胞机构的冲击问题研究提供了理论基础。

变胞机构属于多体系统范畴,变胞机构构态切换时的冲击运动问题是典型的变拓扑多体系统碰撞问题。针对多体系统碰撞问题的研究,ZHANG 等^[17]针对柔性钢丝绳在捕获过程中的运动特点,提出了一种基于拉伸/弯曲弹簧-质点的离散模型,在引入绳索捕获装置约束的基础上完成了对柔性钢丝绳动力学模型的建立;DUAN 等^[18-19]通过引入冲量势的概念,运用 Lagrange 方程推导出了系统的刚柔耦合碰撞动力学方程,并结合冲量动量法和接触约束法提出了一种碰撞动力学求解方法;董楸煌等^[20]基于动量守恒关系,利用空间机械臂与目标卫星接触点间的运动几何关系和力传递关系,分析了捕获过程中的碰撞冲击对空间机械臂运动状态的影响;KHULIEF 等^[21]运用广义冲量-动量定理研究了柔性体的碰撞,并求出了碰撞后系统的动力学响应;CHAPNIK 等^[22]采用有限元建模,建模时考虑了多种阻尼效应,对单臂机器人碰撞动力学进行了研究;华卫江等^[23]采用广义冲量-动量定理研究了两个柔性机器人系统发生碰撞的动力学建模问题;金国光等^[24]基于碰撞过程中产生冲量和高斯最小约束原理,提出了一种确定接触碰撞后系统状态量的方法;YIGIT 等^[25]将广义冲量-动量定理和恢复系数方程相结合,研究了柔性体撞击问题的可靠性;白争锋等^[26]分析了柔性多体系统的接触碰撞条件,并利用

非线性等效弹簧阻尼模型建立了柔性体的碰撞模型,讨论了柔性量的动态响应以及碰撞过程中碰撞力的变化规律。可以看出,目前多体系统碰撞问题的研究主要集中于解决多体系统与静止或运动的工作环境之间、多体系统与多体系统之间的碰撞及其动力学响应问题,针对多体系统内部构件之间发生的冲击问题分析涉及较少,其中最为典型的的就是变胞机构构态切换时的冲击问题分析。

本文根据变胞机构的变胞方式,将构态切换时产生的冲击运动划分为静冲击运动和动冲击运动。针对两种冲击运动类型,采用 Newton-Euler 方程分别建立变胞机构的静/动冲击动力学模型,并结合经典碰撞理论和恢复系数方程,依次推导出构态切换时变胞构件的静/动冲量求解模型。在静/动冲击动力学模型的基础上,对其进行等效分析,分别构建变胞运动副处的冲量与静/动冲量之间的函数关系。进而基于树系统内部冲击动力学理论,建立非变胞运动副处的冲量求解模型。最后,对仿真算例进行冲击问题分析,验证了本文方法的有效性和可行性。

1 变胞机构静/动冲量求解模型

根据变胞机构在构态切换时变胞方式的不同,可对构态切换时产生的冲击运动进行分类。针对包含 c 个构态的变胞机构,当其由构态 p 切换到构态 $p+1$ 的瞬间 ($1 \leq p \leq c-1$),因活动构件与机架合并产生的冲击运动,称为静冲击运动,此时,活动构件所受的冲量称为静冲量;因活动构件与另一活动构件合并产生的冲击运动,称为动冲击运动,此时,活动构件所受的冲量称为动冲量。

1.1 静冲量求解模型

针对任意构态 p 的 n 自由度变胞机构,记广义坐标为 $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ 。根据 Newton-Euler 方程,其动力学方程可表示为

$$D\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H} = \boldsymbol{\tau}_a + \boldsymbol{\tau}_c \quad (1)$$

式中, D 为系统的惯性矩阵; $\mathbf{H}$ 为包含系统离心力、哥氏力和重力的矩阵; $\boldsymbol{\tau}_a$ 为广义坐标对应的驱动力; $\boldsymbol{\tau}_c$ 为广义坐标对应的弹力及其他外力矢量。

当静冲击运动发生的瞬间,以树系统为例(如图 1 所示),首要工作就是切断变胞运动副 O_1 用于计算变胞构件 B_0 和 B_1 所受到的静冲量。切断变胞运动副 O_1 ,使得静冲击运动系统转化为只受理想约束的多体系统 f 。为了使多体系统 f 与原静冲击运动系统在动力学上等价,则必须将切断变胞运动副 O_1 作用于变胞构件 B_0 和 B_1 的约束力和因构态切换变胞构件 B_0 和 B_1 受到的冲击力视为附加的外力施加于

图1 静冲击运动系统

该多体系统 f 上。此外, 多体系统 f 在切断变胞运动副 O_1 处必须满足相应的运动学约束条件。

设变胞机构由构态 p 切换到构态 $p+1$ 的瞬时, 切断变胞运动副 O_1 得到多体系统 f 的广义坐标为 $\mathbf{q}_f \in \mathbf{R}^{n_f \times 1}$, n_f 为多体系统 f 的自由度。冲击点 $\mathbf{X}_1$ 的位置可写成含有广义坐标 $\mathbf{q}_f$ 的函数表达式为

$$\mathbf{X}_1 = \boldsymbol{\varphi}_f(\mathbf{q}_f) \quad (2)$$

根据系统运动学关系, 冲击点 $\mathbf{X}_1$ 在外围空间中的速度与广义速度之间的关系为

$$\dot{\mathbf{X}}_1 = [\mathbf{J}_{q_f}^v] \dot{\mathbf{q}}_f \quad (3)$$

$$[\mathbf{J}_{q_f}^v] = \frac{\partial(\boldsymbol{\varphi}_f)}{\partial(\mathbf{q}_f)^T} \quad (4)$$

在静冲击运动系统发生构态切换的瞬时, 冲击点 $\mathbf{X}_0$ 可用广义坐标 $\mathbf{q}_f$ 来表示

$$\mathbf{X}_0 = \boldsymbol{\varphi}_f(\mathbf{q}_f) \quad (5)$$

式(5)关系成立时, 在接触点 $\mathbf{X}_1$ ($\mathbf{X}_0$) 处产生静冲击且静冲击力为 $\mathbf{F}_s$ 。根据静力平衡条件, 由式(1)可知, 静冲击运动系统的动力学方程为

$$\mathbf{D}_f \ddot{\mathbf{q}}_f + \mathbf{H}_f = \boldsymbol{\tau}_{af} + \boldsymbol{\tau}_{cf} + \boldsymbol{\tau}_{cutf} + \boldsymbol{\tau}_{sf} \quad (6)$$

式中, $\mathbf{D}_f$ 为多体系统的惯性矩阵; $\mathbf{H}_f$ 为包含多体系统离心力、哥氏力和重力的矩阵; $\boldsymbol{\tau}_{af}$ 为多体系统广义坐标对应的驱动力; $\boldsymbol{\tau}_{cf}$ 为多体系统广义坐标对应的弹力及其他外力矢量; $\boldsymbol{\tau}_{cutf}$ 为多体系统切断变胞运动副处的广义约束力矢量; $\boldsymbol{\tau}_{sf}$ 为多体系统的广义静冲量矢量。

根据虚功原理, 广义约束力矢量和广义静冲量矢量分别为

$$\boldsymbol{\tau}_{cutf} = [\mathbf{J}_{q_f}^{cut}]^T \mathbf{F}_{cutf} \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{sf} = [\mathbf{J}_{q_f}^v]^T \mathbf{F}_s \quad (8)$$

式中, $[\mathbf{J}_{q_f}^{cut}]$ 为多体系统中切断变胞运动副 O_1 处的速度雅可比矩阵, $\mathbf{F}_{cutf}$ 为切断变胞运动副 O_1 处的约束反力。

根据 Newton-Euler 方程, 切断变胞运动副 O_1 处的约束反力可表示成静冲击运动系统广义坐标 $\mathbf{q}$ 的形式

$$\mathbf{F}_{cutf} = \mathbf{D}_{cut} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}_{cutf} \quad (9)$$

式中, $\mathbf{F}_{cutf} = [F_{cutfx} \ F_{cutfy} \ F_{cutfz}]^T$, n 为静冲击运动系统的自由度, $\mathbf{D}_{cut}$ 为约束反力 $\mathbf{F}_{cutf}$ 关于广义加速度 $\ddot{\mathbf{q}}$ 的 $3 \times n$ 系数矩阵, $\mathbf{H}_{cutf}$ 为相应的 3×1 阶列阵。

基于切断变胞运动副 O_1 处的约束方程可知 $\ddot{\mathbf{q}} \in \ddot{\mathbf{q}}_f$, 即

$$\mathbf{F}_{cutf} = \mathbf{D}_{cutf} \ddot{\mathbf{q}}_f + \mathbf{H}_{cutf} \quad (10)$$

式中, $\mathbf{D}_{cutf}$ 为约束反力 $\mathbf{F}_{cutf}$ 关于广义加速度 $\ddot{\mathbf{q}}_f$ 的系数矩阵。

联立式(6)、(7)、(8)、(10), 静冲击运动系统的动力学方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_f \ddot{\mathbf{q}}_f + \mathbf{H}_f = \boldsymbol{\tau}_{af} + \boldsymbol{\tau}_{cf} + [\mathbf{J}_{q_f}^{cut}]^T \mathbf{H}_{cutf} + \\ [\mathbf{J}_{q_f}^{cut}]^T \mathbf{D}_{cutf} \ddot{\mathbf{q}}_f + [\mathbf{J}_{q_f}^v]^T \mathbf{F}_s \end{aligned} \quad (11)$$

根据经典碰撞理论, 对系统作如下假设: 冲击时间无限小, 构态切换过程中所有构件的位置和方位不变, 冲击是点接触, 构态切换过程中构件的形状和惯量不变^[24]。由于构态切换过程中冲击多是弹性冲击, 设碰撞恢复系数为 e ($0 < e < 1$), 冲击点速度增量沿着接触表面的法矢量为 $\mathbf{n}$, 则系统发生构态切换时应满足恢复系数方程

$$(\Delta \mathbf{v}_1 - \Delta \mathbf{v}_2)^T \mathbf{n} = -(1+e)(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^T \mathbf{n} \quad (12)$$

式中, $\mathbf{v}_1$ 、 $\mathbf{v}_2$ 表示构态切换前变胞构件在冲击点的绝对速度; $\Delta \mathbf{v}_1$ 、 $\Delta \mathbf{v}_2$ 表示变胞构件在构态切换过程中的速度增量。根据上述假设可知, 构态切换后机构关节的位置保持不变, 各关节的角速度是有限量。对式(11)在整个构态切换过程 Δt 内积分得

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} (\mathbf{H}_f - \boldsymbol{\tau}_{af} - \boldsymbol{\tau}_{cf} - [\mathbf{J}_{q_f}^{cut}]^T \mathbf{H}_{cutf}) dt + \\ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} (\mathbf{D}_f \ddot{\mathbf{q}}_f - [\mathbf{J}_{q_f}^{cut}]^T \mathbf{D}_{cutf} \ddot{\mathbf{q}}_f) dt = \\ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} [\mathbf{J}_{q_f}^v]^T \mathbf{F}_s dt \end{aligned} \quad (13)$$

式中, t_0 为构态切换前的瞬时时刻。

因为位移和速度在构态切换过程中为有限量, 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 式(13)左端的第一项趋于零, 得

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_f - [\mathbf{J}_{q_f}^{cut}]^T \mathbf{D}_{cutf})(\dot{\mathbf{q}}_f(t_0 + \Delta t) - \dot{\mathbf{q}}_f(t_0)) = \\ [\mathbf{J}_{q_f}^v]^T \mathbf{P}_s \end{aligned} \quad (14)$$

式中, $\mathbf{P}_s = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \mathbf{F}_s dt$ 为构态切换时产生的静冲量,

由此可得系统广义速度增量的表达式为

$$\Delta \dot{\mathbf{q}}_f = (\mathbf{M}_f)^{-1} [\mathbf{J}_{q_f}^v]^T \mathbf{P}_s \quad (15)$$

式中, $\mathbf{M}_f = \mathbf{D}_f - [\mathbf{J}_{q_f}^{cut}]^T \mathbf{D}_{cutf}$ 。

冲击点的速度增量为

$$\Delta \mathbf{v}_1 = [\mathbf{J}_{q_f}^v](\mathbf{M}_f)^{-1}[\mathbf{J}_{q_f}^v]^T \mathbf{P}_s \quad (16)$$

已知活动构件与机架合并时, 机架始终属于固定表面, 因此机架的绝对速度和速度增量总是零 ($\mathbf{v}_2 = \Delta \mathbf{v}_2 = 0$)。假设接触表面没有摩擦, 则静冲量的方向总是沿着冲击点法矢量 $\mathbf{n}$, 将式(16)代入式(12)得

$$([\mathbf{J}_{q_f}^v](\mathbf{M}_f)^{-1}[\mathbf{J}_{q_f}^v]^T \mathbf{P}_s)^T \mathbf{n} = -(1+e)\mathbf{v}_1^T \mathbf{n} \quad (17)$$

又因为

$$\mathbf{P}_s = P_s \mathbf{n} \quad (18)$$

则变胞构件在冲击点处所受到的静冲量大小为

$$P_s = \frac{-(1+e)\mathbf{v}_1^T \mathbf{n}}{\mathbf{n}^T ([\mathbf{J}_{q_f}^v](\mathbf{M}_f)^{-1}[\mathbf{J}_{q_f}^v]^T)^T \mathbf{n}} \quad (19)$$

1.2 动冲量求解模型

如图 2 所示, 当动冲击运动发生的瞬时, 活动构件 B_2 与另一活动构件 B_3 合并。为求解变胞构件 B_2 和 B_3 在构态切换过程中所受到的动冲量, 切断变胞运动副 O_3 , 使变胞机构拆分成两个发生外冲击的多体系统 f_1 和 f_2 。若使得多体系统 f_1 和 f_2 与原动冲击运动系统在动力学上等价, 则必须将切断变胞运动副 O_3 作用于变胞构件 B_2 和 B_3 的约束力和因构态切换变胞构件 B_2 和 B_3 受到的冲击力视为附加的外力施加于相应的多体系统 f_1 和 f_2 上。此外, 多体系统 f_1 和 f_2 在切断变胞运动副 O_3 处需要满足相应运动学约束条件。

图 2 动冲击运动系统

设多体系统 f_i 的广义坐标分别为 $\mathbf{q}_{f_i} \in \mathbf{R}^{n_i \times 1}$ ($i=1,2$), n_i 为多体系统 f_i 的自由度。冲击点 $\mathbf{X}_2$ 和 $\mathbf{X}_3$ 的位置可分别写成含广义坐标 $\mathbf{q}_{f_1}$ 和 $\mathbf{q}_{f_2}$ 的函数表达式为

$$\mathbf{X}_2 = \boldsymbol{\varphi}_{f_1}(\mathbf{q}_{f_1}) \quad (20)$$

$$\mathbf{X}_3 = \boldsymbol{\varphi}_{f_2}(\mathbf{q}_{f_2}) \quad (21)$$

根据系统运动学关系可知, 冲击点 $\mathbf{X}_2$ 和 $\mathbf{X}_3$ 在惯性坐标系中与相应的广义速度之间的关系为

$$\dot{\mathbf{X}}_2 = [\mathbf{J}_{q_{f_1}}^v] \dot{\mathbf{q}}_{f_1} \quad (22)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_3 = [\mathbf{J}_{q_{f_2}}^v] \dot{\mathbf{q}}_{f_2} \quad (23)$$

$$[\mathbf{J}_{q_{f_i}}^v] = \frac{\partial(\boldsymbol{\varphi}_{f_i})}{\partial(\mathbf{q}_{f_i})^T} \quad (i=1,2) \quad (24)$$

在动冲击运动系统发生构态切换的瞬时, 冲击点 $\mathbf{X}_3$ 可用广义坐标 $\mathbf{q}_{f_i}$ 来表示

$$\mathbf{X}_3 = \boldsymbol{\varphi}_{f_i}(\mathbf{q}_{f_i}) \quad (25)$$

式(25)关系成立时, 活动构件 B_2 与另一活动构件 B_3 在接触点 $\mathbf{X}_2(\mathbf{X}_3)$ 处发生动冲击作用且动冲击力为 $\mathbf{F}_m$ 。根据静力平衡条件, 由式(1)可知, 动冲击运动系统的动力学方程为

$$\mathbf{D}_{f_i} \ddot{\mathbf{q}}_{f_i} + \mathbf{H}_{f_i} = \boldsymbol{\tau}_{af_i} + \boldsymbol{\tau}_{cf_i} + \boldsymbol{\tau}_{cutf_i} + \boldsymbol{\tau}_{mf_i} \quad (i=1,2) \quad (26)$$

式中, $\mathbf{D}_{f_i}$ 为多体系统 f_i 的惯性矩阵; $\mathbf{H}_{f_i}$ 为包含多体系统 f_i 离心力、哥氏力和重力的矩阵; $\boldsymbol{\tau}_{af_i}$ 为多体系统 f_i 广义坐标对应的驱动力; $\boldsymbol{\tau}_{cf_i}$ 为多体系统 f_i 广义坐标对应的弹力及其他外力矢量; $\boldsymbol{\tau}_{cutf_i}$ 为多体系统 f_i 切断变胞运动副处的广义约束力矢量; $\boldsymbol{\tau}_{mf_i}$ 为多体系统 f_i 的广义动冲量矢量。

根据虚功原理, 多体系统 f_i 切断变胞运动副处的广义约束力矢量和多体系统 f_i 的广义动冲量矢量可分别表示为

$$\boldsymbol{\tau}_{cutf_i} = [\mathbf{J}_{q_{f_i}}^{cut}]^T \mathbf{F}_{cutf_i} \quad (i=1,2) \quad (27)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{mf_i} = [\mathbf{J}_{q_{f_i}}^v]^T \mathbf{F}_{m_i} \quad (i=1,2) \quad (28)$$

式中, $[\mathbf{J}_{q_{f_i}}^{cut}]$ 为多体系统 f_i 中变胞运动副 O_3 处的速度雅可比矩阵, $\mathbf{F}_{cutf_i}$ 为多体系统 f_i 切断变胞运动副 O_3 处的约束反力, 且 $\mathbf{F}_{cutf_1} = -\mathbf{F}_{cutf_2}$, $\mathbf{F}_{m_1} = -\mathbf{F}_{m_2}$ 。

根据 Newton-Euler 方程, 多体系统 f_2 中变胞运动副 O_3 处的约束反力可表示成动冲击运动系统广义坐标 $\mathbf{q}$ 的形式

$$\mathbf{F}_{cutf_2} = \mathbf{D}_{cut} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}_{cut} \quad (29)$$

式中, $\mathbf{F}_{cutf_2} = [\mathbf{F}_{cutf_{2x}} \quad \mathbf{F}_{cutf_{2y}} \quad \mathbf{F}_{cutf_{2z}}]^T$, n 为动冲击运动系统的自由度, $\mathbf{D}_{cut}$ 为多体系统 f_2 中约束反力 $\mathbf{F}_{cutf_2}$ 关于广义加速度 $\ddot{\mathbf{q}}$ 的 $3 \times n$ 阶系数矩阵, $\mathbf{H}_{cut}$ 为相应的 3×1 阶列阵。

基于切断变胞运动副 O_3 处的约束方程可知

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}}_{f_2} + \mathbf{B} \quad (30)$$

式中, $\mathbf{A}$ 为广义加速度 $\ddot{\mathbf{q}}$ 关于广义加速度 $\ddot{\mathbf{q}}_{f_2}$ 的系数矩阵, $\mathbf{B}$ 为相应的列矩阵。

将式(30)代入式(29), 整理得

$$\mathbf{F}_{cutf_2} = \mathbf{D}_{cutf_2} \ddot{\mathbf{q}}_{f_2} + \mathbf{H}_{cutf_2} \quad (31)$$

式中, $\mathbf{D}_{cutf_2} = \mathbf{D}_{cut} \mathbf{A}$, $\mathbf{H}_{cutf_2} = \mathbf{D}_{cut} \mathbf{B} + \mathbf{H}_{cut}$ 。

联立式(26)、(27)、(28)、(31), 动冲击运动系统的动力学方程为

$$\begin{cases} D_{f_1} \ddot{\mathbf{q}}_{f_1} + \mathbf{H}_{f_1} = \boldsymbol{\tau}_{af_1} - [\mathbf{J}_{q_{f_1}}^{cut}]^T D_{cutf_2} \ddot{\mathbf{q}}_{f_2} - \\ \quad [\mathbf{J}_{q_{f_1}}^{cut}]^T \mathbf{H}_{cutf_2} + [\mathbf{J}_{q_{f_1}}^v]^T \mathbf{F}_{m_1} + \boldsymbol{\tau}_{cf_1} \\ D_{f_2} \ddot{\mathbf{q}}_{f_2} + \mathbf{H}_{f_2} = \boldsymbol{\tau}_{af_2} + [\mathbf{J}_{q_{f_2}}^{cut}]^T D_{cutf_2} \ddot{\mathbf{q}}_{f_2} + \\ \quad [\mathbf{J}_{q_{f_2}}^{cut}]^T \mathbf{H}_{cutf_2} - [\mathbf{J}_{q_{f_2}}^v]^T \mathbf{F}_{m_1} + \boldsymbol{\tau}_{cf_2} \end{cases} \quad (32)$$

根据基本假设对式(32)在整个构态切换过程 Δt 内积分得

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} (\mathbf{H}_{f_1} - \boldsymbol{\tau}_{af_1} - \boldsymbol{\tau}_{cf_1} + [\mathbf{J}_{q_{f_1}}^{cut}]^T \mathbf{H}_{cutf_2}) dt + \\ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} (D_{f_1} \ddot{\mathbf{q}}_{f_1} + [\mathbf{J}_{q_{f_1}}^{cut}]^T D_{cutf_2} \ddot{\mathbf{q}}_{f_2}) dt = \\ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} [\mathbf{J}_{q_{f_1}}^v]^T \mathbf{F}_{m_1} dt \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} (\mathbf{H}_{f_2} - \boldsymbol{\tau}_{af_2} - \boldsymbol{\tau}_{cf_2} - [\mathbf{J}_{q_{f_2}}^{cut}]^T \mathbf{H}_{cutf_2}) dt + \\ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} (D_{f_2} \ddot{\mathbf{q}}_{f_2} - [\mathbf{J}_{q_{f_2}}^{cut}]^T D_{cutf_2} \ddot{\mathbf{q}}_{f_2}) dt = \\ - \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} [\mathbf{J}_{q_{f_2}}^v]^T \mathbf{F}_{m_1} dt \end{aligned} \quad (34)$$

由于动冲击运动所持续的时间 Δt 非常短暂, 且相互冲击力非常大, 因此在构态切换过程中只有其广义速度发生了变化, 广义坐标并未发生显著变化。根据上述分析, 式(33)、(34)可整理得

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{q_{f_1}}^{cut}]^T D_{cutf_2} (\dot{\mathbf{q}}_{f_2}(t_0 + \Delta t) - \dot{\mathbf{q}}_{f_2}(t_0)) + \\ D_{f_1} (\dot{\mathbf{q}}_{f_1}(t_0 + \Delta t) - \dot{\mathbf{q}}_{f_1}(t_0)) = [\mathbf{J}_{q_{f_1}}^v]^T \mathbf{P}_{m_1} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} (D_{f_2} - [\mathbf{J}_{q_{f_2}}^{cut}]^T D_{cutf_2}) (\dot{\mathbf{q}}_{f_2}(t_0 + \Delta t) - \dot{\mathbf{q}}_{f_2}(t_0)) = \\ - [\mathbf{J}_{q_{f_2}}^v]^T \mathbf{P}_{m_1} \end{aligned} \quad (36)$$

式中, $\mathbf{P}_{m_1} = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \mathbf{F}_{m_1} dt$ 为构态切换时产生的动冲量。

由式(36)可得多体系统 f_2 广义速度增量的表达式为

$$\Delta \dot{\mathbf{q}}_{f_2} = -(\mathbf{M}_{f_2})^{-1} [\mathbf{J}_{q_{f_2}}^v]^T \mathbf{P}_{m_1} \quad (37)$$

$$\mathbf{M}_{f_2} = D_{f_2} - [\mathbf{J}_{q_{f_2}}^{cut}]^T D_{cutf_2} \quad (38)$$

多体系统 f_2 冲击点处的速度增量为

$$\Delta \mathbf{v}_2 = -[\mathbf{J}_{q_{f_2}}^v] (\mathbf{M}_{f_2})^{-1} [\mathbf{J}_{q_{f_2}}^v]^T \mathbf{P}_{m_1} \quad (39)$$

将式(37)代入式(35), 整理得

$$\Delta \dot{\mathbf{q}}_{f_1} = \mathbf{M}_{f_1} \mathbf{P}_{m_1} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{f_1} = (D_{f_1})^{-1} [\mathbf{J}_{q_{f_1}}^{cut}]^T D_{cutf_2} (\mathbf{M}_{f_2})^{-1} [\mathbf{J}_{q_{f_2}}^v]^T + \\ (D_{f_1})^{-1} [\mathbf{J}_{q_{f_1}}^v]^T \end{aligned} \quad (41)$$

多体系统 f_1 冲击点处的速度增量为

$$\Delta \mathbf{v}_1 = [\mathbf{J}_{q_{f_1}}^v] \mathbf{M}_{f_1} \mathbf{P}_{m_1} \quad (42)$$

又因为

$$\mathbf{P}_{m_1} = \mathbf{P}_{m_1} \mathbf{n} \quad (43)$$

式中, $\mathbf{n}$ 为冲击点的法矢量。

将式(39)、(42)、(43)代入式(12), 整理得

$$\mathbf{P}_{m_1} = \frac{-(1+e)(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^T \mathbf{n}}{\mathbf{n}^T ([\mathbf{J}_{q_{f_1}}^v] \mathbf{M}_{f_1} + [\mathbf{J}_{q_{f_2}}^v] (\mathbf{M}_{f_2})^{-1} [\mathbf{J}_{q_{f_2}}^v]^T)^T \mathbf{n}} \mathbf{n} \quad (44)$$

对于含有闭环约束的变胞机构, 可通过切断回路中的某(个)些多余变胞运动副, 使之转化为树系统, 再运用树系统的理论对其进行求解。

2 变胞运动副冲量求解模型

变胞机构可看作是一个由机架、运动副、非变胞构件和变胞构件组成的多体系统, 其中运动副又分为变胞运动副和非变胞运动副。变胞机构在构态切换的瞬时, 变胞构件之间发生接触碰撞并产生冲击力, 冲击力通过运动副由变胞构件传递至其他非变胞构件, 从而引起各构件角速度发生突变。由于变胞机构的动力学耦合特性, 接触冲击不仅会对变胞构件造成一定的损伤, 还会对系统产生扰动, 严重时将导致变胞过程无法完成。

图3所示为变胞机构构态切换时的冲量求解过程示意图, 在变胞机构由构态 p 切换到构态 $p+1$ 的瞬时, 基于不同的变胞方式, 变胞构件在冲击点处产生相应的静/动冲量。结合包含切断变胞运动副的静/动冲击动力学模型, 建立静/动冲量与变胞运动副冲量之间的函数关系, 求解得到变胞运动副冲量。在静/动冲量和变胞运动副冲量的双重作用下, 结合树系统内部冲击动力学理论, 获得非变胞运动副冲量。因此, 根据不同的变胞方式, 分析冲击运动对变胞运动副的影响是必不可少的。

2.1 静冲击运动系统的变胞运动副冲量求解模型

对于变胞机构而言, 由于变胞运动副的存在, 各个运动副的运动并不是相互独立的, 而是存在着一定的耦合关系。在第1.1节中, 采用切分的方法消除变胞运动副约束, 将静冲击运动系统转化为只受理想约束的多体系统来考虑。

将式(7)、(8)代入式(6), 可得到式(6)的另一种等价形式

$$D_f \ddot{\mathbf{q}}_f + \mathbf{H}_f = \boldsymbol{\tau}_{af} + \boldsymbol{\tau}_{cf} + [\mathbf{J}_{q_f}^{cut}]^T \mathbf{F}_{cutf} + [\mathbf{J}_{q_f}^v]^T \mathbf{F}_s \quad (45)$$

根据经典碰撞理论假设可知, 构态切换后运动副的位置保持不变, 各运动副的角速度是有限量。对式(45)在整个构态切换过程 Δt 内进行积分并化简, 可得多体系统广义速度增量的表达式

图3 变胞机构构态切换时的冲量求解过程

$$\Delta \dot{\mathbf{q}}_f = (\mathbf{D}_f)^{-1} ([\mathbf{J}_{q_f}^{cut}]^T \mathbf{P}_{cutf} + [\mathbf{J}_{q_f}^v]^T \mathbf{P}_s) \quad (46)$$

式中, $\mathbf{P}_{cutf} = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \mathbf{F}_{cutf} dt$ 为构态切换时变胞运动副处的冲量。

冲击点的速度增量为

$$\Delta \mathbf{v}_1 = [\mathbf{J}_{q_f}^v] (\mathbf{D}_f)^{-1} ([\mathbf{J}_{q_f}^{cut}]^T \mathbf{P}_{cutf} + [\mathbf{J}_{q_f}^v]^T \mathbf{P}_s) \quad (47)$$

将式(47)代入式(12), 整理可得到在静冲击运动系统中变胞运动副处的冲量大小为

$$\mathbf{P}_{cutf} = \frac{-(1+e) \mathbf{v}_1^T \mathbf{n} - \mathbf{n}^T ([\mathbf{J}_{q_f}^v] (\mathbf{D}_f)^{-1} [\mathbf{J}_{q_f}^v]^T)^T \mathbf{n} \mathbf{P}_s}{\mathbf{n}^T ([\mathbf{J}_{q_f}^v] (\mathbf{D}_f)^{-1} [\mathbf{J}_{q_f}^{cut}]^T)^T \mathbf{n}} \quad (48)$$

2.2 动冲击运动系统的变胞运动副冲量求解模型

结合第 1.2 节的动冲量求解过程, 切断变胞运动副后, 使得动冲击运动系统拆分成两个发生外冲击的多体系统。将式(27)、(28)代入式(26), 可得到

式(26)的另一种等价形式

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{f_i} \ddot{\mathbf{q}}_{f_i} + \mathbf{H}_{f_i} &= \boldsymbol{\tau}_{af_i} + \boldsymbol{\tau}_{cf_i} + [\mathbf{J}_{q_{f_i}}^{cut}]^T \mathbf{F}_{cutf_i} + \\ &[\mathbf{J}_{q_{f_i}}^v]^T \mathbf{F}_{m_i} \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (49)$$

对式(49)在整个构态切换过程 Δt 内进行积分并化简, 则多体系统 f_i 广义速度增量的表达式为

$$\Delta \dot{\mathbf{q}}_{f_i} = (\mathbf{D}_{f_i})^{-1} ([\mathbf{J}_{q_{f_i}}^{cut}]^T \mathbf{P}_{cutf_i} + [\mathbf{J}_{q_{f_i}}^v]^T \mathbf{P}_{m_i}) \quad (50)$$

根据运动学关系, 可得多体系统 f_i 冲击点的速度增量为

$$\Delta \mathbf{v}_i = [\mathbf{J}_{q_{f_i}}^v] (\mathbf{D}_{f_i})^{-1} ([\mathbf{J}_{q_{f_i}}^{cut}]^T \mathbf{P}_{cutf_i} + [\mathbf{J}_{q_{f_i}}^v]^T \mathbf{P}_{m_i}) \quad (51)$$

将式(51)代入式(12), 整理后可得到动冲击运动系统中变胞运动副处的冲量大小为

$$\mathbf{P}_{cutf} = \frac{-(1+e)(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^T \mathbf{n} - \mathbf{n}^T \left(\sum_{i=1}^2 \mathbf{W}_i \right)^T \mathbf{n} \mathbf{P}_{m_i}}{\mathbf{n}^T \left(\sum_{i=1}^2 ([\mathbf{J}_{q_{f_i}}^v] (\mathbf{D}_{f_i})^{-1} [\mathbf{J}_{q_{f_i}}^{cut}]^T) \right)^T \mathbf{n}} \quad (52)$$

式中, $\mathbf{W}_i = [\mathbf{J}_{q_{f_i}}^v] (\mathbf{D}_{f_i})^{-1} [\mathbf{J}_{q_{f_i}}^v]^T$ 。

3 非变胞运动副冲量求解模型

由变胞构件和变胞运动副的冲量求解过程可知, 针对不同的变胞方式, 变胞机构在切断变胞运动副的瞬时, 均转化为变胞构件受到冲击力和切断变胞运动副处受到约束作用力的树系统。因此, 非变胞运动副处冲量的求解过程可看作是树系统的内部冲量求解过程。

树系统受到外部冲击时运动副处的冲量 $\mathbf{p}$ 和冲量矩 $\boldsymbol{\tau}$ 关于外部冲量 $\mathbf{p}_l$ 和外部冲量矩 $\boldsymbol{\tau}_l$ 的计算表达式如下^[27]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} = [\mathbf{S}_e] \begin{bmatrix} \mathbf{p}_l \\ \boldsymbol{\tau}_l \end{bmatrix} \quad (53)$$

式中, $[\mathbf{S}_e]$ 为外部冲击关于内部冲击的映射矩阵。

根据上述分析可知, 由于变胞机构切断变胞运动副使之转化为变胞构件受到冲击力和切断变胞运动副处受到约束作用力的树系统, 因此变胞机构动力学方程可由相应的树系统动力学方程获得, 即把切断变胞运动副处的内部冲击和变胞构件处的静/动冲击视为外部冲击, 通过求解树系统内部冲击的方法求解变胞机构非变胞运动副处的内部冲击。根据式(53), 各树系统的内部冲击可直接表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} = [\mathbf{S}_h] \begin{bmatrix} \mathbf{p}_h \\ \boldsymbol{\tau}_h \end{bmatrix} + [\mathbf{S}_{cut}] \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{cut} \\ \boldsymbol{\tau}_{cut} \end{bmatrix} \quad (54)$$

式中, $[\mathbf{S}_h]$ 为变胞构件在冲击点处的外部冲击关于

内部冲击的映射矩阵; $[S_{cut}]$ 为变胞运动副处的外部冲击关于内部冲击的映射矩阵; $\mathbf{p}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 分别为串联多系统受到外部冲击时运动副处的冲量和冲量矩; $\mathbf{p}_h$ 和 $\boldsymbol{\tau}_h$ 分别为变胞构件在构态切换瞬时产生的冲量和冲量矩; $\mathbf{p}_{cut}$ 和 $\boldsymbol{\tau}_{cut}$ 分别为变胞运动副处的冲量和冲量矩。

4 算例仿真

为了完备性起见, 本节列举两个典型示例, 用以研究变胞机构构态切换时的冲击问题。第一个示例为平面 3 自由度变胞机构^[28]的动冲击问题研究; 第二个示例为平面双层纸板折叠变胞机构^[29-30]的静冲击问题研究。

4.1 平面 3 自由度变胞机构

以图 4 所示的平面 3 自由度变胞机构为研究对象, 求解机构在动冲击发生的瞬时冲击点、变胞运动副和非变胞运动副处所产生的冲量。表 1 给出了平面 3 自由度变胞机构的几何参数。仿真过程中, 关节 O_1 处用电动机驱动, 关节 O_2 和 O_3 处分别装有扭簧装置, 设置关节驱动力矩 $\tau_1 = 1.9550 - 0.0196\dot{\theta}_1$, $\tau_2 = 0.1625 - 0.0161(\theta_2 - \theta_1)$, $\tau_3 = 0.23 - 0.026(\theta_3 - \theta_2)$ 。仿真初始时刻, 机构处于水平位置 ($\theta_{10} = \theta_{20} = \theta_{30} = 0^\circ$), 各关节角速度均为 0。

表 1 平面 3 自由度变胞机构的几何参数

构件编号 i	长度 l_i/m	横截面积/ m^2	体密度/ (kg/m^3)
1	0.25	2×10^{-4}	7800
2	0.125	2×10^{-4}	7800
3	0.125	2×10^{-4}	7800

对于 3 自由度的平面变胞机构, 具有两种工作构态。当 $|\theta_3 - \theta_2| \neq \pi(\text{rad})$ 时, 机构处于构态 1(图 4a); 当 $|\theta_3 - \theta_2| = \pi(\text{rad})$ 时, 连杆 3 与连杆 2 合并(图 4b), 从该瞬时起机构进入构态 2。将给定机构的几何参数和初始条件分别代入式(44)、(52)、(54), 可计算得到机构在发生动冲击的瞬时, 变胞构件、变胞运动副和非变胞运动副处的冲量大小, 如表 2 所示。

(a) 构态二

图 4 平面 3 自由度变胞机构

表 2 动冲击运动系统的冲量数值解

名称	符号	数值/(N · s)
动冲量	P_m	1.015 7
变胞运动副 O_3 处冲量	P_{cutf}	0.959 4
非变胞运动副 O_2 处冲量	P_2	0.714 2
非变胞运动副 O_1 处冲量	P_1	0.701 0

由表 2 可知, 机构在构态切换的瞬时, 动冲量、变胞运动副冲量和非变胞运动副冲量的大小以递减的方式进行传递, 且非变胞运动副 O_2 处的冲量大于 O_1 处, 说明构态切换使机构在运动过程中发生了较大的冲击作用, 导致变胞构件以及各个关节的速度发生突变, 这是变胞机构系统产生振动的主要原因, 严重时将直接影响系统的稳定性、可靠性和安全性。

为保证机构在运动过程中的稳定性、可靠性和安全性, 需要对机构的初始构型进行合理选取, 因此有必要研究机构在不同输入条件下的冲击特性。在满足变胞条件的基础上, 假设 $\theta_{30} = \theta_{20} + \pi/2$, 对 θ_{10} 和 θ_{20} 在 $-30^\circ \sim 10^\circ$ 范围内分别取 40 个点, 分析机构在不同初始构型下的冲击特性。

图 5 给出了平面 3 自由度变胞机构在不同初始构型下动冲量、变胞运动副冲量和非变胞运动副冲量的变化规律。由图可知, 随着变胞机构初始构型的变化, 动冲量、变胞运动副冲量和非变胞运动副冲量的大小也随之发生了明显变化, 说明冲量对机构初始构型的变化比较敏感。与不考虑构态切换的

图 5 初始构型与冲量关系图

机构相比,机构在构态切换的瞬时存在着明显的刚性冲击,且在不同初始构型下冲击力的耦合作用导致关节产生相应的冲击力,造成系统的不稳定。

图6分别为初始构型与冲量的 Oxz 、 Oyz 截面关系图。由图6a可以看出,在 Oxz 截面中,当 $\theta_{20} = -30^\circ$ 或 $\theta_{20} = -10^\circ$ 时,动冲量、变胞运动副冲量和非变胞运动副冲量随 θ_{10} 的变化逐渐增大,另外,虽然非变胞运动副 O_2 处的冲量与 O_1 处的差异不明显,但非变胞运动副 O_2 处的冲量始终大于非变胞 O_1 处;当 $\theta_{20} = 10^\circ$ 时,动冲量、变胞运动副冲量和非变胞运动副冲量随 θ_{10} 的变化逐渐减小,且非变胞运动副 O_2 处的冲量与 O_1 处的差异随 θ_{10} 的变化逐渐不明显。

由图6b可以看出,在 Oyz 截面中,当 $\theta_{10} = \pm 10^\circ$ 或 $\theta_{10} = -30^\circ$ 时,动冲量、变胞运动副冲量和非变胞运动副冲量随 θ_{20} 的变化先变小再增大,另外,虽然非变胞运动副 O_2 处的冲量与 O_1 处的差异不明显,但非变胞运动副 O_2 处的冲量始终大于 O_1 处。

图6 初始构型与冲量的 Oxz 、 Oyz 截面关系图

为了进一步分析机构的冲击特性,图7给出了动冲量、变胞运动副冲量和非变胞运动副冲量的大小随恢复系数的变化规律。由图7可知,动冲量、变胞运动副冲量和非变胞运动副冲量随着恢复系数

的增加而增大,其中非变胞运动副冲量 P_1 从 $0.1784 \text{ N} \cdot \text{s}$ 增加到 $0.32 \text{ N} \cdot \text{s}$,增幅为79.4%。动冲量的增幅更为明显,这是由于构件切换的瞬时,变胞构件是直接发生冲击作用的构件。

图7 恢复系数与冲量关系图

4.2 平面双层纸板折叠变胞机构

王德伦等^[29]采用矩阵运算的数学综合法对平面双层纸板折叠变胞机构进行了型综合研究。畅博彦等^[30]采用变约束旋量原理对其进行构型综合,求解出所有可能的支链约束组合,列举满足对应约束条件的多种支链运动副形式。该机构(图8)具有两个构态。

构态1: 水平折叠机构,如图8a所示,水平推动单层纸板的左侧,左侧第二幅面沿着第二折痕转动到垂直位置;

构态2: 垂直折叠机构,如图8b所示,完成第一幅面绕第一折痕的转动,与第二幅面重合。

图8 平面双层纸板折叠变胞机构

图9所示为平面双层纸板折叠变胞源机构简图,在运动副 O_4 处采用力变胞,即机构处于构态1时,在运动副 O_4 处装有扭簧装置,使得构件3和4之间的相对运动阻力大于滑块的运动阻力,从而保

图9 平面双层纸板折叠变胞源机构简图

证构件 3 和 4 相对静止；当机构处于构态 2 时，在运动副 O_5 处添加几何极限限位约束，使得滑块移动到指定位置，遇到几何限位后停止移动。

为分析机构在不同输入下的冲击特性，表 3、4 分别给出了平面双层纸板折叠变胞机构的几何参数以及扭簧和冲击的仿真参数。仿真过程中，设置主动件 1 的运动规律为 $\theta_1 = \pi + \frac{\pi}{5}t$ (rad)。

表 3 平面双层纸板折叠变胞机构的几何参数

i	长度 l_i/m	质量 m_i/kg	转动惯量 $(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$
1	0.08	0.075	63
2	0.2	0.165	669
3	0.09	0.162	268
4	0.091	0.455	450

表 4 平面双层纸板折叠变胞机构扭簧和冲击的仿真参数

参数	数值
刚度系数 $k/(\text{N} \cdot \text{mm}/^\circ)$	18
阻尼系数 $c/(\text{N} \cdot \text{mm} \cdot \text{s}/^\circ)$	1
恢复系数 e	0.8

结合上面的几何参数和仿真参数，表 5 给出了机构在发生静冲击的瞬时，变胞构件、变胞运动副以及非变胞运动副处的冲量大小。

表 5 静冲击运动系统的冲量数值解

名称	符号	数值 $(\text{N} \cdot \text{s})$
静冲量	P_s	0.052 2
变胞运动副 O_5 处冲量	P_{cutf}	0.050 3
非变胞运动副 O_4 处冲量	P_4	0.029 0
非变胞运动副 O_3 处冲量	P_3	0.013 3
非变胞运动副 O_2 处冲量	P_2	0.004 0
非变胞运动副 O_1 处冲量	P_1	0.002 0

由表 5 可知，机构在构态切换的瞬时，变胞构件以及各个关节处均产生了相应的冲击作用。从仿真结果来看，静冲量、变胞运动副冲量、非变胞运动副冲量的大小以递减的方式进行传递，且冲击点近端非变胞运动副处的冲量大于远端非变胞运动副处。另外，变胞运动副冲量已经比较接近于静冲量，但是明显高于非变胞运动副冲量，尤其是在非变胞运动副 O_1 和 O_2 处，其冲量大小几乎为 0，这反映了构态切换对变胞构件及各个关节冲击作用的激发程度不同，由于变胞构件是直接发生冲击作用的杆，因此变胞构件处受到的冲击作用最大。

为了进一步分析不同输入及恢复系数对机构静冲击作用的影响，分别给出了在不同主动件转速和恢复系数的情况下，动冲量、变胞运动副冲量和非

变胞运动副冲量的变化规律，如图 10 和图 11 所示。

图 10 主动件转速与冲量关系图

图 11 恢复系数与冲量关系图

由图 10、11 可知，虽然非变胞运动副 O_2 处的冲量与 O_1 处的基本一致，但非变胞运动副 O_2 处的冲量始终大于 O_1 处。图 10 中静冲量、变胞运动副冲量和非变胞运动副冲量的大小随着主动件转速的增加而增大，且静冲量、变胞运动副冲量和非变胞运动副 O_4 处冲量的变化相对比较明显。由图 11 可知，静冲量、变胞运动副冲量、非变胞运动副冲量与恢复系数成正比，随着恢复系数的增大，静冲量、变胞运动副冲量、非变胞运动副冲量也呈现相应的增大趋势。

5 结论

(1) 对变胞机构因构态切换产生的冲击运动进行了分类研究，根据变胞方式的不同，将其冲击运动分为静冲击运动和动冲击运动两大类。

(2) 将变胞机构的静/动冲击动力学方程与碰撞恢复系数方程相结合，推导得到了构态切换时变胞构件的静/动冲量求解模型。通过对变胞机构的静/动冲击动力学方程进行等效分析，分别求得了变胞运动副处的冲量与静/动冲量之间的函数表达式。根据树系统内部冲击动力学理论，将静/动冲量与变胞

运动副处的冲量视为外部冲击, 建立了变胞机构非变胞运动副处的冲量求解模型, 为变胞机构冲击问题研究奠定了理论基础。

(3) 以平面 3 自由度变胞机构和平面纸板折叠变胞机构为例, 分别对其进行了冲击问题分析与仿真研究。研究表明: 机构在构态切换的瞬时, 变胞构件、变胞运动副、非变胞运动副处的冲量大小以递减的方式进行传递, 且冲击点近端非变胞运动副处的冲量始终大于远端非变胞运动副处, 此外, 通过调节系统输入或恢复系数, 可有效改善并缓解变胞机构在构态切换时的冲击问题。

参 考 文 献

- [1] 王冰, 方跃法. 基于球面五杆机构的变胞并联机构构型综合[J]. 机械工程学报, 2018, 54(19): 18-26.
WANG Bing, FANG Yuefa. Type synthesis of metamorphic parallel mechanism with spherical five bar linkage[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(19): 18-26.
- [2] DAI Jiansheng, ZHANG Qixian. Metamorphic mechanisms and their configuration models[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2000, 13(3): 212-218.
- [3] 李树军, 王洪光, 李小彭, 等. 面向作业任务的约束变胞机构设计方法[J]. 机械工程学报, 2018, 54(3): 26-35.
LI Shujun, WANG Hongguang, LI Xiaopeng, et al. Task-orientated design method of practical constraint metamorphic mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(3): 26-35.
- [4] ZHENG Yuanfang, HEMAMI H. Mathematical modeling of a robot collision with its environment[J]. Journal of Field Robotics, 2010, 2(3): 289-307.
- [5] LEE S, YI B, KIM S, et al. Modeling and analysis on the internal impact of a Stewart platform utilized for spacecraft docking[J]. Advanced Robotics, 2001, 15(7): 763-777.
- [6] 杨世明, 金国光, 负今天, 等. 变胞机构冲击运动的研究[J]. 中国机械工程, 2009, 20(13): 1608-1612.
YANG Shiming, JIN Guoguang, YUN Jintian, et al. Research on impact motion in metamorphic mechanism[J]. China Mechanical Engineering, 2009, 20(13): 1608-1612.
- [7] HU Shenghai, ZHANG Manhui, ZHANG Baoping, et al. Design and accuracy analysis of a metamorphic CNC flame cutting machine for ship manufacturing[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2016, 29(5): 930-943.
- [8] 荣誉, 曲梦可. 基于变胞机构的性能可变机械臂研制[J]. 机械工程学报, 2018, 54(15): 41-59.
- [9] RONG Yu, QU Mengke. Design of manipulator with variable performances based on metamorphic mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(15): 41-59.
- [9] 李小彭, 高建卓, 李加胜, 等. 参数变化对约束变胞机构构态变换随机性的影响[J]. 中南大学学报, 2017, 48(6): 93-98.
LI Xiaopeng, GAO Jianzhuo, LI Jiasheng, et al. Effect of parameters variation on random working configurations of constraints metamorphic mechanism[J]. Central South University, 2017, 48(6): 93-98.
- [10] 李小彭, 毛昕, 高建卓, 等. 五杆机构构态变换过程中的动力学特性研究[J]. 机械设计与制造, 2017(12): 90-93.
LI Xiaopeng, MAO Xin, GAO Jianzhuo, et al. Impact analysis of the parameters variation on the dynamic performance of the constraints metamorphic mechanism[J]. Machinery Design and Manufacture, 2017(12): 90-93.
- [11] 崔允浩, 李树军. 变胞机构构态变换可靠性分析模型[J]. 机械与电子, 2016, 34(1): 31-34.
CUI Yunhao, LI Shujun. The reliability analysis model of constraint metamorphic mechanism configuration transformation[J]. Mechanical and Electronics, 2016, 34(1): 31-34.
- [12] 刘秀莲, 刘俊香, 张校东, 等. 复杂曲面切割机变胞机构构态变换稳定性研究[J]. 机床与液压, 2013, 41(11): 39-41.
LIU Xiulian, LIU Junxiang, ZHANG Xiaodong, et al. Research on configuration transformation stability for the complex-surface cutting metamorphic mechanism[J]. Machine Tool and Hydraulics, 2013, 41(11): 39-41.
- [13] 王黎斌, 谢进, 陈永. 构态变换有碰撞的变胞机构动力学性能分析[J]. 机械设计, 2012, 29(2): 51-54.
WANG Libin, XIE Jin, CHEN Yong. Dynamic analysis of metamorphic mechanism with impact as its configuration change[J]. Machinery Design, 2012, 29(2): 51-54.
- [14] 甄伟鲲, 康熙, 张新生, 等. 一种新型四足变胞爬行机器人的步态规划研究[J]. 机械工程学报, 2016, 52(11): 26-33.
ZHEN Weikun, KANG Xi, ZHANG Xinsheng, et al. Gait planning of a novel metamorphic quadruped robot[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(11): 26-33.
- [15] 王汝贵, 陈辉庆, 戴建生. 新型可控变胞式码垛机器人机构动态稳定性研究[J]. 机械工程学报, 2017, 53(13):

- 39-47.
- WANG Rugui, CHEN Huiqing, DAI Jiansheng. Dynamic stability study of a novel controllable metamorphic palletizing robot mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(13): 39-47.
- [16] XU Kun, ZI Peijin, DING Xilun. Gait analysis of quadruped robot using the equivalent mechanism concept based on metamorphosis[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2019, 32(1): 31-41.
- [17] ZHANG Long, JIA Qingxuan, CHEN Gang, et al. The analysis of capture strategy for redundant space manipulator when performing snare capture[J]. Advances in Mechanical Engineering, 2016, 8(10): 1-12.
- [18] DUAN Yuechen, ZHANG Dingguo. Rigid-flexible coupling dynamics of a flexible robot with impact[J]. Advanced Materials Research, 2011, 199-200: 243-250.
- [19] 段玥晨, 章定国, 洪嘉振. 作大范围运动柔性梁的一种碰撞动力学求解方法[J]. 机械工程学报, 2012, 48(19): 95-102.
- DUAN Yuechen, ZHANG Dingguo, HONG Jiazhen. Method for solving the impact problem of a flexible beam with large overall motion[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(19): 95-102.
- [20] 董楸煌, 陈力. 柔性空间机械臂捕获卫星碰撞动力学分析、镇定运动神经网络控制及抑振[J]. 机械工程学报, 2014, 50(9): 34-42.
- DONG Qiuhuang, CHEN Li. The impact dynamics analysis of flexible space manipulator capturing a satellite and neural network calming motion control and vibration suppression[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(9): 34-42.
- [21] KHULIEF Y A, SHABANA A A. Dynamic analysis of constrained system of rigid and flexible bodies with intermittent motion[J]. American Society of Mechanical Engineers, 1986, 108(1): 38.
- [22] CHAPNIK B V, HEPPLER G R, APLEVICH J D. Modeling impact on a one-link flexible robotic arm[J]. IEEE Trans Robotics & Automation, 1991, 7(4): 479-488.
- [23] 华卫江, 章定国. 柔性机器人系统碰撞动力学建模[J]. 机械工程学报, 2007, 43(12): 222-228.
- HUA Weijiang, ZHANG Dingguo. Modeling of impact dynamics of flexible robots[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(12): 222-228.
- [24] 金国光, 武光涛, 畅博彦, 等. 机械臂接触碰撞动力学分析[J]. 农业机械学报, 2016, 47(11): 369-375.
- JIN Guoguang, WU Guangtao, CHANG Boyan, et al. Dynamic analysis of manipulator with contact impact[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(11): 369-375.
- [25] YIGIT A S. The effect of flexibility on the impact response of a two-link rigid-flexible manipulator[J]. Journal of Sound & Vibration, 1994, 177(3): 349-361.
- [26] 白争锋, 赵阳, 田浩. 柔性多体系统碰撞动力学研究[J]. 振动与冲击, 2009, 28(6): 75-78.
- BAI Zhengfeng, ZHAO Yang, TIAN Hao. Study on contact dynamics for flexible multi-body system[J]. Journal of Vibration and Shock, 2009, 28(6): 75-78.
- [27] LEE S H, YI B J, KIM S, et al. Analysis on impact propagation of docking platform for spacecraft[C]// Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics & Automation, Korea: IEEE, 2001: 413-420.
- [28] 金国光. 变胞机构结构学、运动学及动力学研究[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2003.
- JIN Guoguang. Research on structure theory, kinematics and dynamics of metamorphic mechanism[D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2003.
- [29] 王德伦, 戴建生. 变胞机构及其综合的理论基础[J]. 机械工程学报, 2007, 43(8): 32-42.
- WANG Delun, DAI Jiansheng. Metamorphic mechanisms and the synthesis theory[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(8): 32-42.
- [30] 畅博彦, 金国光, 戴建生. 基于变约束旋量原理的变胞机构构型综合[J]. 机械工程学报, 2014, 50(5): 17-25.
- CHANG Boyan, JIN Guoguang, DAI Jiansheng. Type synthesis of metamorphic mechanism based on variable constraint screw theory[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(5): 17-25.

作者简介: 宋艳艳, 女, 1993 年出生, 博士研究生。主要研究方向为变胞机构结构学、运动学和动力学。

E-mail: yan_yan_song@126.com

金国光(通信作者), 男, 1963 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为机械设计及理论、机器人机构学、机械系统动力学与控制。

E-mail: jinguoguang@tiangong.edu.cn