DOI: 10.3901/JME.2020.13.218

基于导重法的结构类周期性布局优化方法研究*

焦洪宇^{1,2} 李英¹ 胡顺安¹ 左克生¹ 林玲¹ 姜正义² 于照鹏¹

(1. 常熟理工学院汽车工程学院 苏州 215500;

2. 伍伦贡大学机械材料机械电子和生物医学工程学院 伍伦贡 澳大利亚 2519)

摘要: 受外形尺寸限制,一些结构的优化区域无法划分为均匀一致的有限元网格。由此产生的单元体积依赖性,常规周期性拓扑优化无法求解。提出一种基于导重法的结构类周期性布局优化方法。以最小柔度为目标函数,结构质量为约束条件,构建结构类周期性布局优化的数学模型。利用导重法推导出结构类周期性布局优化的迭代准则,解释其物理意义并给出其优化流程。以单元应变能密度为基础,提出一种改进的过滤方案以解决结构类周期性布局优化中单元体积依赖性问题。利用所提出的方法,对循环对称结构、二维汽车轮毂结构和梯形结构进行结构类周期性布局优化研究。研究结果表明,子域数目不同时均可以得到具有类周期性布局的最优拓扑形式。通过性能指标和相对应变能两个指标来评价三个算例的最优拓扑形式,验证了利用导重法求解结构类周期性布局优化的可行性和有效性。

关键词: 类周期性; 布局优化; 导重法; 迭代准则; 单元体积依赖性

中图分类号: TH11

Study of Structural Periodic-like Layout Optimization Based on Guide-weight Method

JIAO Hongyu^{1,2} LI Ying¹ HU Shunan¹ ZUO Kesheng¹ LIN Ling¹

JIANG Zhengyi² YU Zhaopeng¹

(1. School of Automotive Engineering, Changshu Institute of Technology, Suzhou 215500;

2. School of Mechanical, Material, Mechatronics and Biomedical Engineering, University of Wollongong, Wollongong, Australia 2519)

Abstract: Limited by boundary dimension, optimization area of some structures cannot be divided into finite element meshes uniformly. This results in element volume dependency, which cannot be solved by conventional periodic topology optimization. A periodic-like layout optimization method is proposed based on the guide-weight method. With the minimum compliance as the objective function and the structural mass as the constraint condition, a mathematical model for the periodic-like layout optimization is constructed. The iterative criterion for periodic-like layout optimization is derived using the guide-weight method, and its physical meaning is explained and its optimization process is given. Based on the element strain energy density, an improved filtering scheme is proposed to solve the problem of element volume dependence in structural periodic-like layout optimization. The structural periodic-like layout optimization of cyclic symmetry structure, two-dimensional automobile hub structure and trapezoidal structure are researched using the proposed method. The research results show that the optimal topological form with periodic-like layout can be obtained when the number of subdomains is different. The optimal topological forms of three examples are evaluated by two evaluation indicators: performance index and relative strain energy. The feasibility and effectiveness of using the guide-weight method to solve the periodic-like layout optimization are verified.

Key words: periodic-like; layout optimization; guide-weight method; iterative formula; element volume dependency

0 前言

周期特征结构以其独特的结构形式、极好的视

觉艺术美观性、阵列方向上的可延展性、良好的加工制造与设计性吸引着学术界、工业界研发技术人员的眼光^[1-4]。在周期性结构拓扑优化方面国内外学者开展了大量的研究工作,主要有:HUANG和XIE^[5]利用双向结构渐进方法研究了周期性结构的拓扑优化,得到了具有周期性结构的最优拓扑。ZUO和XIE^[6]提出了一种改进的双向结构渐进方法用于周

* 国家自然科学基金(51605046)、江苏省自然科学基金(BK20181036)和江苏政府留学奖学金(JS-2017-188)资助项目; 20190713 收到初稿, 20200330 收到修改稿

期特征结构的频率优化。随后, 又研究了周期特征结构拓扑形式的收敛问题^[7-8]和微观结构的优化问题^[9]。付志芳等^[10]针对线弹性体结构, 提出了载荷不确定性条件下周期性结构稳健拓扑优化模型。推导了周期性结构柔度均值与方差的敏度数表达式, 并基于软删双向渐进结构优化法提出了载荷不确定性条件下的周期性结构稳健拓扑优化设计方法。这些研究的研究对象均可划分为均匀一致的有限元网格, 不存在单元体积依赖性问题。而一些结构如环形和梯形结构, 无法划分为均匀一致的有限元网格, 单元体积依赖性必须考虑。

高彤和张卫红等^[11]采用双向渐进结构优化方法研究循环对称结构拓扑优化设计问题。荣见华等^[12]提出了一种基于位移约束的类周期性连续体结构拓扑优化的方法。采用改进的对偶方法, 获得了优化的类周期性结构拓扑。HE 等^[13]提出一种基于松散设计点的周期性结构拓扑优化方法, 研究几何尺寸不同和有限元网格不规则的周期性结构。使用 Shepard 插值函数构建了单元和松散设计点的关系。利用所提方法研究了二维梯形桥和三维楔形梁, 获得了周期性的拓扑形式。

导重法作为一种结构优化方法, 是陈树勋等^[14-16]于 20 世纪 80 年代提出的。该方法最初用于天线结构的尺寸优化上, 取得了良好的优化效果。随后又对导重法进行了进一步研究, 给出导重与导重准则更加规范, 更具一般性的数学表达与力学意义, 解决了最优结构为什么要按导重正比分配质量的问题^[17-18]。刘辛军、李枝东等^[19-21]将导重法引入到拓扑优化中, 研究了单工况、多工况下最小柔度和最小质量的拓扑优化问题, 取得了良好的优化效果。与其他拓扑优化方法相比, 导重法具有公式简单、收敛速度快、优化效果好及通用性强等优点^[22-23]。

针对一些结构的优化区域无法划分为均匀一致的有限元网格而造成优化时存在单元体积依赖性问题。本文以最小柔度为目标函数, 结构质量为约束条件, 构建结构类周期性布局优化的数学模型。利用导重法研究质量约束下最小柔度的结构类周期性布局优化问题, 解决结构类周期性布局优化中单元体积依赖性问题, 以期获得具有类周期性的结构布局形式。

1 结构类周期性布局优化问题描述

为了获得具有类周期性的结构布局形式, 将优化域划分成 m 个子域, 其中 m 分别为 x 轴或 y 轴方向子域的数目。对于类周期性结构, 任意两个子域具有完全一致的单元数量 n 和单元分布, 单元尺寸可

以不同, 如图 1 所示。 x_{ij} 为设计变量, i 为子域编号, j 为子域内单元编号。结构周期性布局优化问题可以看成单元尺寸相同的结构类周期性布局优化的特例。

图 1 优化域分成 $m=3$ 个子域

2 利用导重法求解结构类周期性布局优化问题

2.1 数学模型

单工况下结构类周期性布局优化问题的数学模型可表达为

$$\mathbf{X} = (x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, \dots, x_{i,j})^T \in \mathbf{R} \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$f(\mathbf{X}) \rightarrow \min$$

$$\text{s.t.} \quad g(\mathbf{X}) \leq 0$$

$$x_{1,j} = \dots = x_{i,j} = \dots = x_{m,j}$$

$$x_{\min} \leq x_{i,j} \leq x_{\max}$$

式中, $\mathbf{X}$ 为设计变量; $f(\mathbf{X})$ 为目标函数; $g(\mathbf{X})$ 为约束函数; m 为优化域内子域的数目; n 为子域内单元的数目; $x_{\max}$ 为设计变量的取值上限; $x_{\min}$ 为设计变量的取值下限。

2.2 导重法

求解该优化问题, 首先构造拉格朗日方程

$$L = f(\mathbf{X}) + \lambda g(\mathbf{X}) \quad (2)$$

式中, λ 为拉格朗日乘子。

基于 Kuhn-Tucker 条件, 在最优值 $\mathbf{X}^*$ 处必须满足

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_{i,j}} = \frac{\partial f}{\partial x_{i,j}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_{i,j}} \begin{cases} \leq 0 & x_{i,j} = x_{\max} \\ = 0 & x_{\min} < x_{i,j} < x_{\max} \\ \geq 0 & x_{i,j} = x_{\min} \end{cases} \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda g(\mathbf{X}) = 0 \text{ 且 } \begin{cases} \lambda = 0 & g(\mathbf{X}) < 0 \\ \lambda \geq 0 & g(\mathbf{X}) = 0 \end{cases} \\ g(\mathbf{X}) \leq 0 \\ x_{\min} \leq x_{i,j} \leq x_{\max} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{从 } \frac{\partial L}{\partial x_{i,j}} = \frac{\partial f}{\partial x_{i,j}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_{i,j}} = 0 \text{ 可以得到} \\ \frac{\lambda \frac{\partial g}{\partial x_{i,j}}}{-\frac{\partial f}{\partial x_{i,j}}} = \frac{\lambda x_{i,j} \frac{\partial g}{\partial x_{i,j}}}{-x_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_{i,j}}} = 1 \end{aligned} \quad (4)$$

结构优化问题可以分为两类: ① 在质量约束下求结构的最优性能^[24]; ② 在性能约束下求结构的最小质量。本文主要讨论质量约束下的结构性能最优问题, 则 $f(\mathbf{X})$ 是表征结构性能的量, $g(\mathbf{X})$ 是结构质量或体积等表征结构材料多少的量。根据式(4), 令

$$H_{i,j} = \frac{\partial g}{\partial x_{i,j}} \quad (5)$$

$$W_{i,j} = x_{i,j} H_{i,j} \quad (6)$$

$$G_{i,j} = -x_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_{i,j}} \quad (7)$$

$$G = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n G_{i,j} \quad (8)$$

式中, $H_{i,j}$ 为 $x_{i,j}$ 的堆密度; $W_{i,j}$ 为 $x_{i,j}$ 的等效质量; $G_{i,j}$ 为 $x_{i,j}$ 的导重; G 为总导重。

将式(5)、(7)代入式(4)得

$$x_{i,j} = \frac{G_{i,j}}{\lambda H_{i,j}} \quad (9)$$

2.3 利用导重法求解结构类周期布局优化的最小柔度问题

本节讨论利用导重法求解质量约束下的结构最小柔度问题。则目标函数 $f(\mathbf{X})$ 为结构柔度, 约束条件为结构质量, 用公式表达为

$$f(\mathbf{X}) = C \quad (10)$$

$$g(\mathbf{X}) = M - f_0 \cdot M_0 \leq 0 \quad (11)$$

式中, C 为结构柔度; M 为优化后的质量; f_0 为保留的质量分数; M_0 为初始质量。

求解该优化问题关键在于求出柔度 C 和结构质量 M 相对于设计变量 $x_{i,j}$ 的显式表达式。柔度 C 可以写为

$$C = \mathbf{F}^T \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_{i,j}^T \mathbf{k}_{i,j} \mathbf{u}_{i,j} \quad (12)$$

式中, $\mathbf{F}$ 为载荷矢量; $\mathbf{U}$ 为位移矢量; $\mathbf{K}$ 为结构刚度矩阵; $\mathbf{u}_{i,j}$ 为单元位移矢量; $\mathbf{k}_{i,j}$ 为单元刚度矩阵。

在本文中, 变密度法固体各向同性微结构材料惩罚模型(Solid isotropic material with penalization, SIMP)用公式表达为^[25]

$$E(x_{i,j}) = (x_{i,j})^p E_0 \quad (13)$$

式中, $x_{i,j}$ 为第 i 个子域内第 j 个单元的相对密度。

根据 SIMP 法, 有

$$\mathbf{k}_{i,j} = x_{i,j}^p \mathbf{k}_{i,j0} \quad (14)$$

式中, $\mathbf{k}_{i,j0}$ 为初始刚度矩阵; p 为 SIMP 法的惩罚因子。

将式(14)代入式(12)得

$$C = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{i,j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j}^p \mathbf{u}_{i,j}^T \mathbf{k}_{i,j0} \mathbf{u}_{i,j} \quad (15)$$

则柔度 C 相对于设计变量 $x_{i,j}$ 的显式表达式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x_{i,j}} = -\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial x_{i,j}} \mathbf{U} = -\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_{i,j}^T \frac{\partial \mathbf{k}_{i,j}}{\partial x_{i,j}} \mathbf{u}_{i,j} = \\ -p x_{i,j}^{p-1} \mathbf{u}_{i,j}^T \mathbf{k}_{i,j0} \mathbf{u}_{i,j} \end{aligned} \quad (16)$$

结构质量 M 可用式(17)表达

$$M = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} v_{i,j} \quad (17)$$

则结构质量 M 相对于设计变量 $x_{i,j}$ 的显式表达式为

$$\frac{\partial M}{\partial x_{i,j}} = v_{i,j} \quad (18)$$

根据导重法^[26]可得

$$H_{i,j} = \frac{\partial M}{\partial x_{i,j}} = v_{i,j} \quad (19)$$

$$W_{i,j} = x_{i,j} H_{i,j} = x_{i,j} v_{i,j} \quad (20)$$

$$G_{i,j} = -x_{i,j} \frac{\partial C}{\partial x_{i,j}} =$$

$$p x_{i,j}^p \mathbf{u}_{i,j}^T \mathbf{k}_{i,j0} \mathbf{u}_{i,j} = p c_{i,j} \quad (21)$$

$$G = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n G_{i,j} = p \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{i,j} = p C \quad (22)$$

将式(21)、(19)代入(9)得

$$x_{i,j} = \frac{G_{i,j}}{\lambda H_{i,j}} = \frac{p c_{i,j}}{\lambda v_{i,j}} \quad (23)$$

式(23)适用于优化域内的所有单元。对各子域内的第 j 个单元求和得

$$\lambda \sum_{i=1}^m x_{i,j} v_{i,j} = p \sum_{i=1}^m c_{i,j} \quad (24)$$

构建一个虚拟子域, 虚拟子域内单元数目及单元分布与各子域完全相同。各子域内单元相对密度 $x_{i,j}$ 的导重的平均值和等效质量的平均值分别作为虚拟子域内单元相对密度 x_j 的导重和等效质量, 则 x_j 的导重和等效质量为

$$G_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m G_{i,j} = \frac{p}{m} \sum_{i=1}^m c_{i,j} \quad (25)$$

$$W_j = x_j H_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m W_{i,j} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{i,j} v_{i,j} \quad (26)$$

将式(25)、(26)代入式(23)得

$$x_j = \frac{G_j}{\lambda H_j} \quad (27)$$

令虚拟子域内第 j 个单元的应变能为

$$C_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m c_{i,j} \quad (28)$$

式(28)代入式(25)得

$$G_j = p C_j \quad (29)$$

令虚拟子域内单元的堆密度 H_j

$$H_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m H_{i,j} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m v_{i,j} = v_j \quad (30)$$

将式(29)、(30)代入式(27)得

$$x_j = \frac{p C_j}{\lambda v_j} \quad j=1,2,\dots,n \quad (31)$$

令 $C_j / v_j = D_j$, D_j 为虚拟子域内单元的应变能密度。

式(31)即为结构类周型布局优化的迭代准则, 其物理意义为虚拟子域内单元的相对密度应与单元的应变能密度成正比, 在迭代式将其写为

$$x_j^{(k+1)} = \left(\frac{p}{\lambda} \cdot D_j \right)^{(k)} \quad j=1,2,\dots,n \quad (32)$$

为保证迭代收敛, 引入一个步长因子 α , 并考虑设计变量的上下限得

$$x_j^{(k+1)} = \begin{cases} \alpha \left(\frac{p}{\lambda} \cdot D_j \right)^{(k)} + (1-\alpha) x_j^{(k)} & x_{\min} < x_j < x_{\max} \\ x_{\min} & x_j \leq x_{\min} \\ x_{\max} & x_j \geq x_{\max} \end{cases} \quad (33)$$

按式(33)更新虚拟子域单元相对密度后, 令各子域内单元的相对密度等于虚拟子域内单元的相对密度, 即

$$x_{i,j}^{(k+1)} = x_j^{(k+1)} \quad (34)$$

则数学模型式(1)中的约束条件得到满足。

拉格朗日乘子 λ 可由(35)得

$$\lambda = \frac{G}{W_0} = \frac{pC}{fM_0} \quad (35)$$

则根据式(33)、(34)、(35), 质量约束下最小柔度即最大刚度的优化问题可求解。

本文利用导重法进行理论推导时暂时没有考虑约束条件, 是后期通过式(34)强制保证的。所以本文是在子域数目 m 确定的条件下进行结构类周期性布局优化研究。在算例与分析中比较了几个特定子

域数目 m 的优化结果, 最终确定结构类周期性布局优化的最优拓扑形式。

3 过滤函数、收敛准则和性能指标

3.1 过滤函数

为了解决优化过程中的棋盘格现象, HUANG 等^[27]提出一种引入过滤函数来抑制棋盘格的过滤方案。该过滤方案以单元灵敏度(实际上就是单元应变能)为基础, 没有考虑有限元网格划分不均匀而造成的单元体积依赖性问题。

受外形尺寸的限制, 一些结构的优化区域可以划分为若干个子域。各子域内单元数目及单元分布可以完全相同, 但单元体积必然不同。单元灵敏度与单元体积直接相关, 使得优化结果具有单元体积依赖性。为了避免优化结果对单元体积的依赖, 在文献[27]中过滤方案的基础上, 以单元应变能密度为基础, 提出一种改进的过滤方案。

首先, 计算单元应变能密度

$$D_{i,j} = \frac{c_{i,j}}{v_{i,j}} \quad (36)$$

式中, $D_{i,j}$ 为单元应变能密度; $c_{i,j}$ 为单元应变能; $v_{i,j}$ 为单元体积。

其次, 节点应变能密度由与该节点相连单元的应变能密度和体积通过式(37)计算获得。节点应变能密度不具有任何物理意义。

$$D_s^n = \frac{\sum_{l=1}^L v_l D_l}{\sum_{l=1}^L v_l} \quad (37)$$

式中, D_s^n 为节点应变能密度; D_l 为单元应变能密度, 即为式(36)中 $D_{i,j}$ 更换了下标符号; v_l 为单元体积, 即为式(36)中 $v_{i,j}$ 更换了下标符号; 更换下标符号的主要原因为公式(36)中 i 为子域序号, 其取值为 $i=1,2,\dots,m$; j 为子域内单元序号, 其取值为 $j=1,2,\dots,n$ 。在整个优化域内共有 N 个单元, 优化域内单元总数等于子域数目乘以子域内单元数目, 即 $N=m \times n$ 。在进行过滤时, 对整个优化域内所有单元的应变能密度进行整体过滤即可, 不需要区分各子域。所以更换了单元应变能密度和单元体积的下标符号。 L 为与节点 s 相连单元的个数。

最后, 节点应变能密度再转换为单元应变能密度。建立一个以单元 a 为中心, 以 $r_{\min}$ 为半径的子域 Ω_a 。子域 Ω_a 内所有节点用来计算单元 a 过滤后的单元应变能密度

$$D'_a = \frac{\sum_{s=1}^S d_s D_s^n}{\sum_{s=1}^S d_s} \quad (38)$$

式中, D'_a 为过滤后的单元应变能密度; S 为子域 Ω_a 内节点数目; d_s 为权重系数。

$$d_s = r_{\min} - r_{sa} \quad (39)$$

式中, r_{sa} 为子域 Ω_a 内节点到单元 a 中心的距离。

过滤后的单元应变能密度 D'_a 需再次更换下标, 转变回以各子域表达的单元应变能密度 $D'_{i,j}$, 其目的是便于计算虚拟子域内单元的应变能密度 D_j 。则虚拟子域内单元的应变能密度 D_j 为

$$D_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m D'_{i,j} \quad (40)$$

式中, $D'_{i,j}$ 为过滤后的单元应变能密度, 即为式(38)中的 D'_a 更换了下标符号。

3.2 收敛准则

相邻两次优化结果中柔度的相对误差 τ 连续 5 次小于给定的收敛精度 $\tau_{\max}$ 即连续 5 次满足式(41), 则认为优化已收敛。

$$\tau = \frac{|C^{(k)} - C^{(k-1)}|}{C^{(k-1)}} \leq \tau_{\max} \quad (41)$$

3.3 性能指标

为便于结构类周期性布局优化结果的比较, 所有优化结果的总应变能 C 均用式(42)的相对应变能(优化后的总应变能 C 与未进行优化的总应变能 C_0 的比值)表示。显然相对应变能 C_r 越小, 结构效率越大。

$$C_r = \frac{C}{C_0} \quad (42)$$

当优化满足收敛条件时, 柔度 C 对应于一质量分数 f 。子域数目 m 不同时, 不同的柔度 C 对应不同的质量分数 f 。由于没有统一的标准, 无法判定子域数目 m 取何值时, 结构类周期性布局优化获得最优结果。

本文以满足收敛条件时的柔度 C 与质量分数 f 的乘积作为统一的性能指标 PI , 与相对应变能 C_r 一起共同判定子域数目 m 取值不同时结构类周期布局优化结果的好坏, 公式形式为

$$PI = C \cdot f \quad (43)$$

性能指标 PI 的量纲与目标函数的量纲相同, 在本文中为 N.mm。可以把性能指标 PI 称为包含约束条件的目标函数, 在本文中为包含质量分数在内的柔度。性能指标 PI 越小, 代表着包含约束条件的目标函数越小。所以, 用性能指标 PI 来评价子域数目 m 取值不同时结构类周期布局优化结果的好坏, 具有实际意义。

4 优化流程

利用导重法求解结构最小柔度的结构类周期性布局优化问题的优化流程如图 2 所示。

步骤 1: 定义优化区域, 划分有限元网格。要求各子域单元数目和单元分布完全相同。在长度和宽度方向上, 形成具有结构类周期性的优化子域。

步骤 2: 初始化弹性模量 E_0 , 即按式(13) $x_{ij}=1$ 取值。

步骤 3: 执行有限元分析, 提取单元应变能 c_{ij} 和单元体积 v_{ij} , 按式(36)计算单元应变能密度 D_{ij} 。

步骤 4: 按式(37)和(38)计算过滤后的单元应变能密度 D'_a 。

步骤 5: 按式(15)计算总应变能 C 和按式(35)计算拉格朗日乘子 λ 。

步骤 6: 按式(40)计算虚拟子域内单元的应变能密度 D_j 。

步骤 7: 按式(33)更新虚拟子域内单元的相对密度 $x_j^{(k+1)}$ 。

步骤 8: 判断是否满足式(11)中的 $g(\mathbf{X}) = M - f \cdot M_0 \leq 0$ 约束条件, 如不满足, 进入下一步骤。如满足, 跳转到步骤 11。

步骤 9: 判断是否满足收敛条件式(41), 如收敛条件满足, 即获得一个优化结果。如收敛条件不满足, 进入下一步骤。

步骤 10: 按式(13)更新弹性模量 $E(x_{ij})$, 重复步骤 3~9。

图 2 结构类周期性布局优化问题的优化流程

5 算例与分析

5.1 循环对称结构

循环对称结构由内环, 中环和外环三个空心圆环组成, 整个结构由内径 $R_0=100$ mm 和外径 $R_3=300$ mm 定义其几何特征, 如图 3 所示。内环和外环是非优化域, 分别用于固定约束和施加载荷。中环是优化区域, 其几何特征由内径 $R_1=115$ mm 和外径 $R_2=280$ mm 定义。在圆周方向上优化区域均匀地划分为 $m=8$ 个扇形子域。每个扇形子域在圆周方向上划分为 $n_c=45$ 个均匀分割, 在半径方向上划分为 $n_r=60$ 个非均匀分割, 分割长度比例为 R_1/R_2 。内环和外环分别划分为 21 600 和 14 400 个单元。循环对称结构在内环的内边界上固定, 一个水平载荷 $F_x=1\ 000$ N 和一个垂直载荷 $F_y=1\ 000$ N 作用在外环外边界的最底端 A 点。其他参数如表 1 所示。

图3 循环对称结构的设计域

图4是子域数目 $m=8$ 时柔度 C 、质量分数 f 和性能指标 PI 的优化曲线。随着迭代次数 k 的增加, 柔度 C 增加后并缓慢下降, 质量分数 f 平缓下降。

当相邻两次优化结果柔度的相对误差 τ 连续 5 次小于给定的收敛精度 $\tau_{\max}=0.001$ 时, 认为优化收敛。获得的最优拓扑如图 5c 所示。此时经过 46 次迭代, 柔度 C 为 $40.214\text{ N}\cdot\text{mm}$, 质量分数 f 达到 25.88%, 性能指标 PI 为 $10.406\text{ N}\cdot\text{mm}$ 。

表1 结构类周期性布局优化的参数

参数	数值
弹性模量 E_0/GPa	210
泊松比 ν	0.3
惩罚因子 p	3
保留的质量分数 $f_0(\%)$	30
子域数目 m	2、3、4、5、6、8、9
设计变量初始值 $x_{i,j}$	$(1, 1, \dots, 1)_{m \times n}$

图4 柔度、质量分数和性能指标的优化曲线

图5是 m 取值为 2、3、4、5、6、8、9 时的最优拓扑。从图 5a~5g 分可以看出, 当 m 取值不同时, 各子域最优拓扑形式的主体形状基本相同, 为“辐条”加“侧支撑”。随着子域数目 m 的增加, “辐条”数量也逐渐增加, 但宽度却逐渐变窄, 其形状也由弯曲变为笔直; “侧支撑”随着子域数目 m 的增加, 宽度逐渐变窄。当 $m=5$ 和 6 时, 各子域“侧支撑”由 1 个变为 2 个。其原因主要是因为随着“辐条”宽度逐渐变窄, 增加“侧支撑”数量以提高“辐条”刚度。

图5 m 不同取值时的最优拓扑

图6为最优拓扑时的相对应变能 C_r 、迭代数 k 、质量分数 f 和性能指标 PI 随子域数目 m 的变化曲线。当 $m=2$ 时, 经过 54 次迭代类周期性布局优化收敛。收敛时, 相对应变能 C_r 为 2.388, 性能指标 PI 为 $5.375 \text{ N} \cdot \text{mm}$, 均为最小。通过这两项指标可以认为 $m=2$ 的最优拓扑为本算例结构类周期性布局优化的最优拓扑形式。

图6 最优拓扑时的相对应变能、性能指标、质量分数

5.2 二维汽车轮毂结构

算例 5.1 中循环对称结构的工程背景为一汽

车轮毂。汽车轮毂最危险的力作用点位置为两“辐条”之间的外环外边界的最底端处。二维汽车轮毂结构如图7所示。在圆周方向上优化区域均匀地划分为 $m=4$ 个扇形子域。为便于与算例 5.1 对比分析, 同样的一个水平载荷 $F_x=1\,000 \text{ N}$ 和一个垂直载荷 $F_y=1\,000 \text{ N}$ 作用在外环外边界的最底端 B 点。不同之处在于, 无论优化区域划

图7 二维汽车轮毂结构

分多少个扇形子域， B 点始终位于子域 1 左右对称线与外环外边界的交点。其他参数与算例 5.1 相同。

图 8 是 m 取值为 2、3、4、5、6、8、9 时的二维汽车轮毂结构的最优拓扑。当子域数目 $m=2$ 、3 和 4 时，各子域最优拓扑形式为 2 个“辐条”加 1~2 个“侧支撑”。与算例 5.1 中的图 5a~5c 相比，多了 1 个“辐条”。2 个“辐条”中较宽的辐条称为“主辐条”，

较窄的称为“次辐条”。当 $m=5$ 和 6 时，各子域最优拓扑形式为“主辐条”加 2 个“侧支撑”。“次辐条”的两端均与外环相连，并逐步退化为一“侧支撑”。与算例 5.1 中的图 5d、5e 相比，“侧支撑”数目相同，均为 2 个。当 $m=8$ 和 9 时，各子域最优拓扑形式为 1 个“辐条”加 1 个“侧支撑”，与算例 5.1 中图 5f、5g 基本一致。由于“次辐条”完全消失，没有必要再去区分主次，故称为“辐条”。

图 8 m 不同取值时的二维汽车轮毂结构的最优拓扑

总的来说,当 m 取值不同时,各子域最优拓扑形式依然为“辐条”加“侧支撑”。但“辐条”和“侧支撑”的数量随着子域数目 m 的变化而发生改变。

图9为二维汽车轮毂结构最优拓扑时的相对应变能 C_r 、迭代数 k 、质量分数 f 和性能指标 PI 随子域数目 m 的变化曲线。当 $m=9$ 时,经过50次迭代结构类周期性布局优化收敛。收敛时,相对应变能 C_r 为7.275,性能指标 PI 为17.692 N·mm。当 $m=2$ 时,经过49次迭代结构类周期性布局优化收敛。收敛时,相对应变能 C_r 为7.997,性能指标 PI 为14.950 N·mm。综合考虑这两项指标及其最优拓扑,认为 $m=9$ 的最优拓扑为本算例结构类周期性布局优化的最优拓扑形式。

图9 最优拓扑时的相对应变能、性能指标、质量分数

5.3 梯形结构

如图10所示的梯形结构,长 $L=240$ mm,左侧高 $H_1=70$ mm,右侧高 $H_2=40$ mm,厚度 $t=1$ mm。该结构中间区域为优化区域,左侧 $h_1=60$ mm,右侧高 $h_2=30$ mm。上、下区域为非优化区域,高 $h_3=5$ mm。优化区域初步分为 $m=4$ 个子域,在高度方向上划分为60个均匀分割,在长度方向上划分为240个非均匀分割,分割长度比例为 h_2/h_1 。梯形结构左端被固定,右端作用 $F=100$ N的垂直载荷。整个优化域为了避免出现奇异性问题,一个很小的弹性非设计区域附加在右端来传递载荷。其他参数如表2所示。

图10 梯形结构的设计域

表2 结构类周期性布局优化的参数

参数	数值
弹性模量 E_0/GPa	210
泊松比 ν	0.3
惩罚因子 p	3
保留的质量分数 $f_0(\%)$	30
子域数目 m	2、4、5、6、8
设计变量初始值 $x_{i,j}$	$(1, 1, \dots, 1)_{m \times n}$

图11是子域数目 $m=2$ 时柔度 C 、质量分数 f 和性能指标 PI 的优化曲线。随着迭代次数的增加,柔度 C 增加后并缓慢下降,质量分数 f 平缓下降。当相邻两次优化结果柔度的相对误差 τ 连续5次小于给定的收敛精度 $\tau_{\max}=0.001$ 时,认为优化收敛。获得的最优拓扑如图12a所示。此时经过35次迭代,柔度为4.573 N·mm,质量分数 f 达到26.45%,性能指标为1.209 N·mm。

图11 柔度、质量分数和性能指标的优化曲线

图12是 m 取值为2、4、5、6、8时的最优拓扑。从图12a~12e分可以看出,当 m 取值为2时,两个子域的拓扑形式均呈现为双“X”形;当 m 取值为4、5时,各子域的拓扑形式均呈现为“X”形;当 m 取值为6、8时,各子域的拓扑形式均呈现为“◇”形;“X”形或“◇”形与非优化区域相连,构成多个三角形,使得整个结构具有良好的稳定性。

图 12 m 不同取值时的最优拓扑

图 13 为最优拓扑时的相对应变能 C_r 、迭代数 k 、质量分数 f 和性能指标 PI 随子域数目 m 的变化曲线。当 $m=2$ 时，经过 35 次迭代类周期性布局优化收敛。收敛时，相对应变能 C_r 为 1.272，性能指标 PI 为 1.197 N·mm，均为最小。通过这两项指标可以认为 $m=2$ 的最优拓扑为本算例结构类周期性布局优化的最优拓扑形式。

图 13 最优拓扑时的相对应变能、性能指标、质量分数

5.4 不同的过滤方案对最优拓扑的影响

不同的过滤方案对最优拓扑的好坏影响较大。以 5.3 节中梯形结构 $m=2$ 时的结构类周期性布局优化为例，研究不同的过滤方案对最优拓扑的影响。图 14 是使用文献[27]中过滤方案的优化过程。由于未考虑有限元网格划分不均时单元体积不同而造成的单元体积依赖性问题，整个优化过程局部区域有轻微的棋盘格现象发生，过滤效果较差，且拓扑形式较复杂。图 15 是本文所提过滤方案的优化过程。由于该过滤方案以单元应变能密度为基础，与文献[27]中过滤方案相比，去除了单元体积的影响，获得了非常好的最

优拓扑形式，如图 15d 所示。从图 14 和图 15 的对比分析可以看出，本文所提过滤方案具有明显的优越性，有效地解决了由于有限元网格划分不均匀而造成的单元体积依赖性问题。

图 14 使用文献[27]中过滤方案的优化过程

5.5 不同的有限元网格划分方案对最优拓扑的影响

不同的有限元网格划分方案获得的单元尺寸大小不同，即单元体积不同。以第 5.1 节中循环对称结构 $m=4$ 时的结构类周期性布局优化为例，研究不

(d) $k=35$ (最优拓扑)

图 15 本文所提过滤方案的优化过程

同有限元网格划分方案对最优拓扑的影响。在图 3 所

示优化区域的半径方向上分别划分 $n_r=30、40、50、60、70$ 个非均匀分割, 在圆周方向分别划分 $n_z=180、240、300、360、420$ 个均匀分割, 共 5 种有限元网格划分方案。分别进行结构类周期性布局优化, 获得最优拓扑如图 16a~16e 所示。从图 16 中可以, 采用不同的有限元网格划分方案, 均可以获得拓扑形式一致的最优拓扑, 验证了本文很好地解决了单元体积依赖性问题。

图 16 不同的有限元网格划分方案获得的最优拓扑

6 结论

(1)提出一种基于导重法的结构类周期性布局优化方法。以最小柔度为目标函数, 结构质量为约束条件, 构建结构类周期性布局优化的数学模型。利用导重法推导出结构类周期性布局优化的迭代准则, 解释其物理意义并给出其优化流程。

(2)提出一种改进的过滤方案以解决结构类周期性布局优化中单元体积依赖性问题。

(3)增加性能指标 PI , 与相对应变能 C_r 一起来评价结构类周期性布局优化的最优拓扑形式。

(4)通过循环对称结构、二维汽车轮毂结构和梯形结构三个算例, 验证了利用导重法求解结构类周期性布局优化的可行性和有效性。

参 考 文 献

- [1] THOMSEN C R, WANG Fengwen, SIGMUND O. Buckling strength topology optimization of 2D periodic materials based on linearized bifurcation analysis[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, 339: 115-136.
- [2] SUN Jialiang, TIAN Qiang, HU Haiyan. Simultaneous topology and size optimization of a 3D variable-length

- structure described by the ALE-ANCF[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 129: 80-105.
- [3] 龙凯, 贾娇. 基于 ICM 法的传热结构周期性拓扑优化设计[J]. 工程力学, 2015, 32(5): 227-235.
- LONG Kai, JIA Jiao. Periodic topology optimization design for thermal conductive structures using ICM method[J]. Engineering Mechanics, 2015, 32(5): 227-235.
- [4] 贾娇, 程伟, 龙凯. 基于 SIMP 法的周期性传热材料拓扑化[J]. 北京航空航天大学学报, 2015, 41(6): 1042-1048.
- JIA Jiao, CHENG Wei, LONG Kai. Topology optimization for periodic thermal conductive material using SIMP method[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2015, 41(6): 1042-1048.
- [5] HUANG Xiaodong, XIE Yinmin. Optimal design of periodic structures using evolutionary topology optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2008(36): 597-606.
- [6] ZUO Zhihao, XIE Yimin, HUANG Xiaodong. Optimal topological design of periodic structures for natural frequencies[J]. Journal of Structural Engineering, 2011, 137(10): 1229-1240.
- [7] XIE Yinmin, ZUO Zhihao, HUANG Xiaodong, et al. Convergence of topological patterns of optimal periodic structures under multiple scales[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2012, 46(1): 41-50.
- [8] ZUO Zhihao. Topology optimization of periodic structures [D]. Melbourne: RMIT University, 2009.
- [9] ZUO Zhihao, HUANG Xiaodong, XIE Yinmin, et al. Comparing optimal material microstructures with optimal periodic structures[J]. Computational Materials Science, 2013, 69: 137-147.
- [10] 付志方, 王春洁. 载荷不确定的周期性结构稳健拓扑优化[J]. 北京航空航天大学学报, 2017, 43(4): 747-753.
- FU Zhifan, WANG Chunjie. Robust topology optimization of periodic structures under uncertain loading [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2017, 43(4): 747-753.
- [11] 高彤, 张卫红, 朱继宏, 等. 循环对称结构静力学渐进拓扑优化设计[J]. 机械工程学报, 2008, 44(3): 166-172.
- GAO Tong, ZHANG Weihong, ZHU Jihong, et al. Evolutionary static topology optimization of cycle-symmetry structures[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(3): 166-172.
- [12] 荣见华, 廖莺, 赵志军, 等. 基于位移约束的类周期性连续体结构拓扑优化设计[J]. 应用力学学报, 2013 (6): 876-881.
- RONG Jianhua, LIAO Ying, ZHAO Zhijun, et al. Topology optimization of periodic-like structures with displacement constraints[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2013(6): 876-881.
- [13] HE Guanqiang, HUANG Xiaodong, WANG Hu, et al. Topology optimization of periodic structures using BESO based on unstructured design points[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2016, 53(2): 271-275.
- [14] 陈树勋, 叶尚辉. 天线结构优化设计的准则法[J]. 固体力学学报, 1984(4): 482-497.
- CHEN Shuxun, YE Shanghui. Criterion method for the optimal design of antenna structure[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 1984(4): 482-497.
- [15] CHEN Shuxun, YE Shanghui. A guide-weight criterion method for the optimal design of antenna structures[J]. Engineering Optimization, 1986, 10(3): 199-216.
- [16] 陈树勋. 工程结构系统分析、综合与优化设计[M]. 北京: 中国科学文化出版社, 2008.
- CHEN Shuxun. The analysis combination and optimization design of the system of engineering structures[M]. Beijing: Chinese Science and Culture Publishing House, 2008.
- [17] 陈树勋, 韦齐峰, 黄锦成. 结构优化导重准则及其意义与合理性[J]. 固体力学学报, 2013, 34(6): 628-638.
- CHEN Shuxun, WEI Qifeng, HUANG Jincheng. Meaning and rationality of guide-weight criterion for structural optimization[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2013, 34(6): 628-638.
- [18] 陈树勋, 韦齐峰, 黄锦成. 质量对结构优化理性准则法计算结果的影响研究[J]. 计算力学学报, 2015, 32(1): 33-40.
- CHEN Shuxun, WEI Qifeng, HUANG Jincheng. The influence of structural mass on optimization effect of rational criterion methods[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2015, 32(1): 33-40.
- [19] 李枝东, 刘辛军. 导重法求解单工况的拓扑优化问题[J]. 机械工程学报, 2011, 47(15): 107-114.
- LI Zhidong, LIU Xinjun. Guide-weight method on solving topology optimization problems under single load case[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(15): 107-114.
- [20] LIU Xinjun, LI Zhidong, WANG Liping, et al. Solving topology optimization problems by the guide-weight method[J]. Frontiers of Mechanical Engineering, 2011,

- 6(1): 136-150.
- [21] LIU Xinjun, LI Zhidong, CHEN Xiang. A new solution for topology optimization problems with multiple loads: The guide-weight method[J]. Science China Technological Sciences, 2011, 54(6): 1505-1514.
- [22] 陈树勋, 韦齐峰, 黄锦成, 等. 利用导重法进行结构轻量化设计[J]. 工程力学, 2016, 33(2): 179-187.
CHEN Shuxun, WEI Qifeng, HUANG Jincheng. Lightening structural design using guide weight method[J]. Engineering Mechanics, 2016, 33(2): 179-187.
- [23] 陈树勋, 韦齐峰, 黄锦成. 利用导重法进行结构拓扑优化[J]. 计算力学学报, 2015, 32(2): 160-166.
CHEN Shuxun, WEI Qifeng, HUANG Jincheng. Guide-weight method for structural topology optimization[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2015, 32(2): 160-166.
- [24] 周奇才, 吴青龙, 熊肖磊, 等. 塔式起重机臂架周期性拓扑优化设计[J]. 同济大学学报, 2017, 45(10): 1498-1505.
ZHOU Qicai, WU Qinglong, XIONG Xiaolei, et al. Periodic topology optimization design of tower crane boom [J]. Journal of Tongji University, 2017, 45(10): 1498-1505.
- [25] ZHANG Yan, XIAO Mi, LI Hao, et al. Multiscale concurrent topology optimization for cellular structures with multiple microstructures based on ordered SIMP interpolation[J]. Computational Materials Science, 2018, 155: 74-91.
- [26] 陈垂福, 杨晓翔. 基于步长因子改进的导重法求解拓扑优化问题[J]. 计算力学学报, 2018, 35(1): 14-20.
CHEN Chuifu, YANG Xiaoxiang. Based on step factor improved guide-weight method for solving topology optimization problems[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2018, 35(1): 14-20.
- [27] HUANG Xiaodong, XIE Yinmin. Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method[J]. Finite Elem. Anal. Des., 2007, 43(13): 1039-1049.
-
- 作者简介: 焦洪宇, 男, 1981 年出生, 博士, 副教授。主要研究方向为机械结构轻量化关键技术。
E-mail: csjghy@163.com
于照鹏(通信作者), 男, 1989 年出生, 博士。主要研究方向为汽车轻量化材料仿生表面与界面。
E-mail: yuzhaopeng@cslg.edu.cn