DOI: 10.3901/JME.2020.12.056

热-机载荷下形状记忆合金梁的力学模型及其求解^{*}

周 博 王志勇 薛世峰

(中国石油大学(华东)储运与建筑工程学院 青岛 266580)

摘要: 在现有的形状记忆合金(Shape memory alloy, SMA)简化模型的基础上, 结合温度与相变临界应力的关系, 从应变角度出发, 提出一种形式简单、物理意义更加明确且能反应 SMA 在热-机载荷下力学行为的分段线性模型。基于 Bernoulli-Euler 梁理论, 利用 SMA 分段线性模型, 建立 SMA 梁非线性弯曲过程中弯矩与曲率关系的力学模型。结合 SMA 梁力学模型, 设计一套简便易行的求解流程, 分别对纯弯曲和受均布载荷的简支梁进行数值求解, 分析梁截面上应力分布、弯矩与挠度关系、记忆因子的变化等。结果显示建立的 SMA 分段线性模型能有效描述热-机载荷下 SMA 的力学行为, 可建立简单有效的 SMA 结构的力学模型, 更便于工程应用和理论分析。

关键词: 形状记忆合金; 分段线性模型; 热-机载荷; Bernoulli-Euler 梁; 力学模型

中图分类号: TG139

Mechanical Model and Numerical Solution of Shape Memory Alloy Beam under Thermal-mechanical Load

ZHOU Bo WANG Zhiyong XUE Shifeng

(College of Pipeline and Civil Engineering, China University of Petroleum, Qingdao 266580)

Abstract: Based on the existing piecewise linear model of shape memory alloy (SMA), combined with the relationship between temperature and critical stress of phase transition, a simple piecewise linear model of SMA with clearer physical meaning, which can reveal mechanical behavior of SMA under thermal-mechanical load, are proposed from the perspective of strain. Based on the Bernoulli-Euler beam theory, the mechanical model of the relationship between bending moment and curvature in the nonlinear bending process of SMA beams is established by using the SMA piecewise linear model. Combined with the SMA beam mechanical model, the purely curved beam and simply supported beam with uniform load are numerically solved respectively by a simple solving process. The stress distribution, bending moment and deflection, and memory factor changes are analyzed. The results show that the established SMA piecewise linear model can effectively describe the mechanical behavior of SMA under thermo-mechanical load. The simple and effective mechanical model of SMA structure can be established using the piecewise linear model, which is more convenient for engineering application and theoretical analysis.

Key words: shape memory alloy; piecewise linear model; thermal-mechanical load; Bernoulli-Euler beam; mechanical model

0 前言

形状记忆合金(Shape memory alloys, SMA)是一种新型智能材料, 具有独特的形状记忆效应和超弹性, 能够提供较大的可恢复应变, 且恢复能力强, 性能稳定^[1-3]。同时, 由于 SMA 耐腐蚀性优良, 阻尼性好等特点, 基于 SMA 的装置和结构在不同领域得到了广泛的应用。如 SHI 等^[4]设计了一种利用

SMA 丝主动驱动的两自由度链接构件, 并可用模糊 PID 逻辑控制方法对 SMA 两端的电压进行控制; WANG 等^[5]设计了一种多重环形 SMA 弹簧系统, 用于地震载荷环境下钢框架中的梁柱自定心连接; BUCCHI 等^[6]开发了一种被动磁-热-机耦合系统, 该系统中 SMA 弹簧被用于磁流变离合器的开关控制上; 袁发鹏等^[7]基于 SMA 的热力学特性, 设计了一种能随外界温度变化自动调节电阻, 进而改变输出电流大小的 SMA 智能温控开关; 于东等^[8]利用 SMA 丝的形状记忆特性, 借助齿轮与链条的传动功能设计了一种旋转驱动装置。

合理预测 SMA 结构的力学行为是设计 SMA 相

^{*} 国家科技重大专项(2017ZX05009-003)和国家重点研发计划(2017YFC0307604)资助项目。20191001 收到初稿, 20200407 收到修改稿

关装置的重要环节,为此,不断有研究者提出 SMA 的热力学模型^[9-13]。目前,学者们对 SMA 结构的力学行为研究集中在两个方面,一是结合 SMA 的本构模型和相关的结构模型假设推导出 SMA 结构的力学行为的解析解,如 VIET 等^[14]基于三维热力学模型和铁木辛柯梁理论,建立了超弹性 SMA 层合悬臂梁的一个加卸载循环弯曲的力学模型;DE AGUIAR 等^[15]利用一维热力学本构模型描述 SMA 的剪切行为,结合经典螺旋弹簧分析方法建立了 SMA 螺旋弹簧的力学模型;SHIAN 等^[16]研究了 SMA 纤维增强复合层合板的自由振动,导出了依赖于位置的线性、非线性刚度和质量矩阵的公式。二是基于 SMA 的本构模型并利用有限元方法对 SMA 梁进行数值分析,如康泽天等^[17]基于 Gibbs 自由能推导了 SMA 的增量型本构模型,利用商用有限元软件的二次开发功能编写了用户子程序,进而分析了 SMA 管接头热机耦合行为;MORADI 等^[18]利用商业有限元软件建立了钢制抗弯矩形框架的三维有限元模型,并分析了框架中结合 SMA 板的梁柱连接的抗震性能。

受限于 SMA 本构模型高度的非线性,解析解和数值解的求解均具有较高的难度。建立简单有效的简化模型是便于 SMA 工程应用和理论分析一个重要手段,常见的一种简化是 SMA 的将应力应变关系简化为分段线性关系。SMA 分段线性模型能够极大的降低对 SMA 结构分析求解的复杂性,在实际分析中被广泛使用。郑继周等^[19]对 SMA 非线性本构关系进行简化,建立了 SMA 超弹性应力应变关系的分段线性模型,并探讨了特性参数随应变幅值、温度等变化的规律;周博等^[20]基于简化的分段线性 SMA 力学本构模型,结合普通金属螺旋弹簧的弹性变形理论,分析与描述了 SMA 螺旋弹簧的簧丝横截面上应变、应力分布规律,建立了描述 SMA 螺旋弹簧轴向变形和轴向力之间关系的力学模型。ESHGHINEJAD 等^[21]基于应变沿梁截面线性分布的假设,提出了一种 SMA 分段线性模型,计算了外载荷作用下 SMA 梁相应的精确解;杨静宁等^[22]利用简化的分段线性模型建立了 SMA 梁在弯曲过程中横截面应力分布表达式,推导了 SMA 梁在弯曲变形过程中的非线性控制方程并进行求解。有些 SMA 分段线性模型形式不够简便,有些模型物理意义不够明确,这为 SMA 结构的力学分析造成了不便。

本文在已有的 SMA 分段线性模型的基础上进行了修改,结合温度与相变临界应力的关系,从应

变的角度出发,提出了一种物理意义明确且能反应 SMA 在热-机载荷下力学行为的分段线性模型。基于 Bernoulli-Euler 梁理论,利用本文的 SMA 分段线性模型,建立了 SMA 梁非线性弯曲过程中弯矩与曲率关系的力学模型。结合建立的 SMA 梁力学模型,设计了一套简便易行的求解流程,对纯弯曲和受均布载荷的简支梁进行了数值求解,分析了梁截面上应力分布、弯矩与挠度关系、记忆因子的变化等。

1 SMA 简化本构关系

1.1 应力应变关系

SMA 的本构关系具有极强的非线性,导致对于 SMA 结构的计算较为复杂。为了简化计算,本文将 SMA 本构模型简化为分段直线形式。图 1 所示为 SMA 超弹性应力应变曲线,在加载和卸载过程中均可分为三个阶段。加载过程中的第一个阶段是线弹性阶段,材料为奥氏体相。应力达到马氏体开始应力 σ_{ms} 时,开始发生相变,材料由马氏体和奥氏体混合组成,弹性模量随着相变的进行在不断变化。应力达到马氏体结束应力 σ_{mf} 时,相变完成,材料为马氏体相。卸载过程中应力减小到奥氏体开始应力 σ_{as} ,逆相变开始,随着应力的减小,材料中的马氏体逐渐转化为奥氏体。当应力达到奥氏体结束应力 σ_{af} 时,逆相变完成,材料由奥氏体组成。

图 1 SMA 超弹性应力-应变曲线

本文将 ZHOU^[9]建立的形状记忆合金的三维本构模型简化为一维模型,应力与应变之间的关系为

$$\sigma = E(\varepsilon - \alpha \Delta T - \eta \delta \varepsilon_R) \quad (1)$$

式中, σ 、 ε 、 α 、 ΔT 、 η 、 δ 和 ε_R 分别是应力,应变,热膨胀系数,温度增量,形状记忆因子,拉压系数和最大残余应变。为分别表示受拉和受压情况下的不同相变方向,设拉压系数 δ 为

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{受拉} \\ -1 & \text{受压} \end{cases} \quad (2)$$

E 是形状记忆合金的弹性模量, 表示为

$$E = E_a + (E_m - E_a)\eta \quad (3)$$

式中, E_a 和 E_m 分别是奥氏体弹性模量和马氏体弹性模量。

文献[20]将马氏体体积分数的演化过程简化为分段线性形式, 本文在其基础上使用形状记忆因子替代马氏体体积分数, 并采用应变表示相变演化过程中的形状记忆因子。在一维应力情况下马氏体相变过程中, 形状记忆因子的演化描述为

$$\eta = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq \varepsilon_{ms} \\ \eta_0 + (1 - \eta_0) \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_{ms}^2}}{\varepsilon_{mf} - \varepsilon_{ms}} & \varepsilon_{ms} < \varepsilon \leq \varepsilon_{mf} \\ 1 & \varepsilon > \varepsilon_{mf} \end{cases} \quad (4)$$

式中, η_0 为相变开始时的形状记忆因子, ε_{ms} 和 ε_{mf} 分别是马氏体开始应变和马氏体结束应变。

由奥氏体转变为马氏体的逆相变过程中, 形状记忆因子的演化描述为

$$\eta = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq \varepsilon_{af} \\ \eta'_0 \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_{af}^2}}{\varepsilon_{as} - \varepsilon_{af}} & \varepsilon_{af} < \varepsilon \leq \varepsilon_{as} \\ \eta'_0 & \varepsilon > \varepsilon_{as} \end{cases} \quad (5)$$

式中, η'_0 为逆相变开始时的形状记忆因子, ε_{as} 和 ε_{af} 分别是奥氏体开始应变和奥氏体结束应变。

1.2 温度与临界应变的关系

温度对于应力应变关系的影响主要在于对 SMA 材料临界应力的影响。SMA 材料的马氏体开始应力 σ_{ms} , 马氏体结束应力 σ_{mf} , 奥氏体开始应力 σ_{as} , 以及奥氏体结束应力 σ_{af} 统称为 SMA 临界应力。SMA 的各个临界应力与温度之间的关系如图 2 所示。图中, σ_{scr} 、 σ_{fcr} 为开始临界应力和结束临界应力。 M_s 、 M_f 、 A_s 、 A_f 分别是马氏体开始温度, 马氏体结束温度, 奥氏体开始温度, 奥氏体结束温度。 C_M 、 C_A 是描述相变临界应力和温度之间关系的材料常数。当温度高于马氏体开始温度时, 各临界应力与温度之间的关系可以表示为

$$\sigma_{ms} = \sigma_{scr} + C_M(T - M_s)(T - M_s)_+^0 \quad (6)$$

$$\sigma_{mf} = \sigma_{fcr} + C_M(T - M_s)(T - M_s)_+^0 \quad (7)$$

$$\sigma_{as} = C_A(T - A_s) \quad (8)$$

$$\sigma_{af} = C_A(T - A_f) \quad (9)$$

式中, $(T - M_s)_+^0$ 为跳跃函数, 其含义如下

$$(T - M_s)_+^0 = \begin{cases} 0 & T \leq M_s \\ 1 & T > M_s \end{cases} \quad (10)$$

图 2 临界应力与温度之间的关系

根据临界应力, 可以求得临界应变。观察图 1 可知对于一种形状记忆合金, 其马氏体开始应变和马氏体结束应变是确定的, 分别表示为

$$\varepsilon_{ms} = \frac{\sigma_{ms}}{E_a} \quad (11)$$

$$\varepsilon_{mf} = \frac{\sigma_{mf}}{E_m} + \varepsilon_R \quad (12)$$

卸载过程中, 奥氏体开始应变和奥氏体结束应变是与卸载时的初始记忆因子有关的, 可分别表示为

$$\varepsilon_{as} = \frac{\sigma_{as}}{E_a + \eta'_0(E_m - E_a)} + \eta'_0 \varepsilon_R \quad (13)$$

$$\varepsilon_{af} = \frac{\sigma_{af}}{E_a} \quad (14)$$

2 SMA 梁的力学模型

SMA 梁在加载过程中, 根据截面上的金相组成一般可以分为三个阶段。第一阶段: 截面上的最大应力值小于马氏体开始应力时, 未发生相变, 应力与应变表现为弹性关系, 该截面全部处于奥氏体区; 第二阶段: 当截面上最大应力介于马氏体开始应力和马氏体结束应力时, 部分区域发生相变, 梁截面分为两部分, 内侧部分为奥氏体区, 外侧部分为奥氏体与马氏体混合区; 第三阶段: 当截面上最大应力超过马氏体结束应力时, 有一部分区域相变完成, 梁截面分为三部分, 最内侧一部分为奥氏体区, 中间部分为奥氏体和马氏体混合区, 最外侧部分为马氏体区。

根据 Bernoulli-Euler 梁的假设: 梁在变形前的横截面, 变形后仍保持为平面, 并仍然垂直于变形后的梁轴线。设一梁上的应变分布为

$$\varepsilon(x, y) = y\kappa(x) \quad (15)$$

式中, $\kappa(x)$ 为梁的曲率, 可近似表示为梁中性层位移 w 对坐标 x 的二阶导, 如下式所示

$$\kappa(x) = \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (16)$$

截面上的弯矩表示为

$$M(x) = \int_{-h/2}^{h/2} b\sigma(y)ydy \quad (17)$$

式中, b 、 h 分别为梁截面的宽度和高度。将式(1)和式(15)分别代入式(17)可得梁截面上的弯矩表达式, 如下所示

$$M(x) = 2 \int_0^{h/2} bE[y\kappa(x) - \eta\varepsilon_R]ydy \quad (18)$$

2.1 加载弯矩和曲率的关系式

加载过程中, 梁上某一截面对应的曲率为 $\kappa(x)$, 当梁截面上最大应变小于等于马氏体开始应变时, 梁截面上的应力应变关系为弹性关系, 此时有 $\kappa(x) \leq (2\varepsilon_{ms}/h)$, 根据式(18)可得该阶段下的弯矩为

$$M_L(x) = \frac{1}{12} E_a b h^3 \kappa(x) \quad (19)$$

式中, M_L 为加载时的截面弯矩。当梁截面上最大应变等于马氏体开始应变 ε_{ms} 时, 曲率 $\kappa_{ms} = (2\varepsilon_{ms}/h)$, 称为马氏体开始曲率, 代入式(19)可得弹性阶段下的最大弯矩 M_{ms} , 称为马氏体开始弯矩, 如下所示

$$M_{ms} = \frac{1}{6} \sigma_{max} b h^2 \quad (20)$$

当梁截面上最大应变介于马氏体开始应变和马氏体结束应变之间时, 截面分为两部分, 一部分为未发生相变的奥氏体区, 另一部分为奥氏体与马氏体混合区。此时 $\frac{2\varepsilon_{ms}}{h} < \kappa(x) \leq \frac{2\varepsilon_{mf}}{h}$, 梁上的弯矩由两部分组成, 结合式(15)和式(18)可得此时梁上的弯矩为

$$M_L = \frac{b y_{ms}^3 E_a \kappa(x)}{12} + 2b\kappa(x) \int_{y_{ms}}^{h/2} E y^2 dy - 2b\varepsilon_R \int_{y_{ms}}^{h/2} \eta E y dy \quad (21)$$

式中, y_{ms} 是梁截面上应变等于 ε_{ms} 处的坐标值, 如下所示

$$y_{ms} = \frac{\varepsilon_{ms}}{\kappa(x)} \quad (22)$$

当梁截面上的最大应变等于马氏体结束应变 ε_{mf} 时, 曲率 $\kappa_{mf} = (2\varepsilon_{mf}/h)$, 称为马氏体结束曲率。代入式(21)可得该阶段下的最大弯矩 M_{mf} , 称为马氏体结束弯矩。

当梁截面上最大应变大于马氏体结束应变时,

即 $\kappa(x) > (2\varepsilon_{mf}/h)$, 截面分为三部分, 处于梁截面内部的一部分为奥氏体区, 紧邻奥氏体区的一部分为奥氏体和马氏体混合区, 最外层的一部分是已经完成相变的马氏体区。结合式(15)和式(18)可以求得梁上的弯矩为

$$M_L = \frac{b y_{ms}^3 E_a \kappa(x)}{12} + 2b\kappa(x) \int_{y_{ms}}^{y_{mf}} E y^2 dy - 2b\varepsilon_R \int_{y_{ms}}^{y_{mf}} \eta E y dy + \frac{b E_m \kappa(x)}{3} \left(\frac{h^3}{8} - y_{mf}^3 \right) - \frac{b E_m \varepsilon_R}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_{mf}^2 \right) \quad (23)$$

式中, y_{mf} 是梁截面上应变等于 ε_{mf} 处的坐标值, 如下所示

$$y_{mf} = \frac{\varepsilon_{mf}}{\kappa(x)} \quad (24)$$

2.2 卸载弯矩和曲率的关系式

卸载过程中梁上应力分布较为复杂, 需首先根据卸载的初始状态, 确定梁截面上各点处应力与应变关系。由式(4)可得, 梁从无残余应变状态加载后卸载, 则梁截面上各点卸载过程初始记忆因子为

$$\eta'_0(y) = \begin{cases} 0 & \varepsilon_0(x) \leq \varepsilon_{ms} \\ \frac{\sqrt{\varepsilon_0^2(y) - \varepsilon_{ms}}}{\varepsilon_{mf} - \varepsilon_{ms}} & \varepsilon_{ms} < \varepsilon_0(x) \leq \varepsilon_{mf} \\ 1 & \varepsilon_0(x) \geq \varepsilon_{mf} \end{cases} \quad (25)$$

式中, $\varepsilon_0(y)$ 是卸载开始时的截面上各点的初始应变。对于不同点, ε_{as} 是变化的, 将式(25)代入式(13)可得梁截面上各点对应的奥氏体开始应变

$$\varepsilon_{as}(y) = \frac{\sigma_{as}}{E_a + (E_m - E_a)\eta'_0(y)} + \varepsilon_R \eta'_0(y) \quad (26)$$

将式(25)代入式(5)可得卸载过程中各点的形状记忆因子为

$$\eta_U(y) = \begin{cases} 0 & \varepsilon(y) \leq \varepsilon_{af} \\ \eta'_0(y) \frac{\sqrt{\varepsilon^2(y) - \varepsilon_{af}}}{\varepsilon_{as} - \varepsilon_{af}} & \varepsilon_{as} < \varepsilon(y) \leq \varepsilon_{af} \\ \eta'_0(y) & \varepsilon(y) \geq \varepsilon_{as} \end{cases} \quad (27)$$

结合式(3)和式(27)可得卸载过程中各点的弹性模量为

$$E_U(y) = E_a + \eta_U(y)(E_m - E_a) \quad (28)$$

卸载过程的初始状态一旦确定, 便可求得卸载过程中的 $\eta_U(y)$ 、 $E_U(y)$, 于是可确定各点的应力应变关系曲线。

卸载过程的弯矩与曲率的关系是与卸载初始情况有关的, 不同情况下的弯矩与曲率之间的关系不是唯一的。当卸载初始弯矩大于马氏体开始弯矩

M_{ms} 时, 梁截面上存在部分区域发生相变, 其形状记忆因子大于零。在此情况下, 卸载过程中该截面对应的曲率 $\kappa(x) > \frac{2\varepsilon_{af}}{h}$, 即梁截面上最大应力大于奥氏体结束应力时, 结合式(18)、(27)和(28)可得此时的截面弯矩为

$$M_U = 2 \int_0^{y_{af}} bE_a y^2 \kappa(x) dy + 2 \int_{y_{af}}^{h/2} b y [E_U(y\kappa(x) - \eta_U \varepsilon_R)] dy \quad (29)$$

式中, M_U 为卸载时的弯矩, y_{af} 为梁截面上应变值等于 ε_{af} 处的坐标值, 如下所示

$$y_{af} = \frac{\varepsilon_{af}}{\kappa(x)} \quad (30)$$

当梁截面边缘处的应变等于该点对应的奥氏体开始应变 ε_{as} 时, 此时曲率为 $\kappa_{as} = \frac{2\varepsilon_{as}(0.5h)}{h}$, 称为奥氏体开始曲率, 对应的弯矩称为奥氏体开始弯矩。

随着载荷的减少, 曲率也随之减少, 当截面上最大应力小于等于奥氏体结束应力时, 或者卸载初始时梁截面上弯矩小于马氏体开始弯矩 M_{ms} 时, 梁截面上不存在相变区域, 则此时的截面弯矩为

$$M_U(x) = \frac{1}{12} E_a b h^3 \kappa(x) \quad (31)$$

当梁截面上最大应变等于奥氏体结束应变 σ_{as} 时, 即当梁截面上最大应力值等于奥氏体结束应力 σ_{af} 时, 曲率 $\kappa_{af} = \frac{2\varepsilon_{af}}{h}$, 称为奥氏体结束曲率, 代入式(31)可得弹性阶段下的最大弯矩 M_{af} , 称为奥氏体结束弯矩, 如下所示

$$M_{af} = \frac{1}{6} \sigma_{af} b h^2 \quad (32)$$

式(19)、(21)、(23)、(29)和(31)便是 SMA 梁非线性弯曲过程中弯矩与曲率关系的力学模型, 结合文中所描述的临界参数, 可有效预测 SMA 梁弯曲变形行为。

3 力学模型的求解

由已知梁上弯矩分布求得曲率后, 可根据式(18), 结合边界条件对曲率沿梁的长度进行二次积分可以得到梁的位移函数。然而, 弯矩与曲率之间的关系公式很复杂, 通过弯矩函数直接求曲率函数时会得到复数根, 不便于求解。本节给出了一种利用编程软件方便求解的数值计算方法。

图 3a 为加载过程的求解流程图, 对于梁上任一

截面, 设定曲率 $\kappa(x) \in [0, k]$, 其中 k 为一较大的值。求解流程如下。

(1) 根据式(19)、(21)和(23), 由曲率求得对应的弯矩, 得出弯矩-曲率曲线。

(2) 根据实际载荷可知梁上弯矩分布, 对前面求得的弯矩-曲率曲线插值可得出对应的梁上曲率分布。

(3) 利用特定函数拟合得出梁上的曲率分布函数, 可利用三角函数或者多项式进行拟合。

(4) 根据边界条件, 对曲率函数进行一次积分可求得梁的转角, 再次积分可求得梁的位移。

(a) 加载过程求解流程

(b) 卸载过程求解流程

图 3 SMA 梁求解流程

图 3b 为卸载过程求解流程图, 某一时刻下梁位移的求解过程如下。

(1) 根据卸载初始状态求得梁任一截面初始记忆因子的分布, 进而求各点的 ε_{as} , 此时可确定各点的卸载时应力应变关系。

(2) 根据式(29)和式(31)得出各截面对应的弯矩-曲率曲线。

(3) 根据卸载时的梁上弯矩分布, 对求得的弯矩-曲率曲线插值可得出对应的梁上曲率分布, 并利用特定函数拟合得出梁上的曲率分布函数。

(4) 根据边界条件, 对曲率函数进行一次积分可求得梁的转角, 再次积分可求得梁的位移。

利用前述的流程进行编程, 便可求得形状记忆合金梁加卸载过程中的响应, 对曲线的插值与拟合可利用 Matlab 等软件进行。

4 算例分析

分别选取纯弯曲 SMA 简支梁与受均布载荷 SMA 简支梁进行分析, 梁截面为矩形, 宽度和高度均为 10 mm, 梁长为 100 mm。采用的 SMA 材料属性如表 1 所示^[23]。 E_a 和 E_m 分别为奥氏体和马氏体的弹性模量, M_s 、 M_f 、 A_s 和 A_f 分别是马氏体开始温度、马氏体结束温度、奥氏体开始温度和奥氏体结束温度。 ε_R 和 μ 分别是最大残余应变和泊松比, C_M 、 C_A 是描述相变临界应力和温度之间关系的材料常数。 σ_{ms} 、 σ_{mf} 、 σ_{as} 和 σ_{af} 分别是马氏体开始应力、马氏体结束应力、奥氏体开始应力和奥氏体结束应力。

表 1 SMA 材料参数

参数	数值
奥氏体弹性模量 E_a /GPa	67
马氏体弹性模量 E_m /GPa	26.3
开始临界应力 σ_{scr} /MPa	100
结束临界应力 σ_{fer} /MPa	170
最大残余应变 ε_R	0.067
泊松比 μ	0.33
比例常数 C_a /(MPa · K ⁻¹)	13.8
比例常数 C_m /(MPa · K ⁻¹)	8
马氏体结束温度 M_f /K	282
马氏体开始温度 M_s /K	291.4
奥氏体开始温度 A_s /K	307.5
奥氏体结束温度 A_f /K	322

4.1 纯弯曲 SMA 梁

如图 4 所示的 SMA 简支梁, b 和 h 均为 10 mm, 梁长 L 为 100 mm, 左右两端受到弯矩 M 的作用。图 5 为温度取 330 K 时弯矩与曲率之间的关系曲线图, 包括三个加卸载过程, 曲率最大值分别取为 20 m^{-1} 、 14 m^{-1} 、 8 m^{-1} 。由图 5 可知, 一个加卸载过程中弯矩-曲率曲线形成滞回环, 形状与图 1 所示 SMA 材料的应力-应变曲线相似, 这是由于超弹性 SMA 在加载过程中由应力诱发马氏体相变形成的马氏体是不稳定的, 在卸载过程中发生马氏体逆相变形成稳定的奥氏体。同时可以看出, 各个情况下的临界弯矩是固定的, 但卸载时的临界曲率是根据卸载初始条件而改变的。对于最大曲率为 20 m^{-1}

的情况, 当曲率增加到 18.18 m^{-1} 时, 弯矩随曲率变化的速度在小范围内不断增加, 这是由于此时梁截面最外侧相变完成, 相变区域开始朝中性层方向移动。图 6 为 SMA 梁($T=330 \text{ K}$)、假定不发生相变的纯奥氏体弹性梁和纯马氏体弹性梁上截面弯矩与梁上最大挠度之间的关系曲线, 比较三条曲线可知: 由于相变应变的存在, SMA 梁能够产生远大于一般弹性梁的可恢复变形。

图 4 SMA 纯弯曲简支梁示意图

图 5 弯矩与曲率关系曲线($T=330 \text{ K}$)

图 6 弯矩与最大挠度曲线图

图 7 所示为不同温度下弯矩与曲率之间的关系曲线, 加载时最大曲率为 20 m^{-1} 。 $T=300 \text{ K}$ 时, 卸载完成后大部分变形未回复, 这是由于温度小于奥氏体开始温度, SMA 表现出形状记忆效应, 卸载时仅有弹性应变恢复, 相变应变未恢复; $T=330 \text{ K}$ 时, 卸载后变形全部回复, 这是由于温度大于奥氏体结束温度, SMA 表现出超弹性, 卸载时, 奥氏体全部转化为马氏体; $T=315 \text{ K}$ 时, 温度介于奥氏体开始

温度和奥氏体结束温度之间, SMA 同时表现出形状记忆效应和超弹性, 卸载完成后, 有部分相变应变未恢复。

图7 不同温度下弯矩与曲率关系曲线

图8为温度为330 K时加卸载过程中不同时刻截面上受拉一侧应力沿横向坐标的分布, 曲线横坐标为 y 坐标的绝对值。图8a为加载过程中曲率分别为 1 m^{-1} 、 9 m^{-1} 、 18 m^{-1} 时的应力分布, 曲率较小时, 截面上各点均未发生相变, 应力沿梁截面弹性分布; 曲率为 9 m^{-1} 时, 梁截面分为两部分, 一部分为未发生相变的奥氏体区, 一部分为正在相变的奥氏体与马氏体混合区; 当曲率为 18 m^{-1} 时, 从图

(a) 加载过程不同时刻截面应力分布

(b) 卸载过程不同时刻截面应力分布

图8 加卸载过程不同时刻截面上应力分布($T=330 \text{ K}$)

中可以看出, 截面分为三部分, 一是未发生相变的奥氏体区, 二是正在相变的奥氏体与马氏体混合区, 三是相变完成的马氏体区。

图8b所示为卸载过程中不同时刻的应力分布, 初始曲率为 18 m^{-1} , 分别取卸载过程中的曲率为 17 m^{-1} 、 13 m^{-1} 、 9 m^{-1} 、 1 m^{-1} 。由图8b可知, 在初始卸载时, 应力分布曲线有小幅度的凹陷, 这是由于梁截面上各点卸载初始情况不同, 外侧部分应变减小幅度大, 但由于发生了相变, 导致弹性模量较小, 应力减小速度较小, 导致卸载过程中的应力变化不均匀。当外力卸载到一定程度时, 应力分布曲线的外侧部分呈现出显著的平台, 此时外侧马氏体部分开始逆相变为奥氏体。随着卸载不断进行, 应力分布曲线上的拐点不断向外侧移动, 平台值不断降低, 最终该曲线将变成一条直线, 此时梁上马氏体已全部逆相变为奥氏体。

4.2 受均布载荷 SMA 梁

图9所示为受均布载荷的 SMA 简支梁, b 和 h 均为 10 mm , 梁长 L 为 100 mm , 载荷大小为 q 。图10、图11和图12分别为不同载荷下梁上各点曲率、位移曲线和记忆因子的分布, q 分别取为 80 kN/m 、 90 kN/m 、 100 kN/m 和 110 kN/m 。由图中可以看出, 当曲率较小时, 即载荷较小时, SMA 梁未发生相变, 此阶段为弹性变形阶段, 曲率曲线和位移曲线均较为平滑, 梁上记忆因子均为零。当载荷增加到 90 kN/m 时, 梁中间部分的曲率曲线有一部分凸起, 从图12可以看出这是由于梁中间部分发生了相变, 产生了相变应变, 导致曲率增加了较大的幅值。随着载荷不断的增加, SMA 梁上曲率分布曲线的凸起区域不断扩大, 载荷达到 110 kN/m 时, 曲率曲线上出现了相对平缓的部分, 并有不断向外扩展的趋势, 从图11可以看出载荷从 100 kN/m 增加到 110 kN/m 时位移增加的幅值小于载荷从 90 kN/m 增加到 100 kN/m 时位移增加的幅值, 这是由于载荷达到一定程度时, 梁中间部分外侧区域相变完成, 该部分截面曲率变化放缓, 随着载荷增加, 相变区域不断向左右两端扩展, 如图12所示。

图9 受均布载荷的 SMA 简支梁

图 10 不同载荷下曲率沿梁长的分布

图 11 不同载荷下的 SMA 梁位移

图 12 不同载荷下记忆因子云图

5 结论

根据现有 SMA 分段线性模型, 提出一种形式简单、物理意义明确且能反应 SMA 在热-机载荷下力学行为的分段线性模型, 主要结论归纳如下。

(1) 基于 Bernoulli-Euler 梁理论, 利用 SMA 分段线性模型, 建立 SMA 梁非线性弯曲过程中弯矩与曲率关系的力学模型。

(2) 根据 SMA 梁力学模型, 得出弯矩-曲率曲线, 利用插值方法求得曲率函数, 进而积分可得到位移曲线。

(3) 结合 SMA 梁力学模型, 分别对纯弯曲和受均布载荷的简支梁进行了数值求解, 分析梁截面上应力分布、弯矩与挠度关系、记忆因子的变化等。

(4) 建立的 SMA 分段线性模型能有效描述热-机载荷下 SMA 的力学行为, 可建立简单有效的 SMA 结构的力学模型, 更便于工程应用和理论分析。

参 考 文 献

- [1] OTSUKA K, REN X. Physical metallurgy of Ti-Ni-based shapememory alloys[J]. Progress in Materials Science, 2005, 50(5): 511-678.
- [2] MOHD JANI J, LEARY M, SUBIC A, et al. A review of shape memory alloy research, applications and opportunities[J]. Materials & Design, 2014, 56: 1078-1113.
- [3] BIRMAN V. Review of mechanics of shape memory alloy structures[J]. Applied Mechanics Reviews, 1997, 50(11): 1-11.
- [4] SHI Zhenyun, WANG Tianmiao, LIU Da, et al. A fuzzy PID-controlled SMA actuator for a two-DOF joint[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2014, 27(2): 453-460.
- [5] WANG Wei, FANG Cheng, YANG Xiao, et al. Innovative use of a shape memory alloy ring spring system for self-centering connections[J]. Engineering Structures, 2017, 153: 503-515.
- [6] BUCCHI F, ELAHINIA M, FORTE P, et al. A passive magneto-thermo-mechanical coupling actuated by SMA springs and mr fluid[J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2014, 14(8): 1440031.
- [7] 袁发鹏, 黄金. 形状记忆合金温控开关驱动特性分析及试验[J]. 现代制造工程, 2018, 3(5): 23-28.
- [8] 于东, 张博明, 金龙学, 等. 形状记忆合金旋转驱动器结构设计方法[J]. 机械工程学报, 2010, 46(14): 91-94.
- [9] YU Dong, ZHANG Boming, JIN Longxue, et al. Structural design method of rotation gear actuated by shape memory alloys[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(14): 91-94.
- [10] ZHOU Bo. A macroscopic constitutive model of shape memory alloy considering plasticity[J]. Mechanics of Materials, 2012, 48: 71-81.
- [10] RIZZONI R, MARFIA S. A thermodynamical formulation for the constitutive modeling of a shape memory

- alloy with two martensite phases[J]. *Meccanica*, 2015, 50(4): 1121-1145.
- [11] LAGOUDAS D C, ENTCHEV P B. Modeling of transformation-induced plasticity and its effect on the behavior of porous shape memory alloys. Part I: constitutive model for fully dense SMAs[J]. *Mechanics of Materials*, 2004, 36(9): 865-892.
- [12] SAKHAEI A H, LIM K M, TURTELTAUB S. Thermomechanical discrete dislocation-transformation model of single-crystal shape memory alloy[J]. *Mechanics of Materials*, 2016, 97: 1-18.
- [13] AURICCHIO F, TAYLOR R L. Shape-memory alloys: modelling and numerical simulations of the finite-strain superelastic behavior[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1997, 143(1-2): 175-194.
- [14] VIET N V, ZAKI W, UMER R. Bending models for superelastic shape memory alloy laminated composite cantilever beams with elastic core layer[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2018: S1359836817341744.
- [15] DE AGUIAR R A A, CARDOSO D C L N W, SAVI M A, et al. Shape memory alloy helical springs performance: modeling and experimental analysis[J]. *Materials Science Forum*, 2013, 758: 147-156.
- [16] SHIAU L C, KUO S Y, CHANG S Y. Free vibration of buckled SMA reinforced composite laminates[J]. *Composite Structures*, 2011, 93(11): 2678-2684.
- [17] 康泽天, 周博, 薛世峰. 形状记忆合金管接头热机耦合行为的有限元数值模拟[J]. *机械工程学报*, 2018, 54(18): 68-75.
KANG Zetian, ZHOU Bo, XUE Shifeng. Finite element numerical simulation on thermo-mechanical coupling behavior in shape memory alloy pipe connection[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2018, 54(18): 68-79.
- [18] MORADI S, ALAM S M. Feasibility study of utilizing superelastic shape memory alloy plates in steel beam-column connections for improved seismic performance[J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2015, 26(4): 463-475.
- [19] 郑继周, 张艳. 形状记忆合金超弹性分段线性模型及其阻尼特性[J]. *振动与冲击*, 2012, 31(3): 136-140.
ZHENG Jizhou, ZHANG Yan. Piecewise linear model of shape memory alloy and its damping characteristics[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, 31(3): 136-140.
- [20] 周博, 王志勇, 薛世峰. 形状记忆合金超弹性螺旋弹簧的力学模型[J]. *机械工程学报*, 2019, 55(8): 56-64.
ZHOU Bo, WANG Zhiyong, XUE Shifeng. Mechanical model for super-elastic helical spring of shape memory alloy[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2019, 55(8): 56-64.
- [21] ESHGHINEJAD A, ELAHINIA M. Exact solution for bending of shape memory alloy beams[J]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2015, 22(10): 829-838.
- [22] 杨静宁, 王吉昌, 马连生. 热-机载荷下形状记忆合金梁变形特性的研究[J]. *稀有金属*, 2018, 42(10): 1032-1039.
YANG Jingning, WANG Jichang, MA Liansheng. Deformation characteristics of shape memory alloy beam under thermal and mechanical loads[J]. *Chinese Journal of Rare Metals*, 2018, 42(10): 1032-1039.
- [23] BRINSON L C. One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable[J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1993, 4(2): 229-242.
- [24] ZHOU Bo, KANG Zetian, WANG Zhiyong, et al. Finite element method on shape memory alloy structure and its applications[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2019, 32: 84.

作者简介: 周博(通信作者), 男, 1972 年出生, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为智能材料与结构、油气工程力学、微尺度材料力学等。
E-mail: zhoubo@upc.edu.cn
王志勇, 男, 1993 年出生。主要研究方向为智能材料与结构。
薛世峰, 男, 1963 年出生, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为断裂力学、油气工程力学、计算力学等。