DOI: 10.3901/JME.2020.13.050

基于 Duffing 系统的谐振式微悬臂梁传感器 微弱谐振信号检测*

戴 荣¹ 于海涛² 王 权¹

(1. 江苏大学机械工程学院 镇江 212013;

2. 中国科学院上海微系统与信息技术研究所传感技术国家重点实验室 上海 200050)

摘要: 研究了基于 Duffing 振子系统的微弱信号检测在谐振式微悬臂梁传感器中的应用。根据待测信号频率的不同,通过时间尺度变换建立了任意频率下的 Duffing 振子数学模型。利用 RHR 改进算法求解最大 Lyapunov 指数,并确定系统相变临界阈值,通过监测最大 Lyapunov 指数符号的变化来检测微弱谐振信号。详细介绍了两种幅值检测算法,通过试验验证了减法算法比加法算法更具优越性,不受大范围幅值的影响。评价了 Duffing 振子系统在不同噪声水平下检测微弱谐振信号的能力,添加噪声方差 0.000 1 和 0.001 后,检测相对误差控制在 0.005 2%以内;当添加噪声方差到 0.01 时,原有 Duffing 方程模型无法检测到最大 Lyapunov 指数符号的变化,检测失效。最后,通过改变原有 Duffing 方程非线性恢复力项系数,在添加噪声方差到 0.5 时,依然能够通过求取所测信号频率的平均值准确提取微弱谐振信号。

关键词: Duffing 振子系统; 微弱信号检测; 谐振式微悬臂梁传感器; RHR 改进算法; 最大 Lyapunov 指数

中图分类号: TG156

Weak Resonant Signal Detection of Resonant Microcantilever Sensors Based on Duffing System

DAI Rong¹ YU Haitao² WANG Quan¹

(1. School of Mechanical Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013;

2. State Key Laboratory of Transducer Technology, Shanghai Institute of Microsystem and Information Technology, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200050)

Abstract: The application of weak signal detection based on Duffing oscillator system is studied in resonant microcantilever sensors. According to the frequency of the detected signal, the mathematical model of Duffing oscillator at any frequency is established by transforming the time domain scale. An improved RHR algorithm is used to solve the maximum Lyapunov exponent, and the critical threshold of the phase transition in the system is determined. The weak resonant signal is detected by monitoring the change of the maximum Lyapunov exponent sign. Two amplitude detection algorithms are introduced in detail. Experiments show that the minus algorithm is superior to the plus algorithm and is not affected by the large amplitude range. The performance of the Duffing oscillator system for detecting weak resonant signals at different noise levels is evaluated. After increasing the noise variance of 0.000 1 and 0.001, the relative error detected is controlled within 0.005 2%. When the noise variance is increased to 0.01, the Duffing equation model cannot detect the transition of the largest Lyapunov exponent sign, and the detection is invalid. Finally, the nonlinear restoring force coefficient of Duffing equation is changed. When the noise variance is increased to 0.5, the weak resonant signal can still be accurately detected by calculating the average value of the measured signal frequencies.

Key words: Duffing oscillator system; weak signal detection; resonant microcantilever sensor; improved RHR algorithm; maximum Lyapunov exponent

* 国家自然科学基金资助项目(51675246, 91750112)。20190725 收到初稿,
20191118 收到修改稿

0 前言

随着微机电系统(MEMS)技术的发展, 谐振式微悬臂梁传感器因高灵敏度、小体积、快速响应、成本低、易于阵列式集成等优势^[1], 广泛应用于安全监测、环境检测、食品安全^[2-5]等领域。通过检测悬臂梁谐振频率的变化, 可以实现对待测物质的定量检测。谐振式微悬臂梁传感器通过外部信号激励的方式工作, 输出信号非常微弱, 需要在噪声环境中将微弱的信号提取出来。

目前, 众多学者已在谐振器微弱信号检测方面取得了不少进展。包涵茵等^[6]设计了基于混合锁相环 MAX038 的闭环接口电路, 可以实现跟踪谐振频率的变化; 任艳波等^[7]基于 LabVIEW 开发了软件锁相环检测系统, 实现了开环扫频与闭环下频率的跟踪; 柴光飞等^[8]基于 FPGA 构建了数字锁相环, 并与外围接口电路结合设计了闭环接口电路, 利用了数字电路对外界环境不敏感的优势提高了系统精度。以上检测方式很大程度上依赖于放大器和滤波器, 特别是对于振幅, 频率和相位随激励信号变化的谐振式传感器信号而言, 性能很难进一步得到改善。

基于 Duffing 混沌振子的微弱信号检测方法与上述方法不同, 该方法利用混沌振子的初值灵敏度, 对微弱信号敏感而对噪声免疫的特点从噪声背景中提取更加微弱的目标信号。为此, 2014 年史慧超等^[9]提出基于 Duffing 混沌振子检测系统来提取强噪声背景中微弱谐振信号, 通过计算最大 Lyapunov 指数获得检测阈值, 并准确监测检测系统的运动变化, 通过调整检测阈值, 检测谐振信号并获得谐振频率, 对比了不同品质因素在不同信噪比水平下对检测系统的影响。2017 年史慧超等^[10]又提出两种检测算法来检测不同噪声水平下的微弱谐振信号, 并对两种算法进行了比较分析。但是, 对于其中加法算法的不足没有给与充分的实例验证, 对于无法检测出最大 Lyapunov 指数符号变化的现象, 没能给与足够的证据和改善方法。

本文将继续研究基于 Duffing 振子检测系统检测微弱谐振信号的理论与方法, 并通过实际幅频曲线模型验证两种算法的优劣, 对待测模型添加不同噪声水平后, 验证了减法算法的检测精度及抵抗噪声的能力, 同时指出检测失效的原因, 并在最后对检测失效的原因进行分析并提出了改进方法, 提高了系统在强噪声背景下检测微弱谐振信号的能力。

1 谐振式微悬臂梁工作原理

本文使用的谐振式微悬臂梁采用电热激励和压阻检测的方式, 通过形成惠斯通电桥来获取悬臂梁上的谐振频率^[11]。在微悬臂梁的悬臂端涂有敏感材料, 当吸附到生化物质时, 会使得悬臂梁的质量发生改变, 从而使其谐振频率也随之改变。通过监测谐振频率变化来判定待测物的含量或浓度。

开环测试是利用一系列由低到高的驱动频率信号来激励微悬臂梁, 并检测相应的幅值信息。当驱动频率很小时, 谐振梁的幅值响应很小; 当驱动频率越来越接近悬臂梁的固有频率时, 谐振梁的响应幅值逐渐增大; 当驱动频率大于固有频率慢慢变高时, 响应幅值快速衰减。即在外力驱动下, 谐振梁输出信号的振幅最大值对应的频率就是悬臂梁的谐振频率^[12]。悬臂梁的幅频特性曲线如图 1 所示。

图 1 不同阻尼下悬臂梁幅值-频率特性曲线

在不同频率下悬臂梁输出信号和激励信号之间存在相位差的变化。当驱动频率与悬臂梁的固有频率一致时, 相位差为 90° , 悬臂梁处于谐振状态, 输出信号为谐振信号, 其频率即为谐振频率。悬臂梁的相频特性曲线如图 2 所示。

图 2 不同阻尼微悬臂梁相位-频率特性曲线

谐振式微悬臂梁等效二阶系统的归一化幅频特性和相频特性由下式给出

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\xi^2\lambda^2}} \\ \varphi = -\arctan \frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2} \end{cases} \quad (1)$$

$$\lambda = \frac{\omega}{\omega_n} \quad \xi = \frac{n}{\omega_n}$$

式中, ω_n 为悬臂梁的固有频率, ξ 为系统的阻尼比, n 为阻尼系数。

2 Duffing 振子系统检测原理

本文采用 Duffing 振子系统来检测谐振式微悬臂梁传感器的微弱谐振信号。Duffing 振子对待测信号幅值的敏感性, 能够精确提取谐振器的谐振峰值, 从而识别出对应的谐振频率, 同时对噪声有很强的免疫能力。这里将谐振信号作为待测信号, 通过建立检测数学模型来测量系统从混沌状态到大周期状态的转变阈值, 并判断是否存在微弱谐振信号。

2.1 Holmes-Duffing 振子数学模型

首先, 建立用于微弱信号检测的 Holmes-Duffing 方程^[13]

$$\ddot{x} + k\dot{x} - \alpha x^3 + \beta x^5 = r \sin(\omega t) + a \sin(\omega_0 t + \theta_0) + n(t) \quad (2)$$

式中, k 为阻尼比; $-\alpha x^3 + \beta x^5$ 非线性恢复力项, α 和 β 为非线性恢复力项系数; $r \sin(\omega t)$ 为内置策动力, r 和 ω 为内置策动力幅值、角频率, $\omega = 2\pi f$, f 为内置策动力频率; $a \sin(\omega_0 t + \theta_0)$ 为待测谐振信号, a 、 ω_0 、 θ_0 分别为待测信号的幅值、角频率、相位, $\omega_0 = 2\pi f_0$, f_0 为待测信号频率; $n(t)$ 为噪声信号。设 $k=0.5$ 、 $\alpha=1$ 、 $\beta=1$ 后, 将式(2)转化成如下形式

$$\ddot{x} + 0.5\dot{x} - x^3 + x^5 = r \sin(\omega t) + a \sin(\omega_0 t + \theta_0) + n(t) \quad (3)$$

2.2 任意频率 Holmes-Duffing 振子数学模型

为了检测任意频率的谐振信号, 进一步对(3)式进行广义时间尺度变换, 先设 $\omega = \omega_0 = 1$, 再令 $t = \omega\tau$,

则 $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\omega} \frac{dx}{d\tau}$, 同理得 $\ddot{x} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2x}{d\tau^2}$, 代入式(3), 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega^2} \ddot{x}(\tau) + \frac{0.5}{\omega} \dot{x}(\tau) - x^3(\tau) + x^5(\tau) = \\ r \sin(\omega\tau) + a \sin(\omega_0\tau + \theta_0) + n(\tau) \end{aligned} \quad (4)$$

此时, 再将式(4)的 τ 换成 t 并改写成状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega x_2 \\ \dot{x}_2 = \omega(-0.5x_2 + x_1^3 - x_1^5 + r \sin(\omega t) + \\ a \sin(\omega_0 t + \theta_0) + n(t)) \end{cases} \quad (5)$$

在不加待测信号 $a \sin(\omega_0 t + \theta_0)$ 和噪声 $n(t)$ 时, 方程式(5)可以在任意频率下, 显示出清晰的混沌态和大尺度周期态, 并且该方程的临界阈值 r_d 不会随着频率的改变而改变, 稳定性很高。

2.3 检测原理

Duffing 振子系统相轨迹会随着策动力幅值 r 的变化呈现不同状态^[14-15]: 当 $r=0$ 时, 相平面中点 $(x, \dot{x})$ 最终收敛于两焦点 $(\pm 1, 0)$ 之一; r 较小时, 相轨迹表现为庞加莱映射意义下的吸引子, 相点围绕其中一个焦点周期振荡; 逐渐增加 r 达到临界阈值 r_d 时, 系统依次经历同宿轨道、倍周期分岔直到混沌运动状态, 当超过临界阈值 r_d 时, 系统出现大尺度周期运动。图 3a 和 3b 分别为系统混沌状态和大尺度周期状态的相图。通过对比, 混沌态和周期态的相轨迹图有着明显区别, 因此可以凭借相轨迹来判断系统输出的状态, 从而检测出待测微弱谐振信号。

(a) $r=0.7256$ V 时的混沌状态

(b) $r=0.7257$ V 时的大周期状态

图3 $f=100$ kHz 时, 不含待测信号和噪声的相图

但是, 这种方法有很大的局限性: 通过试切法来调节策动力幅值的步长大小对准确判断临界阈值有影响, 且步长的选取凭借经验, 科学依据不足; 随着待测信号和噪声的加入, 仅仅通过相轨迹图很难判断系统具体的状态。

3 Lyapunov 指数判别法

Lyapunov 指数是衡量系统动力学特性的一个

重要定量指标^[16], 它表征了系统在相空间中相邻轨道间收敛或发散的指数率, 它给出了一种定量分析的标准, 从统计特性上反映系统的动力学特性, 在混沌状态的判据中, 起着非常重要的作用。

常见计算最大 Lyapunov 指数的方法^[17]有定义法、Wolf 方法、小数据量法、Jacobian 方法、QR 分解法等。采用基于 QR 分解思想的 RHR 改进算法^[18-22], 此方法能够将正交矩阵 $\mathbf{Q}$ 写成特定地参数表达式, 使得正交内置化, 避免了复杂的重复正交过程, 并通过简化方程组提高了计算效率。

3.1 RHR 改进算法求解 Lyapunov 指数

首先, 对于三维连续时间的非自治系统式(5), 将其转化为三维自治系统。

令 $x_1 = x, \dot{x}_1 = \omega x_2, x_3 = \omega t$, 则

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega x_2 \\ \dot{x}_2 = \omega(-0.5x_2 + x_1^3 - x_1^5 + r \sin(x_3) + a \sin(\omega_0 t + \theta_0) + n(t)) \\ \dot{x}_3 = \omega \end{cases} \quad (6)$$

其中, 初值为 $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0$ 。设该系统式(6)的线性变分方程为

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{J}(t)\mathbf{X}(t) \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{I}_3 \quad (7)$$

其中, $\mathbf{X}(t) \in \mathbf{R}^{3 \times 3}, \mathbf{I}_3$ 是单位矩阵, 式(6)所对应的 Jacobi 矩阵为

$$\mathbf{J}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ \omega(3x_1^2 - 5x_1^4) & -0.5\omega & \omega r \cos x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

由于 $\mathbf{J}(t)$ 的第三行全为 0, 并且 $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}_3$, 故设(7)的基本解矩阵为

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} X_{11}(t) & X_{12}(t) & X_{13}(t) \\ X_{21}(t) & X_{22}(t) & X_{23}(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

对 $\mathbf{X}(t)$ 进行 QR 分解有

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(t) & 0 \\ Q_{21}(t) & Q_{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11}(t) & R_{12}(t) & R_{13}(t) \\ 0 & R_{22}(t) & R_{23}(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

通过 QR 分解法计算 Lyapunov 指数可知: 自治系统式(6)的一个 Lyapunov 指数为 0, 故确定 $R_{11}(t)$ 和 $R_{22}(t)$ 以及考虑式(6)的二维子系统即可。设系统式(6)的二维子系统变分方程为

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}}(t) = \tilde{\mathbf{J}}(t)\tilde{\mathbf{X}}(t), \tilde{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{I}_2 \quad (11)$$

其中, $\tilde{\mathbf{X}}(t) \in \mathbf{R}^{2 \times 2}, \mathbf{I}_2$ 是 2×2 的单位矩阵,

$$\tilde{\mathbf{J}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega(3x^2 - 5x^4) & -0.5\omega \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\text{记 } \tilde{\mathbf{J}}(t) = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}$$

将式(10)变为

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = \tilde{\mathbf{Q}}(t)\tilde{\mathbf{R}}(t) \quad (13)$$

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = \begin{pmatrix} X_{11}(t) & X_{12}(t) \\ X_{21}(t) & X_{22}(t) \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{Q}}(t) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(t) \\ Q_{21}(t) & Q_{22}(t) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{R}}(t) = \begin{pmatrix} R_{11}(t) & R_{12}(t) \\ 0 & R_{22}(t) \end{pmatrix}$$

将式(13)代入式(11)中, 并左乘 $\tilde{\mathbf{Q}}^T(t)$ 和右乘 $\tilde{\mathbf{R}}^{-1}(t)$ 可得

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}^T(t)\dot{\tilde{\mathbf{Q}}}(t) + \dot{\tilde{\mathbf{R}}}(t)\tilde{\mathbf{R}}^{-1}(t) &= \tilde{\mathbf{Q}}^T(t)\tilde{\mathbf{J}}(t)\tilde{\mathbf{Q}}(t) \\ \tilde{\mathbf{Q}}(0) &= \mathbf{I}_2 \quad \tilde{\mathbf{R}}(0) = \mathbf{I}_2 \end{aligned} \quad (14)$$

根据 RHR 算法思想, 正交矩阵 $\tilde{\mathbf{Q}}(t)$ 被改写成角度变量的形式, 设角度变量为 $\theta(t)$, 则正交矩阵 $\tilde{\mathbf{Q}}(t)$ 和对应的上三角矩阵为

$$\tilde{\mathbf{Q}}(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & \sin \theta(t) \\ -\sin \theta(t) & \cos \theta(t) \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}(t) = \begin{pmatrix} e^{\sigma_1(t)} & r_{12} \\ 0 & e^{\sigma_2(t)} \end{pmatrix}$$

r_{12} 不参与 Lyapunov 指数计算, 故不考虑其形式。将式(15)代入式(14)中, 则

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_1(t)}{dt} = J_{11} \cos^2 \theta(t) + J_{22} \sin^2 \theta(t) - 0.5(J_{12} + J_{21}) \sin 2\theta(t) \\ \frac{d\sigma_2(t)}{dt} = J_{11} \sin^2 \theta(t) + J_{22} \cos^2 \theta(t) + 0.5(J_{12} + J_{21}) \sin 2\theta(t) \\ \frac{d\theta(t)}{dt} = -0.5(J_{11} + J_{22}) \sin 2\theta(t) + J_{12} \sin^2 \theta(t) - J_{21} \cos^2 \theta(t) \end{cases} \quad (16)$$

将式(12)代入式(16), 化简得

$$\begin{cases} \frac{dv_1(t)}{dt} = -0.5\omega \\ \frac{dv_2(t)}{dt} = \omega(0.5 \cos 2\theta(t) - (1 + 3x_1^2 - 5x_1^4) \sin 2\theta(t)) \\ \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(-0.25 \sin 2\theta(t) + \sin^2 \theta(t) - (3x_1^2 - 5x_1^4) \cos^2 \theta(t)) \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \frac{dv_1(t)}{dt} = \frac{d\sigma_1(t)}{dt} + \frac{d\sigma_2(t)}{dt} \\ \frac{dv_2(t)}{dt} = \frac{d\sigma_1(t)}{dt} - \frac{d\sigma_2(t)}{dt} \end{cases} \quad (18)$$

解方程组式(17)得 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ ，代入(18)中得

$$\begin{cases} \sigma_1(t) = (v_1(t) + v_2(t)) / 2 \\ \sigma_2(t) = (v_1(t) - v_2(t)) / 2 \end{cases} \quad (19)$$

进而有

$$\begin{cases} \sigma_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma_1(t)}{t} \\ \sigma_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma_2(t)}{t} \end{cases} \quad (20)$$

式中， σ_1 和 σ_2 即为 Duffing 系统所求的两个 Lyapunov 指数。

3.2 系统临界阈值的确定

本文通过检测待测信号的谐振峰值(即振幅最大值)，从而进一步确定待测信号的谐振频率。为此，需要预先确定在不添加待测信号和噪声时 Duffing 系统的阈值 r_d ，通过阈值点的两个 Lyapunov 指数由一个正值和一个负值(混沌态)到两个指数都变为负值(大尺度周期态)来检测信号。直接求解 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 比较困难，这里采用定步长的四阶龙格-库塔算法对式(17)和(19)进行数值计算。

由于检测的谐振频率信号大多在 100 kHz 左右，故令 $f=100$ kHz，同时不加入待测信号和噪声，通过 Matlab 编程，让内置驱动力幅值 r 在 0 到 1 内逐步增加，取步长 $h=0.005$ ，计算 Lyapunov 指数并绘制 Lyapunov 指数随 r 的变化曲线，如图 4 所示，图 4 中 LCE 是 Lyapunov 特性指数(Lyapunov characteristic exponents)的英文缩写。从图中进一步观察发现，在 $r=[0.7,0.8]$ 之间时，最大 Lyapunov 指数符号由正变为负，即系统由混沌态转为大尺度周期态。在 $[0.7,0.8]$ 范围内，我们分别依次取步长为 0.01、0.001 和 0.000 1 进行计算，最终求得临界阈值 $r_d = 0.725\ 6$ V。当 $r=r_d$ 时，最大 Lyapunov 指数大于 0，系统处于混

图 4 Lyapunov 特性指数与 r 的关系曲线

沌状态，如图 5a 所示，图 5 中 $\lambda_1 = \frac{\sigma_1(t)}{t}$ 和 $\lambda_2 = \frac{\sigma_2(t)}{t}$

分别为两条随时间演化的 Lyapunov 指数曲线；当 $r=r_d+0.0001=0.7257$ V 时，最大 Lyapunov 指数小于 0，系统变为大尺度周期态，如图 5b 所示，图中 $\lambda_1 = \frac{\sigma_1(t)}{t}$ 和 $\lambda_2 = \frac{\sigma_2(t)}{t}$ 分别为两条随时间演化的 Lyapunov 指数曲线。

(a) $r=0.725\ 6$ V 时的混沌状态

(b) $r=0.725\ 7$ V 时的大周期态

图 5 Lyapunov 指数随时间的演化曲线

4 幅值检测算法

对于 Duffing 检测系统，待测信号 $a \sin(\omega_0 t + \theta_0)$ 的频率、幅值、和相位会随激励信号的频率变化而变化。当谐振器处于谐振状态时， $a = a_m$ ， $\omega_0 = \omega_m$ ， $\theta_0 = 0$ ， a_m 为谐振时最大振幅， $\omega_m = 2\pi f_m$ 为谐振角频率，其中 f_m 为谐振频率。记 $A_m = a_m \sin(\omega_m t)$ ，将其作为待测目标信号。此时，内置策动力角频率被设定为 $\omega = \omega_m$ 。设 r_{dm} 为引起系统在混沌态与大周期态之间转变的临界值。

正向加法算法：当系统处于混沌状态时，待测信号引起系统状态从混沌态变为大尺度周期态，则系统的内置策动力幅值变为临界值 $r_{dm} = r + a_m$ ，最大 Lyapunov 指数从正变为负，目标信号 A_m 被检测到，谐振器处于谐振状态，激励信号的频率为谐振频率^[10]。

反向减法算法: 当系统处于大尺度周期状态时, 待测信号引起系统状态从大尺度周期态变为混沌态, 则系统的内置策动力幅值变为临界值 $r_{dm} = r - a_m$, 最大 Lyapunov 指数从负变为正, 目标信号 A_m 被检测到, 谐振器处于谐振状态, 激励信号的频率为谐振频率^[10]。

根据检测算法知, Duffing 检测系统只对待测目标信号敏感, 通过检测目标信号获知谐振器工作在谐振状态。其他情况下, 待测信号的频率与内置策动力的频率不同, 待测信号的幅度也达不到检测系统的临界值, 并且相位不为零^[10]。下文试验部分, 将进一步对两种算法进行测试比较, 并选择合适本试验方案的检测算法进行试验。

5 试验与结果分析

本试验将以谐振式微悬臂梁传感器作为谐振器, 将实际采集的幅频曲线作为待测信号模型进行 Duffing 检测系统的算法验证。首先, 通过对谐振器进行开环检测, 将谐振器的信号采集到计算机作为数据保存, 以便 Matlab 程序调用。谐振器样品和开环测试系统如图 6 和图 7 所示。

图 6 谐振器样品

图 7 开环测试系统

5.1 两种检测算法的检测结果与分析

根据提供的实际扫频数据, 如图 8 所示, 得到了该曲线的最大幅值 $a_m = 0.8391 \text{ V}$, 这是被放大器放大并经过滤波后采集到的幅值, 对应的谐振频率 $f_m = 96880 \text{ Hz}$, 扫频间隔为 10 Hz 。通过公式

$$Q = \frac{f_m}{|f_1 - f_2|}$$

计算得出该谐振器的品质因素为 $Q = 244.03$, 式中 f_m 为谐振频率, f_1 和 f_2 分别为幅值在 $\frac{a_m}{\sqrt{2}}$ (a_m 为最大幅值) 时扫频曲线上两个点的频率, $|f_1 - f_2|$ 为通频带宽度。品质因素 Q 的大小对系统检测精度有一定影响, 这是因为品质因素较小时, 幅频特性曲线不是很陡峭, 峰值附近的幅值与之接近, 影响着谐振频率的检测精度, 从而对检测到的谐振频率求平均来求解谐振频率值^[9]。通过图 8 的局部放大图观察发现, 实际扫频曲线并不是光滑的曲线, 而是受到一定量噪声干扰的不平整的曲线, 在此基础上对其幅值进行检测。下面将通过求解正向加法算法和反向减法算法的最大 Lyapunov 指数对实际扫频曲线进行谐振频率检测。

图 8 实际采集的幅频特性曲线

首先, 根据已获得的谐振频率和最大振幅去设定式(3)中内置策动力项的参数 r 和 ω , $\omega = \omega_m = 2\pi f_m$, $f_m = 96880 \text{ Hz}$, 加法算法时, $r = r_{dm} - a_m = -0.1134 \text{ V}$, 减法算法时, $r = r_{dm} + a_m = 1.5647 \text{ V}$, 并令 $\theta_0 = 0$ 。然后, 经过 Matlab 程序测试, 分别得到两种算法的检测结果, 如图 9 和图 10 所示。

图 9 加法算法检测结果

从检测结果来看, 正向加法算法时, 最大 Lyapunov 指数小于零, 待测信号被检测到, 但图 9

图10 减法算法检测结果

的结果显示不仅检测到谐振频率,还检测到附近的频率值,这是因为品质因素不高对加法算法的影响,文献[9]中已给出试验结果对比。随着频率的增加,幅值随之下降,在频率越过 97 000 Hz 时,连续出现最大 Lyapunov 指数小于零的情况,这是因为待测信号经过放大器放大后,幅值范围超过了混沌状态的区域范围,进入周期振荡区域^[10]。从表 1 可以看出,在[0,1]区间内混沌区域范围只有 0.42,而扫频曲线幅值范围大于 0.7,故而检测失败。对于反向减法算法,则没有出现上述加法算法的情况。从图 10 看到,在没有检测到谐振频率信号时,所有的最大 Lyapunov 指数都小于零;当达到谐振频率时,峰值电压被检测到,最大 Lyapunov 指数大于零,且是唯一被检测到的信号。这也就证明了 Duffing 系统运用减法算法检测谐振器谐振频率切实可行,与开环测试 ± 3 Hz 误差相比,检测精度更高,且一定程度上不受待测电压范围的限制,这与文献[10]中的结论一致。

表1 内置策动力幅值 r 与系统状态变化的关系

r 取值 范围	(0,0.3]	(0.3,0.72]	(0.72,3.46]	(3.46,6.62]	(6.62, + ∞)
系统 状态	周期	混沌	大尺度 周期	混沌	准周期

5.2 添加不同噪声信号的检测结果与分析

为了验证 Duffing 检测系统对噪声免疫的性能,我们将以实际扫频曲线作为模型,添加不同方差的高斯白噪声信号来检测其在噪声环境下的检测结果并进行分析。

图 11 为添加不同噪声方差的幅频特性曲线;图 12 为添加不同噪声方差后对应的谐振频率检测结果。从检测结果中可以看出,随着噪声方差的增大,检测精度开始出现偏差,相对误差增加。经过多次测量,在最低检测门限值为 -80 dB,扫频间隔为 10 Hz 时的相对误差在 0.005 2% 以内,与文献[10]中减法算法所得的结果接近。但进一

步加大噪声方差后,图 12c 显示结果是最大 Lyapunov 指数都小于零,没有检测到谐振信号。尽管从图中可以很清晰的看出谐振频率附近的最大 Lyapunov 指数变化明显高于其他地方,但是没有性质的转变无法提取到具体的谐振频率值。经过分析,这种现象是由于噪声对信号的干扰造成的,掩埋在强噪声中的微弱谐振信号,很难越过阈值点被系统检测。为解决此问题,提高噪声下 Duffing 系统检测谐振信号的能力,在下文提出了改善措施。

(a) 添加噪声方差 0.000 1

(b) 添加噪声方差 0.001

(c) 添加噪声方差 0.01

图11 添加不同噪声方差的幅频曲线

5.3 改变非线性恢复力项系数提高系统检测能力

为了提高系统的抗噪声性能和检测信号的能力,这里尝试通过修改 Duffing 方程的非线性恢复力项系数来实现。将式(2)中的非线性恢复力项 $-ax^3 + \beta x^5$

图 12 添加不同噪声方差的检测结果

的系数由原先式(3)中设定的 $\alpha=1$, $\beta=1$ 修改为 $\alpha=0.7$, $\beta=1$, 修改后的公式如下

$$\ddot{x} + 0.5\dot{x} - 0.7x^3 + x^5 = r\sin(\omega t) + a\sin(\omega_0 t + \theta_0) + n(t) \quad (21)$$

按照上文中检测待测信号模型的方法, 继续给模型添加噪声, 通过式(21)新的 Duffing 方程对待测模型进行信号检测。图 13 为添加更大噪声方差后的幅频曲线图, 从图 13c 中可以看出, 曲线形状已经完全看不出来, 被强噪声掩埋。图 14 是对应图 13 的检测结果, 从图 14 中不难看出, 随着噪声的不断增加, 最大 Lyapunov 指数曲线呈现越来越强烈的锯齿波纹状, 靠近谐振频率附近的曲线波动远比噪声较小时要大, 但检测结果的精度相当高, 相对误差仍然控制在 0.005 2% 以内。随着噪声的增强, 谐振频率附近的电压幅值也被检测到, 但通过求取平均

值后, 仍然非常接近真实值, 相对误差很小。通过改变非线性恢复力系数后的新方程对强噪声有着很强的免疫作用, 几乎不受影响, 说明该方法在提高抗噪性能上切实可行。

图 13 添加不同噪声方差的幅频曲线

图14 添加不同噪声方差的检测结果

6 结论

(1) 以谐振式微悬臂梁传感器的微弱谐振信号为研究对象,介绍了谐振式微悬臂梁传感器的工作原理,并给出了其等效的归一化幅频和相频理论公式及曲线图。

(2) 建立了检测谐振信号的 Holmes-Duffing 振子方程,进一步通过时间尺度变换建立了可检测任意频率的 Holmes-Duffing 振子方程,并阐述了其检测微弱谐振信号的基本原理,通过系统由混沌态到大周期态的状态转变来判断是否检测到信号。

(3) 通过 RHR 改进算法求解了最大 Lyapunov 指数并确定了系统阈值,详细介绍了通过阈值点检测幅值的两种检测算法:正向加法算法和反向减法算法。

(4) 试验部分通过实际采集的幅频曲线进行了两种幅值检测算法的计算机验证,并进行了结果对比,反向减法算法比正向加法算法精确度更高且不受大幅值范围的影响;然后,以实际扫频曲线为模型,添加不同噪声方差来测试系统的抗噪检测性能,并与前人的检测结果进行对比,相对误差与之接近;最后,对于强噪声干扰引起的系统无法检测到正的 Lyapunov 指数的问题,本文采用了修改方程中非线性恢复力项系数的方法来提高系统检测信号的能力,

并通过计算机验证了该方法的可行性。

(5) 本文研究的谐振信号检测算法没有考虑相位差对系统的影响,这是研究的难点也是重点,将在以后的研究中进一步深入研究。

参考文献

- [1] LI Xinxin. Cantilever sensors equipped with nano sensing effects for ultra-sensitive detection of bio/chemical molecules[C]//Solid-state Sensors, Actuators & Microsystems Conference, Transducers International. IEEE, 2009.
- [2] ZHAO Wei, YU Haitao, REN Yanbo, et al. A resonant micro-cantilever frequency tracking system based on dynamic phase difference[C]//2014 IEEE International Instrumentation and Measurement Technology Conference (I2MTC). IEEE, 2014.
- [3] WASISTO H S, DOERING L, MERZSCH S, et al. Self-exciting and self-sensing resonant cantilever sensors for improved monitoring of airborne nanoparticles exposure[C]//Sensors. 2011 IEEE, Limerick.
- [4] SUKUABOL, SOOD. Analytical models of resonant rectangular cantilever type chemical sensors for applications in fluids[C]//International Conference on Sensing Technology. IEEE, 2009.
- [5] LEE Y, SEO H, JEON S, et al. Piezoelectric micro cantilever sensor for non-labeling detection of biomarker[C]//Sensors 2008 IEEE, Lecce.
- [6] 包涵菡,李昕欣,张志祥,等.基于锁相环接口电路的高性能扭转谐振模态微悬臂梁传感器研究[J].传感技术学报,2007,20(10):2234-2238.
BAO Hanhan, LI Xinxin, ZHANG Zhixiang, et al. High performance torsional resonant microcantilever beam based on phase-locked loop interface circuit[J]. Chinese Journal of Sensors and Actuators, 2007, 20(10): 2234-2238.
- [7] 任艳波,于海涛,赵伟,等.基于LabVIEW的谐振式微悬臂梁传感器智能激励与检测系统[J].仪表技术与传感器,2015(12):11-14.
REN Yanbo, YU Haitao, ZHAO Wei, et al. LabVIEW-based intelligent exciting and detecting system for resonant cantilever sensors[J]. Instrument Technique and Sensor, 2015(12): 11-14.
- [8] 柴光飞,刘民,于海涛,等.基于FPGA的谐振悬臂梁传感器智能接口电路[J].仪表技术与传感器,2013(3):7-10.
CHAI Guangfei, LIU Min, YU Haitao, et al. Intelligent

- interface circuit for resonant cantilever sensors based on FPGA[J]. *Instrument Technique and Sensor*, 2013(3): 7-10.
- [9] SHI Huichao, FAN Shangchun, XING Weiwei, et al. Study of weak vibrating signal detection based on chaotic oscillator in MEMS resonant beam sensor[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2015, 50-51: 535-547.
- [10] SHI Huichao, LI Wenlong. Research on weak resonance signal detection method based on duffing oscillator[J]. *Procedia Computer Science*, 2017, 107: 460-465.
- [11] YU Haitao, LI Xinxin, GAN Xiaohua, et al. Resonant-cantilever bio/chemical sensors with an integrated heater for both resonance exciting optimization and sensing repeatability enhancement[J]. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2009, 19(4): 045023.
- [12] TIERNEY J, RADER C M, GOLD B. A digital frequency synthesizer[J]. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 1971, 54(19): 48-56.
- [13] 李月, 杨宝骏. 混沌振子检测引论[M]. 北京: 电子工业出版社, 2004.
- LI Yue, YANG Baojun. Introduction to chaotic oscillator detection[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2004.
- [14] 刘延柱, 陈立群. 非线性振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- LIU Yanzhu, CHEN Liqun. Nonlinear vibration[M]. Beijing: Higher Education Press, 2001.
- [15] 刘曾荣. 混沌的微扰判据[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1994.
- LIU Zengrong. Chaotic perturbation criterion[M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Education Press, 1994.
- [16] 何建华, 杨宗凯, 王姝. 基于混沌和神经网络的弱信号探测[J]. *电子学报*, 1998, 26(10): 34-37.
- HE Jianhua, YANG Zongkai, WANG Shu. Weak signal detection based on chaos and neural networks[J]. *Acta Electronica Sinica*, 1998, 26(10): 34-37.
- [17] 张海龙, 闵富红, 王恩荣. 关于 Lyapunov 指数计算方法的比较[J]. *南京师范大学学报*, 2012, 12(1): 5-9.
- ZHANG Hailong, MIN Fuhong, WANG Enrong. The comparison for Lyapunov exponents calculation methods[J]. *Journal of Nanjing Normal University*, 2012, 12(1): 5-9.
- [18] RANGARAJAN G, HABIB S, RYNE R D. Lyapunov exponents without rescaling and reorthogonalization [J]. *Physical Review Letters*, 1998, 80(17): 3747-3750.
- [19] UDWDIA F E, VON BREMEN H F. An Efficient and stable approach for computation of Lyapunov characteristic exponents of continuous dynamical systems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2001, 121(2) : 219-259.
- [20] UDWDIA F E, VON BREMEN H F. Computation of Lyapunov characteristic exponents for continuous dynamical systems[J]. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2002, 53(1): 123-146.
- [21] HU Wenjing, LIU Zhizheng, LI Zhihui. Quantitative analysis of noise impact on duffing chaotic detection system using Lyapunov characteristic exponents[J]. *Applied Mechanics and Materials*, 2011, 130-134: 1331-1337.
- [22] 叶锋. 含 $-x^5+x^7$ 项 Duffing 方程的 Lyapunov 指数计算[J]. *今日科苑*, 2012(14): 127-128.
- YE Feng. Calculation of Lyapunov exponents for Duffing equation with $-x^5+x^7$ terms[J]. *Modern Science*, 2012(14): 127-128.

作者简介: 戴荣, 男, 1982 年出生。主要研究方向为谐振器信号处理。

E-mail: 295103504@qq.com

于海涛, 男, 1981 年出生, 博士, 研究员。主要研究方向为微纳机电系统工艺与器件、谐振式微悬臂梁生化传感器。

E-mail: yht@mail.sim.ac.cn

王权(通信作者), 男, 1973 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为微纳机电系统及其集成、硅基集成传感器件及系统。

E-mail: wangq@mail.ujes.edu.cn