DOI: 10.3901/JME.2020.16.044

CNT 梯度增强纤维压电复合板壳几何非线性建模与分析*

薛 婷^{1,2} 秦现生¹ 张顺琦³ 王战玺¹ 白 晶¹

(1. 西北工业大学机电学院 西安 710072;

2. 西安建筑科技大学机电工程学院 西安 710055;

3. 上海大学机电工程与自动化学院 上海 200444)

摘要: 航天环境中大型挠性结构的振动衰减一直是亟待攻克的难题, 粗纤维压电(Micro-fiber composite, MFC)的高柔性、强制动力特点以及碳纳米管(Carbon nanotube, CNT)的超高弹性模量、低密度属性使得 CNT 梯度增强纤维压电智能结构特别适用于航天高落差温度环境, 基于一阶剪切变形大转角几何全非线性理论(First order shear deformation-large rotation theory, FSDT-LRT56)建立碳纳米管梯度增强粗纤维压电复合板壳分析模型具有重要的意义。模型中区别了两种结构的粗纤维压电, 即 MFC-d31 和 MFC-d33。悬臂梁板壳结构的力学响应及功能梯度碳纳米管频域分析验证了模型的准确性, 基于该模型探究了碳纳米管增强体的分布形式、压电纤维角度对其力学性能的影响。研究表明, 几何全非线性模型更能真实地反映板壳结构的实际变形情况; X 型功能梯度分布可以更有效地改善板壳的刚度, 使板壳力学性能最佳; MFC 控制方式及纤维角度是板壳形状控制的主要因素, 控制纤维角为 90°时, 结构变形取得最小值; 不同的控制模式对板壳扭转控制产生很大的区别。基于大转角几何全非线性理论对压电智能薄壳结构的仿真分析对实现航天领域内大型挠性部件的形状控制、振动抑制等具有巨大的应用价值。

关键词: 一阶剪切变形大转角几何全非线性理论; 纤维压电; 梯度分布; 几何非线性

中图分类号: O343

Geometrically Nonlinear Modeling and Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube-reinforced Composite Rectangular Plate Shells with MFCs

XUE Ting^{1,2} QIN Xiansheng¹ ZHANG Shunqi³ WANG Zhanxi¹ BAI Jing¹

(1. School of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072;

2. School of Mechanical and Electrical Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055;

3. School of Mechatronic Engineering and Automation, Shanghai University, Shanghai 200444)

Abstract: Vibration suppression has been a problem needs to be overcome for large-scale flexible structures in the aerospace environment. High elastic modulus, low density advantages of carbon nanotube (CNT) and large actuation forces and flexibility of micro-fiber composite (MFC) make the CNT gradient-reinforced fiber piezoelectric smart structure particularly suitable for aerospace high drop temperature environment. Based on the first order shear deformation and large rotation theory with six parameters, the nonlinear finite element modeling and analysis of the carbon nanotube-reinforced gradient composite plate with MFCs is meaningful. The geometrically nonlinear finite element model is developed for two different kinds of MFC, namely MFC-d31 and MFC-d33. First, the accuracy of the model is validated by experiment results of a piezoelectric cantilever beam and a FG-CNTRC plate. Then, The effects of the distribution form of CNT and piezo fiber angle of MFC on composite structure are verified, respectively. It is found that the distribution form of CNT has a great effect on the stiffness of shell structure, reinforcing in X shape can improve the whole stiffness much more effectively, the plate shows the lowest deflection when fiber is vertical to the

* 国家自然科学基金青年(11602193, 51505380, 11972020)、陕西省重点研发计划(2016KTZDGY4-03)、陕西省科技创新(2016KTZDGY4-12)和“111计划”(B13044)资助项目。20190921 收到初稿, 202006 收到修改稿

reinforcement direction, different control modes make a big difference in the torsion control of the plate and shell. The simulation analysis of piezoelectric smart thin-shell structure based on large rotation theory with six parameters has great application value for shape control and vibration suppression of large flexible components in the aerospace field.

Key words: first order shear deformation-large rotation theory with six parameters; piezoelectric fiber; graded distribution; geometrically nonlinear

0 前言

碳纳米管(Carbon nanotube, CNT)具有高强度、高刚度、低密度及良好的延展性^[1]等优点,使其成为复合材料理想的增强体,因此在普通材料中嵌入 CNT,可以显著改善复合物的力学、电学和热学特性^[2]。此外 CNT 优良的延展特性使其与基体材料结合过程中表现出良好的黏结特性^[3]。研究表明,当 CNT 在基体材料中遵循特定规律分布时就形成了碳纳米管梯度增强复合材料(Functionally graded carbon nanotubes reinforced composite, FG-CNTRC)。随着微纳米技术的迅速发展,FG- CNTRC 已广泛应用于微纳米级别的传感器、制动器及显微镜等^[4]。

压电材料也以其优良的电机特性广泛应用于智能结构中,尤其在振动抑制、形状控制等方面发挥着重要的作用^[5-6],其中,MIT 提出了主动纤维驱动器(Active fiber composite, AFC)以其驱动特性广泛使用^[7],NASA Langley 研究中心提出的粗纤维压电材料(Macro-fiber composite, MFC)性能最佳^[8],MFC 主要由中心的主动层、附加在主动层两侧的电极层和包裹在最外层的聚酰亚胺薄膜保护层组成。主动层由矩形压电陶瓷纤维间歇嵌入环氧基体构成,而电极层中的电极呈交叉排列。MFC 具有高柔性、强致动力、轻薄和多电极等特点,该优势使其在薄壁复合板的形状控制、振动抑制等应用具有很大潜力。

当 FG-CNTRC 和 MFC 粗纤维被提出后,国内外学者们针对粘贴压电片的 CNTRC 复合梁、板、壳结构的力学性能开展了一系列的研究,其中,陈万吉等^[9]提出了一种能够适用于各向异性材料的新修正偶应力理论,并基于该理论建立了各向异性材料层合梁及层合板模型;薛婷等^[10]基于一阶剪切变形理论建立了功能梯度薄板结构的线性有限元模型并进行智能薄板结构的自由振动分析;WUITE 等^[11]基于多尺度方法对 CNTRC 梁结构进行了建模及仿真分析;SHEN 等^[12]采用非线性有限元法对 CNTRC 板结构进行

了热力学分析。KIANI 等^[13]基于利兹法建立麦克斯韦方程求解贴有压电片梯度层合板结构的频域响应。另外,针对 MFC 压电材料性能的探索,ZHANG 等^[14]基于 Reissner-Mindlin 理论建立了一种在任意 MFC 压电纤维角度情况下的压电智能结构线性有限元模型;BILGEN 等^[15]建立了一种粘有 MFC 的无约束薄壁梁频率反应分析模型;MOHAMED 等^[16]建立了冯卡门几何非线性有限元模型,但仅局限于中等变形且小转角情形,并且他们并没有考虑到压电纤维角的变化对模型的影响。近来 ZHANG 等^[17]利用非线性理论,建立了一种 MFC 几何非线性模型;LIEW 等^[18]基于经典层合板理论对压电复合功能梯度板的热力学耦合特性展开了详细的研究。根据调研,这几年国内外学者基于经典板假设及一阶剪切变形线性理论等对 CNTRC 梁、板结构的建模及静力学分析做了一定的工作,也对 MFC 压电主动控制进行了一定的建模探索,但大多数有限元模型为线性模型,或局限于结构发生小转角变形的非线性情形,因此,针对发生大转角大变形的薄板情况,建立几何全非线性机电耦合有限元模型是十分必要的。

基于 FSDT-LRT56,建立几何全非线性机电耦合有限元模型。在 CNTRC 薄板结构基础上,选择 MFC 压电片作为制动器,主动对薄板结构进行形状控制,区分两种不同模式的 MFC 结构,分别是 MFC-d31 和 MFC-d33,前一种主要利用压电 d31 效应,而后一种主要利用压电 d33 效应。有限元模型首先通过三组仿真和文献中的试验数据比较来验证模型的准确性,然后分别考虑 CNT 分布方式、MFC 纤维角度等因素对板的力学响应影响进行计算和分析。

1 CNT 梯度增强复合板物理性能

按照广义混合率分布模型,对于 CNT 梯度分布的 FGM 材料,引入碳纳米管效能参数,按照梯度分布方式的影响,广义混合律可表示为

$$Y_{11} = \eta_1 V^{cnt} Y_{11}^{cnt} + V^m Y^m \quad (1)$$

$$\frac{\eta_2}{Y_{22}} = \frac{V_{22}^{cnt}}{Y_{22}^{cnt}} + \frac{V^m}{Y^m} \quad (2)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{12}^{cnt}}{G_{12}^{cnt}} + \frac{V^m}{G^m} \quad (3)$$

式中, Y_{11}^{cnt} 、 Y_{22}^{cnt} 、 G_{12}^{cnt} 分别为碳纳米管的弹性模量和切变模量; Y^m 、 G^m 为基体材料的弹性模量和切变模量。下标 11 为沿碳纳米管的方向, 22 定义为垂直碳纳米管的方向; $\eta_i (i=1,2,3)$ 为碳纳米管的效能参数, 效能参数值的获取是通过匹配广义混合律模型预测的弹性模量、切变模量和分子动力学计算得到的弹性模量与切变模量获得; V_{22}^{cnt} 和 V^m 分别为碳纳米管和基体的体积率, 且满足 $V_{22}^{cnt} + V^m = 1$ 。考虑 CNT 沿板厚度方向四种分布形式: 均匀分布、V 型分布、O 型分布及 X 型分布, 如图 1 所示, 分别定义为 FG-U、FG-V、FG-O、FG-X, 碳纳米管的体积率可表示为

$$\begin{cases} V_{22}^{cnt}(z) = V_{22}^{cnt*} & \text{FG-U} \\ V_{22}^{cnt}(z) = \left(1 + \frac{2z}{h}\right) V_{22}^{cnt*} & \text{FG-V} \\ V_{22}^{cnt}(z) = 2 \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) V_{22}^{cnt*} & \text{FG-O} \\ V_{22}^{cnt}(z) = 2 \left(\frac{2|z|}{h}\right) V_{22}^{cnt*} & \text{FG-X} \end{cases} \quad (4)$$

式中, h 为板的厚度, z 为板厚度方向的坐标, 且满足

$$V_{22}^{cnt*} = \frac{\omega^{cnt}}{\omega^{cnt} + \frac{\rho^{cnt}}{\rho^m} - \frac{\rho^{cnt}}{\rho^m} \omega^{cnt}} \quad (5)$$

式中, ω^{cnt} 为碳纳米管的质量率, ρ^{cnt} 和 ρ^m 分别为碳纳米管和基体的质量密度。无论 CNT 是均匀分布或者其他分布形式均具有相同的碳纳米管质量率。碳纳米管增强复合材料的质量密度和泊松比定义为

$$\rho = V_{22}^{cnt} \rho^{cnt} + V^m \rho^m \quad (6)$$

图 1 不同分布形式下 CNTRC 板的横截面视图

$$v_{12} = V_{22}^{cnt*} v_{12}^{cnt} + V^m v_m \quad (7)$$

2 CNTRC 纤维压电复合板的基本方程

2.1 压电本构方程

压电纤维复合材料主要由主动层、电极层和保护层组成。MFC 根据压电纤维极化方向的不同主要分为 MFC-d31 和 MFC-d33, 如图 2 所示。其致动力根据压电纤维极化方向不同分别由 d31 和 d33 效应产生。为了能够在 MFC 本构方程中统一描述, 用 MFC-d3p 来表示, 其中 $p=1, 3$ 来表示两种 MFC。

图 2 两种 MFC 的结构模型

为了表述清晰, 定义以下三类坐标系, 分别是结构坐标系, 用 $\theta^i (i=1, 2, 3)$ 表示; 纤维坐标系, 用 $\tilde{\theta}^i$ 表示; 以及极化坐标系, 用 $\check{\theta}^i$ 表示。这三组坐标系下的变量分别用 $\square$, $\tilde{\square}$, $\check{\square}$ 表示。根据一阶剪切变形板壳理论, 假设厚度保持不变, 无法向正应力, 即 $\check{\sigma}_{33} = 0$, 则在纤维坐标系中本构方程可表示为

$$\check{\sigma} = \check{c}\check{\varepsilon} - \check{e}^T \check{E} \quad (8)$$

$$\check{D} = \check{e}\check{\varepsilon} + \check{\chi}\check{E} \quad (9)$$

$$\check{\sigma} = \begin{pmatrix} \check{\sigma}_{11} \\ \check{\sigma}_{22} \\ \check{\tau}_{12} \\ \check{\tau}_{23} \\ \check{\tau}_{13} \end{pmatrix} \quad \check{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \check{\varepsilon}_{11} \\ \check{\varepsilon}_{22} \\ \check{\gamma}_{12} \\ \check{\gamma}_{23} \\ \check{\gamma}_{13} \end{pmatrix} \quad \check{D} = \begin{pmatrix} \check{D}_1 \\ \check{D}_2 \\ \check{D}_3 \end{pmatrix} \quad \check{E} = \begin{pmatrix} \check{E}_1 \\ \check{E}_2 \\ \check{E}_3 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\tilde{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{c}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{55} \end{pmatrix} \quad \tilde{\chi} = \begin{pmatrix} \tilde{\chi}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\chi}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\chi}_{33} \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\tilde{c}_{11} = \frac{\tilde{Y}_1}{1 - \tilde{\nu}_{12}\tilde{\nu}_{21}} \quad \tilde{c}_{12} = \frac{\tilde{\nu}_{12}\tilde{Y}_2}{1 - \tilde{\nu}_{12}\tilde{\nu}_{21}} \quad \tilde{c}_{22} = \frac{\tilde{Y}_2}{1 - \tilde{\nu}_{12}\tilde{\nu}_{21}} \\ \tilde{c}_{44} = \kappa\tilde{G}_{23} \quad \tilde{c}_{55} = \kappa\tilde{G}_{13} \quad \tilde{c}_{66} = \tilde{G}_{12} \quad (12)$$

式中, $\tilde{\sigma}$ 和 $\tilde{\varepsilon}$ 分别表示应力和应变矢量; $\tilde{c}$ 表示弹性系数矩阵; $\tilde{\mathbf{D}}$ 、 $\tilde{\mathbf{E}}$ 、 $\tilde{\mathbf{e}}$ 和 $\tilde{\chi}$ 分别表示电位移矢量、电场强度矢量、压电系数矩阵和介电常数矩阵。另外, $\tilde{Y}_i$ 、 $\tilde{\nu}_{ij}$ 和 $\tilde{G}_{ij}$ 分别表示弹性模量、泊松比和切变模量, κ 为修正因子, 其值通常取 5/6。

由于不同的极化方向, 两种 MFC 材料的压电系数矩阵形式不同。MFC-d31 的压电系数矩阵为^[17]

$$\tilde{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{e}_{15} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{e}_{24} & 0 \\ \tilde{e}_{31} & \tilde{e}_{32} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

而 MFC-d33 的压电系数矩阵为^[17]

$$\tilde{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \tilde{e}_{11} & \tilde{e}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{e}_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{e}_{35} \end{pmatrix} \quad (14)$$

MFC 具有压电纤维角度, 粘贴于基体材料中, 其压电纤维方向与结构坐标系坐标轴呈任意角度, 如图 3 所示, 因此需要采用转换矩阵 $\mathbf{T}$ ^[19] 进行坐标变换。纤维压电材料在结构坐标系下可表示为

$$\sigma = \mathbf{c}\varepsilon - \mathbf{e}^T \mathbf{E} \quad (15)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}\varepsilon + \chi \mathbf{E} \quad (16)$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{c}} \mathbf{T} \quad \mathbf{e} = \tilde{\mathbf{e}} \mathbf{T} \quad \chi = \tilde{\chi} \quad (17)$$

图 3 MFC 复合结构

2.2 基于 FSDT-LRT56 的非线性应变位移关系

根据一阶剪切变形大转角几何全非线性 LRT56 理论, 壳体内任意点的位移(v_α , v_3 , $\alpha=1,2$)可表达为

$$v_\alpha = v_\alpha^0 + \Theta^3 v_\alpha^1 \quad (18)$$

$$v_3 = v_3^0 + \Theta^3 v_3^1 \quad (19)$$

式中, v_α^0 和 v_3^0 表示中性面的平动位移, v_α^1 和 v_3^1 表示广义旋转。

假设板壳厚度不变, 基于 FSDT-LRT56 假设, 得到拉格朗日几何非线性应变张量为^[19]

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}^0 + \Theta^3 \varepsilon_{\alpha\beta}^1 + (\Theta^3)^2 \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \quad (20)$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \varepsilon_{\alpha 3}^0 + \Theta^3 \varepsilon_{\alpha 3}^1 \quad (21)$$

式中, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ 和 $\varepsilon_{\alpha 3}$ 分别表示面内应变和横向切应变, Θ^3 表示厚度方向到中性面的距离, 各应变分量为

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^0 = v_{\alpha,\beta} + v_{\beta,\alpha} + v_{3,\alpha} v_{3,\beta} + v_{\delta,\alpha} v_{\delta,\beta} \quad (22)$$

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^1 = v_{\alpha,\beta} + v_{\beta,\alpha} + v_{3,\alpha} v_{3,\beta} + v_{3,\alpha} v_{3,\beta} + v_{\delta,\alpha} v_{\delta,\beta} \quad (23)$$

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^2 = v_{3,\alpha} v_{3,\beta} + v_{\delta,\alpha} v_{\delta,\beta} \quad (24)$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3}^0 = v_{\alpha} + v_{3,\alpha} + v_{\delta,\alpha} v_{\delta} \quad (25)$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3}^1 = v_{3,\alpha} + v_{\delta,\alpha} v_{3} + v_{3,\alpha} v_{3} \quad (26)$$

式中, $v_{\alpha,\beta}$ 表示 v_α 对 β 求导。

FSDT-LRT56 中三个转角参数通过两个旋转自由度 φ_1 和 φ_2 来表示, 如图 4 所示。

图 4 自由度

2.3 非线性有限元建模

拉格朗日几何非线性应变-位移关系可分为线性和非线性两部分。为进行计算, 需要对非线性应变位移关系进行线性化。广义旋转增量线性化为

$$\begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \times \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_1 \times \sin \varphi_2 \\ 0 & 0 \\ -\sin \varphi_1 \times \cos \varphi_2 & -\cos \varphi_1 \times \sin \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \varphi_1 \\ \Delta \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (27)$$

在 $t+\Delta t$ 时刻的应变矢量等于 t 时刻的应变与应变增量之和

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon = {}^t\varepsilon + \Delta\varepsilon \quad (28)$$

应变矢量在 $t+\Delta t$ 时刻的变分表示为

$${}^{t+\Delta t}\delta\varepsilon = \delta\Delta\varepsilon = {}^t\mathbf{B}_u\delta\Delta\mathbf{q} \quad (29)$$

式中, $\mathbf{B}_u$ 表示应变场矩阵, δ 表示变分符号。同理,

电场矢量在 $t+\Delta t$ 时刻的变分可表示为

$${}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{E} = \delta\Delta\mathbf{E} = {}^t\mathbf{B}_\phi\delta\Delta\phi \quad (30)$$

内力虚功在 $t+\Delta t$ 时刻可表示为

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\delta W_{\text{int}} = & \int_V ({}^{t+\Delta t}\delta\varepsilon)^T ({}^{t+\Delta t}\sigma) - ({}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{E})^T ({}^{t+\Delta t}\mathbf{D}) dV = \\ & \delta\Delta\mathbf{q}^T ({}^t\mathbf{K}_{uu}\Delta\mathbf{q} + {}^t\mathbf{K}_{u\phi}\Delta\phi + {}^t\mathbf{F}_{ui}) + \\ & \delta\Delta\phi^T ({}^t\mathbf{K}_{\phi u}\Delta\mathbf{q} + {}^t\mathbf{K}_{\phi\phi}\Delta\phi + {}^t\mathbf{G}_{\phi i}) \end{aligned} \quad (31)$$

外力虚功在 $t+\Delta t$ 时刻可表示为

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\delta W_{\text{ext}} = & \int_V \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f}_b dV + \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f}_s d\Omega + \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f}_c - \\ & \int_\Omega \delta\phi^T \mathbf{Q} d\Omega - \delta\phi^T \mathbf{Q}_c = \\ & \delta\Delta\mathbf{q}^T \mathbf{F}_{uc} + \delta\Delta\phi^T \mathbf{G}_{\phi c} \end{aligned} \quad (32)$$

式中, W_{int} 和 W_{ext} 分别表示内力功和外力功。根据虚功原理

$${}^{t+\Delta t}\delta W_{\text{int}} - {}^{t+\Delta t}\delta W_{\text{ext}} = 0 \quad (33)$$

可得到几何非线性的线性静态方程以及传感方程

$${}^t\mathbf{K}_{uu}\Delta\mathbf{q} + {}^t\mathbf{K}_{u\phi}\Delta\phi = \mathbf{F}_{uc} - {}^t\mathbf{F}_{ui} \quad (34)$$

$${}^t\mathbf{K}_{\phi u}\Delta\mathbf{q} + {}^t\mathbf{K}_{\phi\phi}\Delta\phi = \mathbf{G}_{\phi c} - {}^t\mathbf{G}_{\phi i} \quad (35)$$

式中, $\mathbf{f}_b$ 、 $\mathbf{f}_s$ 和 $\mathbf{f}_c$ 分别表示体力, 面力和集中力; $\mathbf{K}_{uu}$ 、 $\mathbf{K}_{u\phi}$ 、 $\mathbf{K}_{\phi u}$ 以及 $\mathbf{K}_{\phi\phi}$ 分别表示刚度矩阵, 压电耦合刚度矩阵, 耦合容量矩阵和压电容量矩阵; $\mathbf{F}_{uc}$ 、 $\mathbf{F}_{ui}$ 、 $\mathbf{G}_{\phi c}$ 以及 $\mathbf{G}_{\phi i}$ 分别表示外力, 平衡力, 外加电荷以及平衡电荷; $\mathbf{q}$ 、 ϕ_a 和 ϕ_s 分别表示节点位移矢量, 致动电压矢量和传感器电压矢量。

3 算例

3.1 模型验证

由于 MFC 结构排列的复杂性, 可采用均一场模型^[20]、代表性体积元^[21]和渐进展开均匀化^[22]等方法, 将 MFC 主动区域材料等效成正交各向异性材料, 获得均一化的 MFC 模型, 如表 1 所示。

通过对图 5 所示的压电悬臂梁结构响应对模型进行验证, 该结构首次由 BOWEN 等^[23]提出, 该结构由主体结构(悬臂梁)两侧各粘一片 MFC 材料构成, MFC 距固定端的距离为 $d=15$ mm。主体结构由铝制成, 弹性模量 $Y=70$ GPa, 泊松比 $\nu=0.32$, 其整体尺寸为 300 mm $\times$ 75 mm $\times$ 1.97 mm。压电材料选取 MFC-d33 的型号为 M8557-P1, 整体尺寸为

103 mm $\times$ 64 mm $\times$ 0.3 mm, 主动区域尺寸为 85 mm $\times$ 57 mm $\times$ 0.3 mm, 主动区域材料参数如表 1 所示。保护层用聚酰亚胺薄膜做成, 其弹性模量 $Y=2.8$ GPa, 泊松比 $\nu=0.3$ 。

表 1 MFC 等效材料参数

纤维坐标系材料属性	极化坐标系	
	MFC-d31	MFC-d33
弹性模量 $\bar{v}_1$ / GPa	$\bar{v}_1=30.336$	$\bar{v}_3=29.4$
弹性模量 $\bar{v}_2$ / GPa	$\bar{v}_2=15.857$	$\bar{v}_2=15.2$
弹性模量 $\bar{v}_3$ / GPa	$\bar{v}_3=15.857$	$\bar{v}_1=15.2$
切变模量 $\bar{G}_{12}$ / GPa	$\bar{G}_{12}=5.515$	$\bar{G}_{32}=6.06$
切变模量 $\bar{G}_{13}$ / GPa	$\bar{G}_{13}=5.515$	$\bar{G}_{31}=6.06$
切变模量 $\bar{G}_{23}$ / GPa	$\bar{G}_{23}=5.515$	$\bar{G}_{23}=5.79$
泊松比 $\bar{\nu}_{12}$	$\bar{\nu}_{12}=0.31$	$\bar{\nu}_{12}=0.312$
泊松比 $\bar{\nu}_{13}$	$\bar{\nu}_{13}=0.31$	$\bar{\nu}_{31}=0.312$
泊松比 $\bar{\nu}_{23}$	$\bar{\nu}_{23}=0.438$	$\bar{\nu}_{31}=0.312$
压电系数 $\bar{d}_{p1}$ /(m/V)	$\bar{d}_{31}=-170\times 10^{-12}$	$\bar{d}_{33}=467\times 10^{-12}$
压电系数 $\bar{d}_{p2}$ /(m/V)	$\bar{d}_{32}=-100\times 10^{-12}$	$\bar{d}_{32}=-210\times 10^{-12}$
电极距离 h_E /mm	0.18	0.5

图 5 压电悬臂梁结构示意图

在主体材料上表面的 MFC 电极上施加 400V 的电压。非线性模型的计算结果与 ANSYS 仿真以及试验数据进行比较, 结果如图 6 所示。模型计算结果与试验仿真结果十分接近, 验证了模型的正确性。

图 6 智能结构中线位移

之后用 MFC-d31 做压电材料, 其尺寸与之前相同, 材料参数如表 1 所示。施加相同的电压, 结果如图 6 所示。其结果与 MFC-d33 结果较为接近, 这是因为不同电极厚度导致不同的电场强度与压电系数相乘

得到相似的结果(MFC-d33: $\varepsilon_{11}=d_{33}E_3=0.374$ mm, MFC-d31: $\varepsilon_{11}=d_{31}E_1=0.378$ mm), 即应变接近所致。

为进一步验证几何全非线性模型的准确性及模型的优越性, 继续以图 5 悬臂梁结构为研究对象, 上表面的 MFC 电极上继续施加 400 V 的电压, 此外, 主体材料上表面施加 100 N/m^2 的均布力, 对比线性模型与 LRT56 模型仿真结果, 结果如图 7 所示。

图 7 机电耦合场下智能结构中线位移

表 2 CFFF 下 FG-CNTRC 板的前四阶特征频率与文献对比

V_{cni}^*	分布形式	一阶频率	文献 [13]	误差 (%)	二阶频率	文献 [13]	误差 (%)	三阶频率	文献 [13]	误差 (%)	四阶频率	文献 [13]	误差 (%)
0.12	FG-U	145.496	145.553	0.039	238.167	242.673	1.856	662.385	667.191	0.720	793.707	813.228	2.401
	FG-X	165.183	166.642	0.874	251.015	256.538	2.152	672.014	677.006	0.737	793.952	813.591	2.404
	FG-V	132.429	131.865	0.428	229.952	234.042	1.748	654.613	660.331	0.866	777.809	782.144	0.554
	FG-O	122.215	120.397	1.510	223.600	226.826	1.422	642.282	647.503	0.806	733.371	728.807	-0.626
0.17	FG-U	165.005	165.262	0.156	252.625	257.509	1.897	679.795	685.470	0.828	835.813	860.644	2.885
	FG-X	189.818	191.862	1.065	269.709	275.959	2.265	691.230	698.090	0.983	836.756	861.799	2.906
	FG-V	147.396	146.785	0.416	241.294	245.626	1.764	673.073	679.259	0.910	836.587	859.815	2.701
	FG-O	134.920	132.696	1.676	233.120	236.293	1.343	662.421	667.587	0.773	794.222	790.449	-0.477
0.28	FG-U	196.737	197.440	0.356	274.008	279.249	1.877	691.144	697.146	0.861	857.104	884.454	3.092
	FG-X	229.024	232.185	1.361	298.127	305.455	2.400	707.862	716.771	1.242	861.301	889.609	3.182
	FG-V	172.278	171.660	-0.360	257.743	262.183	1.695	685.554	691.791	0.902	861.239	889.283	3.154
	FG-O	156.371	153.551	-1.837	246.418	249.158	1.099	673.313	677.359	0.597	861.157	889.609	3.198

3.3 CNT 梯度增强纤维压电复合板仿真分析

通过在 CNTRC 主体板结构两侧粘合 MFC 的结构作为研究对象来计算仿真, 其中以 MFC-d33 材料为控制器, 结构如图 8 所示, CNTRC 主板尺寸为 $103 \text{ mm} \times 64 \text{ mm} \times 1.6 \text{ mm}$, 压电材料尺寸同上, 结构采用悬臂梁的边界条件, 使用 9×8 的二次型矩形有限元网格进行非线性建模分析, CNT 材料参数如表 3 所示。

图 8 双层纤维压电薄板结构

图 7 可以看出, 薄壳结构发生大变形情况下, 线性模型已不能准确反映结构实际变形情况, 非线性模型考虑剪切应力等对变形影响, 更能反映真实变形情况。

3.2 FG-CNT 非线性建模模型准确性验证

CNT 增强功能梯度复合薄板的线性模型在之前的文献[2]中已充分验证, 以下对 CNT 梯度增强结构进行非线性建模进行验证, 以方形 FG-CNTRC 板为研究对象, CNTRC 板结构基体材料选择聚酰亚胺薄膜(Poly-co-vinylene, PmPV), 板结构尺寸为 $400 \text{ mm} \times 400 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$, 边界条件为 CFFF, 薄板上下粘贴 PZT-5A 压电片, 定义无量纲频率 $\bar{\omega} = \omega(a^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$, 板壳前四阶特征频率与文献[13]对比结果如表 2。

表 3 CNT 弹性属性及基体材料属性

材料属性	数值
弹性模量 E_{11}^{cnt} / TPa	5.646 6
弹性模量 E_{22}^{cnt} / TPa	7.08
切变模量 G_{12}^{cnt} / TPa	1.944 7
密度 ρ^{cnt} /(kg/m ³)	1 400
泊松比 ν_{12}^{cnt}	0.175
弹性模量 E^m / GPa	2.1
密度 ρ^m /(kg/m ³)	1 150
泊松比 ν^m	0.34

给上下两片 MFC-d33 电极上分别施加 800 V 和 -800 V 的电压, 改变 MFC 纤维角度, 测量不同纤维角度下的结构变形。为更好表示振动形态, 在压电结构上设定 3 个点(A, B, C), 如图 8 所示, 用 B 点沿 θ^3 方向位移代表压电结构末端的变形, 用 A, C 两点沿 θ^3 方向位移差值代表压电结构的扭矩。

图 8 中 CNTRC 主板, 由 CNT 强化聚酰亚胺薄

膜组成,其材料属性如表3所示,文中 V_{cnt}^* 体积率为0.14,与体积率相对应的CNT效率参数 η_i ($i=1,2,3$)见表4。其中假设 $\eta_2 = \eta_3$, $G_{12} = G_{13} = G_{23}$ 。

表4 与体积分数相对应的CNT有效性参数 η_i

体积分数 V_{cnt}^*	效率参数 η_1	效率参数 η_2	效率参数 η_3
0.11	0.149	0.934	0.934
0.14	0.150	0.941	0.941
0.17	0.149	1.381	1.381

根据图9可知,d33控制模式下,压电结构最大变形发生在纤维角沿长度方向时,即纤维角为 0° 时;而由图10可知,最大扭转发生在纤维角为 45° 时;其对应数值如表5和表6所示。若用MFC-d31

模式进行控制,结果如图11和图12所示。压电结构最大变形发生在纤维角沿长度方向时,即纤维角为 0° 时;最大扭转发生在纤维角为 30° 时;其对应数值如表7和表8所示。

另外,LRT56方法考虑了大转角下的几何非线性,因此,更接近于实际应用场景中发生的变形及转角的情况。算例中,不仅MFC的控制模式对复合板的结构响应有重要的影响,CNT在主板中的分布形式也对其有深刻的影响。其中,FG-X型CNT分布最有效,其对应的板壳中心点处的形变量最小,FG-O型分布产生的形变量最大,FG-U及FG-V型分布产生的形变量大小介于两者之间。

图9 d33不同压电纤维角下末端竖直位移

图10 d33不同压电纤维角下压电结构的扭转

表5 d33模式下不同压电纤维角下末端竖直位移

mm

分布形式	压电纤维角/ $^\circ$						
	0	15	30	45	60	75	90
FG-U	9.047×10^{-1}	7.748×10^{-1}	4.915×10^{-1}	1.934×10^{-1}	-6.460×10^{-2}	-2.508×10^{-1}	-3.215×10^{-1}
FG-V	1.1	9.834×10^{-1}	6.343×10^{-1}	2.620×10^{-1}	-6.351×10^{-2}	-3.008×10^{-1}	-3.914×10^{-1}
FG-O	1.4	1.2	7.591×10^{-1}	3.194×10^{-1}	-6.623×10^{-2}	-3.487×10^{-1}	-4.573×10^{-1}
FG-X	6.816×10^{-1}	5.821×10^{-1}	3.639×10^{-1}	1.329×10^{-1}	-6.688×10^{-2}	-2.099×10^{-1}	-2.637×10^{-1}

表6 d33模式下不同压电纤维角下扭转

mm

分布形式	压电纤维角/ $^\circ$						
	0	15	30	45	60	75	90
FG-U	-1.735×10^{-15}	1.6	2.4	2.5	2.1	1.2	7.115×10^{-16}
FG-V	0	1.6	2.5	2.6	2.2	1.3	3.456×10^{-16}
FG-O	1.301×10^{-15}	1.7	2.6	2.7	2.3	1.4	9.351×10^{-16}
FG-X	-1.843×10^{-15}	1.4	2.2	2.3	1.9	1.1	4.337×10^{-16}

图11 d31不同压电纤维角下末端竖直位移

图12 d31不同压电纤维角下压电结构的扭转

表 7 d31 模式下不同压电纤维角下末端竖直位移数值 mm

分布形式	压电纤维角/(°)						
	0	15	30	45	60	75	90
FG-U	-8.538×10^{-1}	-7.623×10^{-1}	-5.811×10^{-1}	-4.186×10^{-1}	-3.045×10^{-1}	-2.396×10^{-1}	-2.189×10^{-1}
FG-V	-1.1	-9.942×10^{-1}	-7.795×10^{-1}	-5.832×10^{-1}	-4.413×10^{-1}	-3.572×10^{-1}	-3.293×10^{-1}
FG-O	-1.3	-1.2	-9.557×10^{-1}	-7.282×10^{-1}	-5.621×10^{-1}	-4.616×10^{-1}	-4.277×10^{-1}
FG-X	-6.170×10^{-1}	-5.455×10^{-1}	-4.032×10^{-1}	-2.753×10^{-1}	-1.863×10^{-1}	-1.373×10^{-1}	-1.221×10^{-1}

表 8 d31 模式下不同压电纤维角下扭转数值 mm

分布形式	压电纤维角/(°)						
	0	15	30	45	60	75	90
FG-U	2.168×10^{-16}	-9.035×10^{-1}	-1.2	-1.1	-7.840×10^{-1}	-3.971×10^{-1}	-1.084×10^{-16}
FG-V	1.084×10^{-15}	-9.193×10^{-1}	-1.3	-1.2	-8.339×10^{-1}	-4.298×10^{-1}	-5.421×10^{-16}
FG-O	6.505×10^{-16}	-9.119×10^{-1}	-1.3	-1.2	-8.581×10^{-1}	-4.468×10^{-1}	1.084×10^{-15}
FG-X	-2.168×10^{-16}	-8.568×10^{-1}	-1.2	-1.0	-7.265×10^{-1}	-3.630×10^{-1}	2.494×10^{-15}

为了能够更直观地表示该非线性模型对 CNTRC 梯度增强纤维压电结构变形的描述,在三维空间中建立 d33 模式下 FG-O 型分布的复合板结构的变形图,其中 CNT 体积率为 0.14。如图 13

所示,图中曲面表示非线性模型仿真的变形结果,当压电纤维角不同时,变形情况完全不同,且会产生不同程度的扭转,使得压电板壳形状不再是矩形。

图 13 d33 模式 FG-O 型分布下不同纤维角对悬臂梁形状变化的影响

4 结论

基于 FSDT-LRT56 理论对 CNT 梯度增强纤维压电复合板壳进行几何全非线性有限元建模与分析,探究了 CNT 的分布形式、MFC 纤维角度等因素对结构响应的影响,通过计算仿真,得到如下结论。

(1)对比其他模型静力学分析结果,基于 LRT56 理论的大转角几何全非线性模型考虑了面内径向、横向变形和剪切变形导数的内积项、平方

项等,能更准确地反映 MFC 耦合 CNTRC 结构的实际变形情况。

(2) CNT 的分布形式影响 CNT 梯度增强粗纤维压电复合板的力学性能。无论是 MFC-d31 控制模式还是 MFC-d33 模式,在四种 CNT 分布形式中,FG-X 型分布使得板末端竖直位移形变量及板总体扭转变化最小,FG-O 型分布产生的形变量及扭转最大,FG-U 及 FG-V 型分布产生的形变量及扭转值大小介于两者之间,因此,同等质量比下,强化结构的上下表面会更有效地改善结构刚度,从而改善整体

结构响应。

(3) 纤维角度对板壳的形状控制有很大的影响。MFC-d31 控制模式和 MFC-d33 模式, 板壳结构最大变形发生始终发生在纤维角沿长度方向时, 即纤维角为 0° 时, 然而, 两种控制模式对结构扭转控制结果不同, MFC-d31 控制模式下, 最大扭转发生在纤维角为 30° 时; d33 控制模式下, 最大扭转发生在纤维角为 45° 附近。因此, 要改善压电复合层合板平面内某一方向的静力学特性, 应保证该方向纤维角垂直长度方向, 形状控制中, 应结合不同 MFC 控制模式, 进行纤维角度设计。

(4) MFC 控制模式影响板结构的形变过程。随着压电纤维角度变化过程中, MFC-d33 的竖直位移方向发生了方向的变化, 而 MFC-d31 并没有。因为 MFC-d33 在不同方向上的压电系数符号不同, 使压电纤维角在发生变化时形变位移方向也发生了变化, 而 MFC-d31 的各方向压电系数符号相同, 在角度变化过程中竖直位移方向不会产生变化。

参 考 文 献

- [1] LIEW K M, LEI Z X, ZHANG L W. Mechanical analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composites: A review[J]. *Composite Structures*, 2015, 120: 90-97.
- [2] 薛婷, 秦现生, 张顺琦, 等. 碳纳米管增强功能梯度复合材料薄板建模与分析[J]. *机械工程学报*, 2018, 54(16): 93-100.
XUE Ting, QIN Xiansheng, ZHANG Shunqi, et al. Geometrically linear modeling and analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite rectangular plates[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2018, 54(16): 93-100.
- [3] CHEN W, LI L, MA X. A modified couple stress model for bending analysis of composite laminated beams with first order shear deformation[J]. *Composite Structures*, 2011, 93(11): 2723-2732.
- [4] WANG W L, HU S J. Modal response and frequency shift of the cantilever in a noncontact atomic force microscope[J]. *Applied Physics Letters*, 2005, 87(18): 183506-183509.
- [5] NYUGEN Q, TONG L. Shape control of smart composite plate with non-rectangular piezoelectric actuators[J]. *Composite Structures*, 2004, 66: 207-214.
- [6] 赵国忠, 翟景娟, 张冠锋, 等. 基于压电曲壳单元的结构振动最优控制[J]. *计算力学学报*, 2015(5): 601-607.
ZHAO GuoZhong, ZHAI Jingjuan, ZHANG Guanfeng, et al. Optimal control of structural vibrational using piezoelectric curved shell elements[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2015(5): 601-607.
- [7] WILLIAMS R B, GRIMSLEY B W, INMAN D J, et al. Manufacturing and mechanics-based characterization of macro fiber composite actuators[C]// *Proceedings of the ASME 2002 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. Adaptive Structures and Materials Systems*. November 17-22, 2002, New Orleans, Louisiana, USA. ASME, 2002: 79-89.
- [8] WILKIE A W K, BRYANT R G, HIGH J W, et al. Low-cost piezocomposite actuator for structural control applications[J]. *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, 2000, 3991: 323-334.
- [9] CHEN W, LI L, MA X. A modified couple stress model for bending analysis of composite laminated beams with first order shear deformation[J]. *Composite Structures*, 2011, 93(11): 2723-2732.
- [10] 薛婷, 秦现生, 张顺琦, 等. 基于一阶剪切变形理论的 CNTRC 板的自由振动分析[J]. *机械工程学报*, 2019, 55(24): 45-50.
XUE Ting, QIN Xiansheng, ZHANG Shunqi, et al. Free vibration analysis of CNTRC plates based on first-order shear deformation theory[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2019, 55(24): 45-50.
- [11] WUITE J, ADALI S. Deflection and stress behaviour of nanocomposite reinforced beams using a multiscale analysis[J]. *Composite Structures*, 2005, 71(3-4): 388-396.
- [12] SHEN H S. Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments[J]. *Composite Structures*, 2009, 91(1): 9-19.
- [13] KIANI Y. Free vibration of functionally graded carbon nanotube reinforced composite plates integrated with piezoelectric layers[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2016, 142: 45-56.
- [14] ZHANG S Q, LI Y X, SCHMIDT R. Modeling and simulation of macro-fiber composite layered smart structures[J]. *Composite Structures* 2015, 126: 89-100.
- [15] BILGEN O, ERTURK A, INMAN D J. Analytical and experimental characterization of macro-fiber composite actuated thin clamped-free unimorph benders[J]. *Journal of Vibration and Acoustics* 2010, 132(5): 051005.1-051005.6.
- [16] MOHAMED A, CHARLES H. Nonlinear finite element

- analysis of a rotating MFC actuator[C]//51st AIAA/ASME/ASCE /AHS /ASC structures, structural dynamics, and materials conference. Orlando, Florida. April 12-15, 2010: 2514-2547.
- [17] ZHANG S Q, WANG Z X, QIN X S, et al. Geometrically nonlinear analysis of composite laminated structures with multiple macro-fiber composite (MFC) actuators[J]. Composite Structures, 2016, 150: 62-72.
- [18] LIEW K M, HE X Q, NG T Y, et al. Finite element piezothermoelasticity analysis and the active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators[J]. Computational Mechanics, 2003, 38(9): 1641-1655.
- [19] ZHANG S Q, SCHMIDT R. Large rotation theory for static analysis of composite and piezoelectric laminated thin-walled structures[J]. Thin-Walled Structures 2014, 78: 16-25.
- [20] PARK J S, KIM J H. Analytical development of single crystal macro fiber composite actuators for active twist rotor blades[J]. Smart Materials and Structures. 2005, 14: 745-753.
- [21] DERAEMAEEKER A, NASSER H, BENJEDDOU A, et al. Mixing rules for the piezoelectric properties of macro fiber composites[J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2009, 20(12): 1475-1482.
- [22] BISCANI F, NASSER H, BELOUETTAR S, et al. Equivalent electro-elastic properties of macro fiber composite (MFC) transducers using asymptotic expansion approach[J]. Composites Part B: Engineering, 2011, 42: 444-455.
- [23] BOWEN C, GIDDINGS P, SALO A, et al. Modeling and characterization of piezoelectrically actuated bistable composites[J]. IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics & Frequency Control, 2011, 58(9): 1737-1750.

作者简介: 薛婷, 女, 1989 年出生, 博士研究生。主要研究方向为智能装备技术、智能结构建模与仿真、智能结构主动振动控制等。

E-mail: xueting.mx@mail.nwpu.edu.cn

张顺琦(通信作者), 男, 1984 年出生, 博士, 副教授。主要研究方向为智能结构非线性有限元建模与仿真、结构主动振动控制、智能装备技术等。

E-mail: zhangsq@shu.edu.cn