DOI: 10.3901/JME.2020.12.009

基于细化共振法辨识纤维增强复合薄板的非线性阻尼^{*}

李 晖 常永乐 韩清凯 闻邦椿

(1. 东北大学机械工程与自动化学院 沈阳 110819;

2. 东北大学航空动力装备振动及控制教育部重点实验室 沈阳 110819)

摘要: 从频域细化角度, 提出了细化共振法来准确辨识纤维增强复合薄板的非线性阻尼参数。首先, 基于频率细化法和共振法理论, 重新推导具有振幅依赖的复合薄板结构非线性阻尼的表达式, 明确从频域测试角度获取非线性阻尼参数的理论原理。然后, 通过仿真信号算例, 验证了该方法的正确性, 并讨论了频率分辨率和细化倍数对阻尼辨识精度的影响。最后, 总结并概括出一套合理、规范的阻尼辨识流程, 并对 TC500 碳纤维/树脂基复合薄板进行实际测试。研究发现, 利用该方法可定量评价具有振幅依赖特点的复合薄板的非线性阻尼, 且随着激励幅度的增大, 其阻尼特性呈现逐步增大的趋势。

关键词: 纤维增强复合薄板; 非线性阻尼; 频域测试; 振幅依赖性; 细化共振法

中图分类号: TB53

Identification of Nonlinear Damping of Fiber-reinforced Composite Thin Plate with Vibration Amplitude Dependent Characteristics Based on Refined Resonance Method

LI Hui CHANG Yongle HAN Qingkai WEN Bangchun

(1. School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819;

2. Key Laboratory of Vibration and Control of Aero-Propulsion Systems, Ministry of Education, Northeastern University, Shenyang 110819)

Abstract: From the frequency refinement perspective, the refined resonance method is proposed to accurately identify the nonlinear damping parameters of fiber-reinforced composite thin plates. Firstly, based on frequency refining technique and resonance method theory, the expression of nonlinear damping of the composite plate with amplitude dependence is derived, and the theoretical principles of acquiring such nonlinear damping from the frequency-domain measurement are clarified. Then, the correctness of such method is verified by taking a simulation signal as an example, and the influences of frequency resolution and refining multiple on damping identification accuracy are discussed. Finally, a reasonable and standard test procedure is summarized and applied on the real measurement of TC500 carbon fiber/resin composite thin plate. It has been found that the proposed method can be used to quantitatively evaluate nonlinear damping of composite thin plate structure with amplitude dependent characteristics. And as the excitation amplitude increases, its damping property shows a gradually rising tendency.

Key words: fiber-reinforced composite thin plate; nonlinear damping; frequency-domain test; amplitude dependence; refined resonance method

^{*} 国家自然科学基金(51505070, 51535082, U1708257)、中央高校基本科研业务费专项资金(N160313002, N160312001, N170302001, N180302004, N180703018, N180312012, N180313006)和装备预研重点实验室基金(6142905192512)资助项目。20190606 收到初稿, 20191029 收到修改稿

0 前言

纤维增强复合薄板由于具有优异的力学和减重性能,而被广泛应用于航空航天等工业领域^[1-2],例如,航发风扇段复合材料叶片、空间站太阳翼、飞机机翼等。由于该类型结构经常服役在振动、冲击、热环境等复杂工况下,由此产生的振动超标、分层损伤、疲劳失效等问题也越来越突出^[3-6]。同时,由于该材料具有显著的各向异性、层合性、非均匀性等特征,导致其宏观薄板结构件还会在刚度及阻尼性能上表现出明显的非线性现象^[7]。例如,其固有频率会呈现出软式刚度非线性特征,其阻尼参数也受到外界激励幅度及频率变化的影响^[8]。上述非线性特征给传统以线性等效为主的振动测试技术,带来了很大的困难与挑战。

目前,国内外学者已经在纤维增强复合材料梁、板结构的线性及非线性阻尼测试方面,开展了大量研究。在国外方面,最早可追溯至 1968 年, SCHULTZ 等^[9]对玻璃纤维/树脂复合梁结构的阻尼性能进行了测试,发现其阻尼具有明显的频率依赖性。1989 年, WOLFENDEN^[10-11]对纤维/铝基复合梁的阻尼非线性问题进行了测试,发现该类型结构的阻尼随应变幅值的增大而增大,且短纤维材料结构相对于长纤维结构具有更明显的振幅依赖性。2003 年, CRANE 等^[12]通过自主开发的脉冲振动激励平台,测试并辨识了三类复合梁试件的损耗因子,发现 90° 纤维复合梁相对于 0° 纤维复合梁,具有更优异的阻尼性能。同年, KOSTOPOULOS 等^[13]通过自由振动衰减法测试了碳纤维/树脂复合梁的前 4 阶固有频率和阻尼比,发现其阻尼与激振频率呈现非线性的依赖关系。2004 年, BERTHELOT 等^[14]利用锤击法测试获得芳纶、玻璃两种纤维复合梁的频响函数,并对模态损耗因子等参数进行了辨识。2004 年, MATTER 等^[15]设计搭建了非接触式声激励测试平台,并利用该平台获得了复合板结构在自由边界下的固有频率和阻尼等参数。2015 年, IRIONDO 等^[16]通过半功率带宽法测试获得了玻璃纤维/铝基复合薄板的阻尼比,发现其阻尼性能会随着外激励频率的增加而增大。另外,在国内方面,1992 年,黎大志等^[18]研究了碳/环氧树脂复合梁结构的阻尼测试方法,并认为在自由边界条件下采用非接触测振方式开展阻尼测试的试验效果最佳。2012 年,李瑞杰等^[17]通过测试获得了复合梁结构的大量振动数据,并研究了基体材料组分和纤维方向对结构阻尼性能的影响。2013 年, CHEN^[19]利用缓慢扫频测试技术,

获得了简支边界条件碳纤维/树脂复合薄板的振动响应频谱,并调研了激励幅度对结构系统的硬式、软式刚度非线性和阻尼性能的影响。2014 年,杨云昭等^[20]测试了国产 JHT300-3K 和 MT300-3K 碳纤维梁的阻尼性能,发现其损耗因子会随着铺层角度的增大而增大,并且还调研了激励频率对损耗因子的非线性影响。

尽管广大学者和研究人员针对纤维增强复合薄板及梁结构的阻尼特性,从时、频域测振角度开展了大量研究,但绝大多数是从线性测试角度来辨识其阻尼,对具有振幅依赖的该类型复合结构系统非线性阻尼开展试验研究的相对较少。因此,有必要继续研究其非线性阻尼特性的测试方法,特别是在如何提高阻尼辨识精度的问题上投入更大精力,以便可以准确地掌握复合材料结构系统的非线性振动机理。本文利用了共振法激励能量充足、激振力可控,且可较好地排除模态耦合现象干扰的优势,从频域细化角度,提出了细化共振法来准确获取纤维增强复合薄板的非线性阻尼参数。首先,基于频率细化法和共振法理论,重新推导了具有振幅依赖的复合结构系统非线性阻尼的表达式,明确了从频域测试角度获取非线性阻尼参数的理论原理。然后,编写了 Matlab 算法,并用仿真信号算例证明了频率细化算法的正确性。最后,利用所提出的测试流程,对 TC500 碳纤维/树脂基复合薄板的非线性阻尼进行了实际测试。实践证明,利用所提出的方法可有效获得复合薄板在不同激励幅度下的非线性阻尼参数,该方法可以用来定量评价具有振幅依赖特点的复合薄板的非线性阻尼特性。

1 基于细化共振法获取具有振幅依赖的复合薄板非线性阻尼的理论原理

本节给出了基于细化共振法获取具有振幅依赖的纤维增强复合薄板阻尼的理论原理,并通过一个仿真信号算例,证明了该方法的正确性。

1.1 基于共振法获取具有振幅依赖的复合薄板非线性阻尼的理论原理

图 1 为由纤维增强材料和基体材料组成的复合薄板的理论模型,假设其在基础激励载荷 $y(t)$ 作用下而产生振动,首先,将其中面作为参考平面,并建立 xoy 坐标系。纤维方向与整体坐标系 x 轴方向的夹角为 θ ,板长为 a ,板宽为 b ,板厚为 h ,每一层位于 z 坐标轴较低表面 h_{k-1} 和较高表面 h_k 之间,每层的厚度均相同,共有 n 层。图中的 1, 2, 3 代表纤维的纵向、横向和垂直于 1-2 平面的方向。假

设平行纤维方向的弹性模量为 E_1 , 垂直纤维方向的弹性模量为 E_2 , 1-2 平面内的剪切弹性模量为 G_{12} , ν_{12} 和 ν_{21} 分别为相应的泊松比。

图 1 纤维增强复合薄板理论模型

复合薄板的位移场可表示为

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= -z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= -z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (1)$$

式中, u 、 v 、 w 代表板内任一响应点 $B(x_1, y_1)$ 的位移; w_0 为中面位移, h 为板的厚度, t 为时间。

假设结构的第 k 层层应力-应变关系为

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}^{(k)} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix}^{(k)} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22} \sin^4 \theta_k \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{12} (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22} \cos^4 \theta_k \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta_k \cos \theta_k \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta_k \cos \theta_k + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{66} (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k) \\ Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & Q_{66} &= G_{12} & \nu_{21} &= \nu_{12} \frac{E_2}{E_1} \end{aligned} \right. \quad (3)$$

式中, k 表示第 k 层, θ_k 表示第 k 层板的纤维方向

与 x 轴的夹角。

同时, 将获得的中面位移公式(1), 应变、应力公式(2)代入薄板弯曲振动的动能和应变能公式中, 可得到用中面位移 w_0 表示的动能和应变能

$$E_c = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left[z^2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dA dz \quad (4)$$

$$\begin{aligned} U_d &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \left[\bar{Q}_{11} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2\bar{Q}_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 4\bar{Q}_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \bar{Q}_{22} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4\bar{Q}_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + 4\bar{Q}_{66} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dA dz \end{aligned} \quad (5)$$

根据 Ritz 法, 中面位移可以表示成如下形式

$$w_0 = W_{mn}(x, y) \sin(\omega t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} P_m(\xi) P_n(\eta) \sin(\omega t) \quad (6)$$

式中, $W_{mn}(x, y)$ 为振型函数。 c_{mn} 是待定参数, $P_m(\xi)$ 和 $P_n(\eta)$ 是基函数, ω 是固有圆频率, M 、 N 为截断项数。

对满足边界条件的多项式函数进行正交化处理, 可获得

$$\begin{aligned} P_1(\zeta) &= \chi(\zeta), P_1(\eta) = \kappa(\eta) \\ P_2(\zeta) &= (\zeta - H_2) P_1(\zeta) \\ P_k(\zeta) &= (\zeta - H_k) P_{k-1}(\zeta) - C_k P_{k-2}(\zeta) \\ \zeta &= \xi, \eta & k > 2 \end{aligned} \quad (7)$$

式中, H_k 和 C_k 为系数函数, 其表达式分别为

$$\left\{ \begin{aligned} H_k &= \frac{\int_0^1 W(\zeta) [P_{k-1}(\zeta)]^2 \zeta d\zeta}{\int_0^1 W(\zeta) [P_{k-1}(\zeta)]^2 d\zeta} \\ C_k &= \frac{\int_0^1 W(\zeta) P_{k-1}(\zeta) P_{k-2}(\zeta) \zeta d\zeta}{\int_0^1 W(\zeta) [P_{k-2}(\zeta)]^2 d\zeta} \end{aligned} \right. \quad \zeta = \xi, \eta \quad (8)$$

式中, $W(\zeta)$ 是权函数, 通常取 $W(\zeta) = 1$ 。而 $\chi(\zeta)$ 和 $\kappa(\eta)$ 是满足固支、简支、自由等边界条件的多项式函数, 且具有如下的形式

$$\left\{ \begin{aligned} \chi \eta &= \xi^p (1 - \xi)^q & \kappa(\eta) &= \eta^r (1 - \eta)^u \\ \xi &= x/a & \eta &= y/b \end{aligned} \right. \quad (9)$$

以求解悬臂边界复合薄板的固有特性为例, 可取 $p = 2$, $r = 0$, $q = 0$, $u = 0$ 。然后, 将式(6)代

入能量方程式(4)、式(5)中, 并令 $\sin(\omega t)=1$ 和 $\cos(\omega t)=1$, 可得到最大应变能 $U_d^{\max}$ 和最大动能 $E_c^{\max}$ 的表达式。

然后, 将能量函数 Γ 表示为

$$\Gamma = E_c^{\max} - U_d^{\max} \quad (10)$$

为了求解复合薄板的固有特性问题, 需要获得

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial c_{mn}} = 0 \quad m=1,2,\dots,M \quad n=1,2,\dots,N \quad (11)$$

将式(10)代入式(11)中, 可得到下列特征值问题

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{q} = 0 \quad (12)$$

式中, $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{M}$ 分别刚度矩阵和质量矩阵, $\mathbf{q} = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{mn})^T$, $\mathbf{q}$ 为特征矢量。

为保证式(12)有解, 需要其行列式为 0, 即

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (13)$$

这样, 就可以求得其各阶模态的固有圆频率 ω_{mn} 。在式(6)中, M 、 N 取值越大, 则 ω_{mn} 的计算结果就越精确, 通常取 $M=N=8$ [21]。

接着, 根据式(14)将固有圆频率 ω_{mn} 转化为工程测试中常用的固有频率 f_{mn} 形式

$$f_{mn} = \frac{\omega_{mn}}{2\pi} \quad (14)$$

将计算获得的 ω_{mn} 及其特征矢量, 代回到式(6)中, 可获得复合薄板的振型函数 $W_{mn}(x, y)$ 。同时, 带入响应点 B 处的位置坐标, 便可获得任一响应点 B 处对应的振型值 $W_{mn}(x_1, y_1)$ 。

假设基础振动激励的表达式为

$$y(t) = Y \sin \Omega t \quad (15)$$

式中, Y 和 Ω 为激励幅值和频率。

进一步, 可将基础振动激励 $y(t)$ 看作惯性力载荷 $q(t)$

$$q(t) = -\rho h \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \rho h Y \Omega^2 \sin \Omega t \quad (16)$$

参考文献[22], 可到 $q(t)$ 作用下结构的振动微分方程为

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + \lambda \frac{\partial w_0}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = q \end{aligned} \quad (17)$$

式中, λ 为等效黏性阻尼系数, D_{11} 、 D_{12} 、 D_{22} 、 D_{66} 为弯曲刚度系数, 其表达式为

$$D_{\beta j} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{\beta j})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad \beta, j=1,2,6 \quad (18)$$

假设小阻尼情况下, 对其在基础激励下的响应进行求解。只要求得薄板强迫振动微分方程式(17)

中的中面挠曲函数 w_0 , 即可获得复合薄板上任意一点的响应。这里按振型叠加法求解受外载作用下悬臂复合薄板的中面挠曲函数表达式。设薄板的固有频率为 ω_{mn} , 相应的各阶振型为 $W_{mn}(x, y)$, $m, n=1,2,3,\dots$, 则挠曲函数表达式为

$$w_0(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(x, y) T_{mn}(t) \quad (19)$$

式中, T_{mn} 为各阶振型分量。将式(19)代入式(17)中, 得

$$\begin{aligned} D_{11} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn} \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn} \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ D_{22} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn} \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial y^4} + \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{mn} W_{mn} \frac{dT_{mn}}{dt} + \rho h \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \frac{d^2 T_{mn}}{dt^2} = q \end{aligned} \quad (20)$$

根据位移变分原理, 振型 W_{mn} 需要满足振型方程, 即满足下列表达式

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ D_{22} \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial y^4} = \rho h (\omega_{mn})^2 W_{mn} \end{aligned} \quad (21)$$

将式(21)代入式(20)中, 化简得

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho h}{W_{mn}} \frac{d^2 T_{mn}}{dt^2} + \frac{\lambda_{mn}}{W_{mn}} \frac{dT_{mn}}{dt} + \right. \\ \left. \frac{\rho h T_{mn} (\omega_{mn})^2}{W_{mn}} \right) = q \end{aligned} \quad (22)$$

将式(22)左右同时乘以 $W_{mn}(x, y)$, $m, n=1,2,3,\dots$, 并沿 x - y 面积分, 化简可得 $T_{mn}(t)$ 的独立方程为

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_{mn}(t)}{dt^2} + 2\zeta_{mn} \omega_{mn} \frac{dT_{mn}}{dt} + \\ (\omega_{mn})^2 T_{mn}(t) = \frac{\iint_s q W_{mn}(x, y) ds}{\iint_s \rho h (W_{mn}(x, y))^2 ds} \end{aligned} \quad (23)$$

式中, ζ_{mn} 为复合薄板的某阶模态阻尼比, 其表达式为

$$\zeta_{mn} = \frac{\lambda_{mn}}{2\rho h \omega_{mn}} \quad (24)$$

求解二阶常系数非齐次微分方程式(23), 即可获得各阶振型分量表达式为

$$T_{mn} = \frac{Y \Omega^2 \iint_s W_{mn} ds \sin(\Omega t - h_m)}{\sqrt{((\omega_{mn})^2 - \Omega^2)^2 + (2\zeta_{mn} \Omega \omega_{mn})^2} \iint_s (W_{mn})^2 ds} \quad (25)$$

式中, 相位 h_m 可表示为

$$\tan h_m = \frac{2\zeta_{mn}\Omega\omega_{mn}}{(\omega_{mn})^2 - \Omega^2} \quad (26)$$

将式(25)代入式(19)中, 可得到基础激励下纤维增强复合薄板的振动响应为

$$w_0(x, y, t) = \frac{W_{mn} Y \Omega^2 \iint_s W_{mn} ds \sin(\Omega t - h_m)}{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{((\omega_{mn})^2 - \Omega^2)^2 + (2\zeta_{mn}\Omega\omega_{mn})^2} \iint_s (W_{mn})^2 ds} \quad (27)$$

由于共振激励时, 基础激励频率 $\Omega = \omega_{mn}$, 可以对式(27)进行化简, 获得复合薄板在任一响应点 B 对应的某阶共振响应幅值 A_{mn} 的表达式为

$$A_{mn} = \left| \frac{Y \iint_s W_{mn}(x, y) ds}{2\zeta_{mn} \iint_s [W_{mn}(x, y)]^2 ds} W_{mn}(x_1, y_1) \right| \quad (28)$$

由于基础激励幅值 Y 为正值, 可对式(28)做简化处理, 并提取 ζ_{mn} 到等式的左端, 便可获得基础激励下具有振幅依赖的复合薄板非线性阻尼 ζ_{mn} 的表达式为

$$\zeta_{mn} = \left| \frac{Y \iint_s W_{mn}(x, y) ds}{2A_{mn} \iint_s [W_{mn}(x, y)]^2 ds} W_{mn}(x_1, y_1) \right| \quad (29)$$

1.2 基于频率细化技术的复合薄板共振响应幅值和阻尼参数的辨识

通过对式(29)分析可知, 在确定的激励幅度下, 纤维增强复合薄板的阻尼结果 ζ_{mn} 则与响应点 B 的共振响应幅值 A_{mn} 密切相关, 如果在测试实践中, 共振响应幅值获取不准确, 就将会对阻尼结果造成很大的误差。因此, 有必要通过细化共振法来准确获取复合薄板在某阶固有频率 f_{mn} 处的共振响应幅值 A_{mn} 。

在通过扫频测试方法获取复合薄板的各阶固有频率时, 假设对于采样频率为 f_s , 频率分辨率为 Δf , 采样总点数为 I 的扫频时间序列信号 s_i , 其傅立叶级数可表示为

$$S_i = \sum_{\mu=1}^{i-1} (S_R(\mu) \cos(2\pi\mu i / I) + S_L(\mu) \sin(2\pi\mu i / I)) \quad i = 0, 1, \dots, I-1 \quad (30)$$

式中, $S_R(\mu)$ 和 $S_L(\mu)$ 是经过傅里叶变化后, 扫频信号对应频率序列的实部和虚部, 其表达式为

$$\begin{cases} S_R(\mu) = \frac{2}{I} \sum_{i=1}^{I-1} S_i \cos(2\pi\mu i / I) \\ S_L(\mu) = \frac{2}{I} \sum_{i=1}^{I-1} S_i \sin(2\pi\mu i / I) \end{cases} \quad (31)$$

式中, 第 μ 个采样数据点的取值范围为 $\mu = 0, 1, \dots, I/2 - 1$ 。

事实上, 通过采样定理可知, s_i 中会包含有 $[0 \sim f_s/2]$ 频段内的连续信号。因此, 若把式(31)中的 μ 看作在 $[0 \leq \mu \leq I/2]$ 区间上具有连续变化特点的实数 f ($0 \leq f \leq f_s/2$), 则可将式(31)变成

$$\begin{cases} S_R(\mu) = \frac{2}{I} \sum_{i=1}^{I-1} S_i \cos(2\pi\mu f / f_s) \\ S_L(\mu) = \frac{2}{I} \sum_{i=1}^{I-1} S_i \sin(2\pi\mu f / f_s) \end{cases} \quad (32)$$

对式(32)分析可知, 由于 f 是一个连续的频率变量, 此时频率分辨率已不受采样总点数 I 的限制。但由于实际计算时只能获得离散频谱, 需要对包含某阶固有频率 f_{mn} 的扫频区间 $f_1 \leq f_{mn} \leq f_2$ 做细化处理, 设定细化倍数为 Φ , 则细化后频率分辨率 $\Delta f'$ 为

$$\Delta f' = \Delta f / \Phi \quad (33)$$

细化的计算频率序列为

$$[f_1, f_1 + \Delta f', f_1 + 2\Delta f', f_1 + 3\Delta f', \dots, f_2] \quad (34)$$

由此可知, 通过频率细化处理后, 频率分辨率就可以大大提高, 接着利用式(32), 来求得扫频时间序列信号 s_i 所需对应的频率序列, 则可更加准确地辨识复合薄板的固有频率 f_{mn} 。然后, 以 f_{mn} 对复合薄板进行共振激励, 就可得到更加准确的共振响应幅值 A_{mn} 。

最后, 将通过频率细化技术准确获取的 A_{mn} , 并连同测试获得的基础激励幅值 Y 和响应 B 点处的振型函数 $W_{mn}(x_1, y_1)$ 及其积分结果带入式(29), 即可求得某激励幅度下复合薄板的某阶阻尼结果。改变基础激励幅度 Y , 重复利用过频率细化和共振激励技术, 则可依次获得多个激励幅度下的共振响应幅值, 通过式(29)进行反复计算, 便可准确辨识具有振幅依赖的复合薄板的非线性阻尼参数。

1.3 仿真信号算例验证

为了验证细化共振法在获取复合结构系统非线性阻尼上的优势, 以下基于 Matlab 平台, 用计算机产生一个幅值为 1, 阻尼比为 0.50%, 固有频率为 156.60 Hz 的仿真衰减信号, 如图 2a 所示, 其表达式为

$$x(t) = \exp(-2\pi \times 156.6t \times 0.005) \cos(2\pi \times 156.6t + \pi) \quad (35)$$

首先, 对式(35)给出的仿真衰减信号进行正常

的频谱分析,即不采用频率细化技术进行 FFT 变换处理。假设采样频率为 2 048 Hz,采样点数为 2 048,则在频率分辨率为 1.0 Hz 时,会获得如图 2b 所示的频域响应曲线。由图 2 可知,此时曲线峰值对应的频率为 157.0 Hz,与设定的 156.60 Hz 存在一定的误差。

图 2 仿真信号的时域波形及其频域响应曲线

然后,对该仿真信号进行频率细化处理,在相同的采样频率和采样点数下,设定细化倍数为 2、10、20 和 100,即细化后频率分辨率可分别达到 0.5 Hz、0.1 Hz、0.05 Hz 和 0.01 Hz,频率细化处理后获得的 152~162 Hz 的频谱曲线如图 3 所示。

图 3 仿真信号经频率细化处理后的频谱

最后,采用半功率带宽法,分别对频率细化处理前、后的频谱数据进行阻尼辨识,表 1 给出了相应的阻尼结果及其识别误差。同时,为了研究频率分辨率对仿真信号固有频率和阻尼辨识精度的影响,在相同的采样频率下,设置采样点数为 4 096(即频率分辨率为 0.5 Hz),仍然在上述四个细化倍数下,对图 2 所示的仿真信号进行频率细化处理,并将相应的辨识结果及误差一并列于表 1 中。

对表 1 的数据进行分析可知,利用频率细化技术,在细化 10 倍后,便可辨识出准确的固有频率 156.60,同时,在细化 10 倍后,该方法辨识获得的阻尼误差便可小于 10%以内。如果频率分辨率为 0.5 Hz 时,则细化 20 倍后,就可准确辨识出阻尼

0.50%。但需要说明的是,并非细化倍数越高越好,太高的细化倍数不仅会增加运算时间,而且会严重降低计算效率。

表 1 不同频率细化倍数下辨识获得的仿真信号的固有频率、阻尼比及其误差

名称	频率分辨率 1.0 Hz		频率分辨率 0.5 Hz	
	固有频率/Hz	阻尼比 (%)	固有频率/Hz	阻尼比 (%)
理论值 A	156.60	0.50	156.60	0.50
未细化处理 B	157.00	0.95	156.50	0.64
误差(%) $ B-A /A$	0.3	90.0	0	28.0
细化 2 倍 C	156.50	0.64	156.50	0.64
误差(%) $ C-A /A$	0	28.0	0	28.0
细化 10 倍 D	156.60	0.54	156.60	0.53
误差(%) $ D-A /A$	0	8.0	0	6.0
细化 20 倍 E	156.60	0.53	156.60	0.50
误差(%) $ E-A /A$	0	6.0	0	0
细化 100 倍 F	156.60	0.51	156.60	0.50
误差(%) $ F-A /A$	0	2.0	0	0

2 辨识流程

根据上述的理论原理,提出了下面 6 个关键步骤,来利用细化共振法获取复合薄板非线性阻尼。

(1) 计算结构的固有特性。输入复合薄板的长、宽、厚、纤维角度、各个方向的弹性模量、剪切模量、泊松比和密度等参数,并利用 Matlab 软件,编写相应的计算程序,利用式(13)可获得各阶固有频率的理论结果。然后,将固有频率及其特征矢量代入式(6),在获得复合薄板的各阶振型函数的基础上,利用 Matlab 软件绘制出各阶模态振型。这样,将有助于在试验中确定测试频率范围,掌握模态振型的节点、节线的分布位置,以便可以科学合理地布置测点。

(2) 确定测试响应点的位置和测振方式。参照步骤(1)中获得的振型数据,进一步确定测试时响应点 B 的位置。实际测试时,为了避免将响应点布置在结构的节点或节线,应至少获取 3 个响应点的振动数据。然后,通过相互比较,来获取最佳的响应点位置。另外,为了提高阻尼测试的精度,建议采用非接触激光测振仪来获取其振动信号。

(3) 在某个基础激励幅度下开展扫频测试,获得包含某阶固有频率的复合薄板扫频时域信号。首

先, 搭建纤维增强复合薄板振动测试系统, 并参照步骤(1)中获得的固有频率结果, 选取某阶固有频率的 75%~125%作为扫频激励频段。接着, 以一定的基础激励幅度 Y , 对其进行扫频激励, 并在一定的采样频率和采样点数条件下, 利用激光测振仪获得包含某阶固有频率的扫频时域信号。最后, 对扫频时域信号进行频谱分析, 并通过辨识频谱峰值的方法, 来初步获得复合薄板的某阶固有频率。

(4) 利用频率细化法准确辨识复合薄板在某个基础激励幅度下的固有频率。在步骤(3)中获得包含某阶固有频率的扫频时域信号后, 设定合理的细化倍数, 并利用细化后的频率分辨率 $\Delta f'$, 通过式(32)对其进行频率细化处理。接着, 在获得细化后的频谱图后, 仍然采用辨识频谱峰值的方式, 来准确获取固有频率值 f_{mn} 。

(5) 利用共振激励技术, 准确获取复合薄板的在某个基础激励幅度下的共振响应和阻尼参数。首先, 在某阶固有频率 f_{mn} 处, 并在与步骤(3)和步骤(4)采用的相同激励幅度 Y 下, 采用共振法对复合薄板进行定频共振激励, 待其达到稳定的响应后, 测试获取共振响应幅值 A_{mn} 。然后, 将响应点 B 的位置坐标带入到步骤(1)获得的振型函数 $W_{mn}(x, y)$ 中, 可获得响应点 B 位置对应的振型值 $W_{mn}(x_1, y_1)$ 。接着, 将上述参数一并代入式(29), 则可辨识出某阶阻尼比 ζ_{mn} 。

(6) 改变基础激励幅度, 利用细化共振法获取复合薄板在不同激励幅度下的各阶振动参数。不断改变基础激励的幅值, 重复步骤(3)可得到多个激励幅度下包含某阶固有频率的扫频时域信号。然后, 利用频率细化法, 在与步骤(4)采用的相同细化倍数下, 可准确获取多个激励幅度对应的固有频率结果。同时, 利用步骤(5)采用的共振激励技术, 通过公式(29)进行反复计算, 便可辨识获得具有振幅依赖的该类型复合薄板的某阶非线性阻尼。最后, 参照步骤(1)中 Matlab 软件计算获得的固有频率结果, 选取另一阶固有频率, 然后重复步骤(3)~(5), 便可利用细化共振法准确获得不同激励幅度下复合薄板的各阶固有频率、共振响应和非线性阻尼参数。

3 实例研究

本文研究对象为 TC500 碳纤维/树脂基复合薄板。其铺设参数为 $[(0/90)_s/0/(90/0)_s]$, 共有 21 层, 每个铺层具有相同的厚度和纤维体积分数。另外, $E_1=136$ GPa, $E_2=7.92$ GPa, $G_{12}=3.39$ GPa, $\nu_{12}=0.32$, 质量和密度分别为 251 g 和 1 780 kg/m³。通过一个

夹具夹持其一边, 约束后的结构的有效测试尺寸为 200 mm×130 mm×2.36 mm。

图 4 给出了复合薄板振动测试系统连接示意图, 表 2 给出了所用仪器和传感器的具体型号。其中, 激光扫描测振系统由激光测振仪、45° 反光镜、步进电机、步进电机驱动器、控制器以及 X - Y 滑台组成。另外, 还利用 LabVIEW 软件编写了软件控制程序, 可实现复合薄板在 X 、 Y 方向上任意点振动响应数据的高效获取。

图 4 复合薄板振动测试系统示意图

表 2 测试中使用的仪器

序号	名称
1	LMS 数据采集分析仪
2	JZK-100 激振器和功放
3	Polytec PDV-100 激光测振仪
4	B&K 4514 加速度传感器
5	雷达 86HS45 步进电机和控制器
6	硕科数控 R-10 控制器

测试时, 首先将复合薄板的一边通过四个 M12 螺栓有效夹紧, 然后选择 B 点作为响应测点(其距离结构的约束端为 55 mm, 距离上端自由边为 35 mm); 进一步, 利用数据采集分析仪发出激励信号, 通过功率放大器将信号放大, 并经过电磁激振器和振动转化底座传递后被测复合薄板结构; 最后, 通过在反馈测点 A 位置处的加速度传感器实现振动激励幅度的量化控制。

另外, 在 Matlab 软件中输入复合薄板的尺寸和材料参数, 并计算其固有特性, 以前 6 阶固有频率和模态振型为例, 表 3 给出了相应的计算结果。接着, 设定采样频率为 3 200 Hz, 并设定采样点数为 3 200, 即在 1 Hz 的频率分辨率下, 开展固有频率和模态振型测试。试验时, 设定扫描速率为 0.5 Hz/s, 在 1 g 的激励幅度下获取包含某阶固有频率的扫频时域信号, 通过对其频谱峰值进行辨识, 可获得相应的固有频率结果, 如表 3 所示。最后, 利用激光扫描测试系统, 在每一阶固有频率对应的

共振状态来获取每一阶模态振型,并将前 6 阶振型结果也一并列入表 3 中。另外,表 3 还列出了计算获得的固有频率的误差,通过与测试结果进行比较可知,理论计算获得的复合薄板的固有频率误差在 1.3%~9.2%,处于可接受的范围内,且前 6 阶振型结果也与测试振型结果也相近,因此,可以利用 Matlab 程序获得的振型函数来进一步计算阻尼参数。

表 3 计算和测试获得的复合薄板前 6 阶固有频率和模态振型

模态阶次	1	2	3	4	5	6
测试频率 A/Hz	51.0	104.0	331.0	408.0	814.0	958.0
计算频率 B/Hz	55.7	97.9	349.4	414.9	767.3	945.3
误差(%) $ B-A /A$	9.2	5.9	5.6	1.7	5.7	1.3
测试振形
计算振形

接着,考虑不同振幅对复合薄板非线性阻尼的影响,按照 1 g、2 g、4 g 和 6 g 四个激励幅度依次进行试验的顺序,通过扫频方法测试获得包含某阶固有频率的扫频时域信号及其对应的频谱。然后,根据经典的半功率带宽法,辨识获得复合薄板在未经过频谱细化处理时对应的频率和阻尼参数(对于 1 g 激励幅度,只需要直接辨识阻尼比便可)。以辨识第 2 阶、第 4 阶和第 6 阶固有频率和模态阻尼比为

表 4 不同激励幅度下通过传统方法和细化共振法获得的复合薄板的固有频率、阻尼比及其差值

激励幅度	方法	固有频率/Hz			阻尼比(%)		
		2 阶	4 阶	6 阶	2 阶	4 阶	6 阶
1 g	未细化处理 A_1	104.0	408.0	958.0	0.86	0.74	0.43
	细化 20 倍 B	104.2	408.2	957.2	0.74	0.65	0.39
	差值(%) $ B-A_1 /A_1$	0.19	0.05	0.08	13.95	12.16	9.30
2 g	未细化处理 A_2	104.0	408.0	957.0	0.86	0.74	0.47
	细化 20 倍 C	104.0	407.7	956.2	0.75	0.67	0.42
	差值(%) $ C-A_2 /A_2$	0.00	0.07	0.08	12.79	9.46	10.64
4 g	未细化处理 A_3	104.0	407.0	956.0	0.89	0.86	0.52
	细化 20 倍 D	103.9	407.1	955.5	0.82	0.75	0.49
	差值(%) $ D-A_3 /A_3$	0.10	0.02	0.05	7.87	12.79	5.77
6 g	未细化处理 A_4	104.0	407.0	956.0	0.90	0.86	0.52
	细化 20 倍 E	103.6	406.6	955.2	0.86	0.79	0.55
	差值(%) $ E-A_4 /A_4$	0.38	0.10	0.08	4.44	8.14	5.77

另外,为了进一步验证细化共振法及其辨识结果的正确性,本文还对复合薄板在多个共振区间内的振动响应进行了更加细致的测试。基于表 4 获得的固有频率,在每个固有频率附近,选取一小段频率共振区间,以细微的频率间隔设定多个激励频率点,并依次对其进行共振激励。测试时频率分辨率为 0.1 Hz(采样频率和采样点数分别为 3 200 Hz 和

例,表 4 给出了相应的结果。

最后,利用本文所提出的细化共振法,在细化 20 倍的条件下(细化后的频率分辨率分别达到为 0.05 Hz),通过式(32)对 1 g、2 g、4 g 和 6 g 四个激励幅度下获得的扫频时域信号进行率细化处理操作,并在准确辨识各阶固有频率的基础上,通过共振激励技术获取其共振响应,进而代入式(29)来计算获取每一阶非线性阻尼参数。仍以第 2 阶、第 4 阶和第 6 阶模态为例,表 4 给出了利用细化共振法获得的固有频率和阻尼结果,并与传统方法获取的相应结果进行了对比。

对表 4 进行分析可知,如果按照常规方法来获取复合薄板的固有频率和阻尼比,则在固有频率辨识上会存在一定的误差,特别是随着激励幅度的增大,固有频率的识别误差呈现增大的趋势,且与采用细化共振法后获得的准确固有频率的误差最大为 0.38%。虽然该误差从频率角度来看很小,但在阻尼的辨识过程中却会产生放大的作用(由于半功率带宽法的阻尼辨识与固有频率密切相关),与采用细化共振获得的结果相比,阻尼辨识的偏差在 4.44%~13.95%。另外,常规方法由于在阻尼辨识精度上存在问题,在 1 g、2 g、4 g 和 6 g 四个激励幅度下获得的阻尼结果相差不大,难以发现其阻尼随振幅变化的规律。

32 000),仍然以第 2 阶、第 4 阶和第 6 阶为例,表 5 给出了 2 g 激励幅度下,不同频率共振区间内测试获得的共振响应幅值。

对表 5 的数据进行分析可知,在共振区间内采用更加细致的频率去激励复合薄板产生共振,可以更加准确地获得固有频率结果。例如,在 2 g 激励幅度下,通过测试获得的第 2 阶、第 4 阶和第 6 阶

的固有频率准确值分别为 104.0 Hz、407.7 Hz 和 956.2 Hz, 该结果与通过细化共振法获得的固有频率结果相吻合, 进而验证了该方法的正确性。需要说明的是, 虽然在测试软件中也可以设置较高的频率分辨率, 但通常会受到采样频率及最高采样线数的限制(其设置范围一般在 0.125~10 Hz); 另外, 对于频率在不断变化的扫频信号来说, 如果在采样频率一定的情况下, 还想获得频率分辨率更佳的扫频信号, 则只能降低扫频速率, 则无疑会降低测试效率, 因而, 对于扫频信号来说, 其频率分辨率不可能通过测试软件来无限制地提高。

表 5 不同频率共振区间内获得的共振响应幅值

第 2 阶		第 4 阶		第 6 阶	
激振 频率/Hz	共振 响应/mm	激振 频率/Hz	共振 响应/mm	激振 频率/Hz	共振 响应/mm
103.7	0.047 6	407.4	0.012 6	955.9	1.90×10^{-3}
103.8	0.051 1	407.5	0.013 2	956.0	1.97×10^{-3}
103.9	0.051 7	407.6	0.013 7	956.1	1.99×10^{-3}
104.0	0.052 2	407.7	0.014 8	956.2	2.04×10^{-3}
104.1	0.050 8	407.8	0.013 4	956.3	2.01×10^{-3}
104.2	0.049 5	407.9	0.012 7	956.4	1.96×10^{-3}

最后, 为了研究具有振幅依赖的纤维增强复合薄板的非线性阻尼的变化规律, 以通过细化共振法获得的第 2 阶、第 4 阶、第 6 阶阻尼为例, 图 5 给出了它们在不同激励幅度下的非线性阻尼结果。对上述结果进行分析可知, 复合薄板的阻尼特性会随着外界激励幅度的增大呈现逐步出不断增大的趋势。后续有必要针对该类型非线性现象, 从理论上建立相关模型, 解释其非线性变化的阻尼耗能原因。

图 5 通过细化共振法获得的复合薄板的非线性阻尼结果

4 结论

本文研究了具有振幅依赖特点的纤维增强复合薄板非线性阻尼特性的测试方法, 并尝试利用细化共振法来提高其阻尼辨识精度。

(1) 仿真信号算例验证结果表明, 利用频率细化技术, 可以提高信号固有频率和阻尼的辨识精度,

但并非细化倍数越高越好, 太高的细化倍数不仅会增加运算时间, 而且会严重降低计算效率。

(2) 通过与常规测试方法获得的不同激励幅度下复合薄板的固有频率和阻尼结果进行比较可知, 常规测试方法在固有频率辨识上会存在一定的误差, 特别是随着激励幅度的增大, 固有频率的识别误差呈现增大的趋势。另外, 由于其在阻尼的辨识过程中却会产生放大的作用, 与采用细化共振获得的结果相比, 两者阻尼辨识的偏差在 4.44%~13.95%范围之内。

(3) 通过测试不同频率共振区间内复合薄板的共振响应幅值结果, 可进一步验证细化共振法及其辨识结果的正确性。另外, 对该方法获得的第 2、4、6 阶非线性阻尼进行分析可知, 随着激励幅度的增大, 复合薄板的阻尼特性呈现逐步增大的趋势。

(4) 本文所采用的方法也可应用于其他具有振幅依赖特点的复合材料结构(如三明治夹层板或蜂窝夹层板)阻尼辨识研究中, 但首先需要集解析方法, 确定该类型复合材料结构非线性阻尼的表达式。

参 考 文 献

- [1] VINSON J R, SIERAKOWSKI R L, BERT C W. The behavior of structures composed of composite materials[M]. Netherlands: Springer, 2008.
- [2] 沈观林. 复合材料力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.
SHEN Guanlin. Mechanics of composite materials[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006.
- [3] 齐红宇, 温卫东, 崔海峰. 含孔复合材料层合板疲劳寿命预测研究[J]. 航空动力学报, 2003, 18(5): 658-661.
QI Hongyu, WEN Weidong, CUI Haitao. Fatigue life predication of notched composite material laminates[J]. Journal of Aerospace Power, 2003, 18(5): 658-661.
- [4] LEYENS C, KOCIAN F, HAUSMANN J, et al. Materials and design concepts for high performance compressor components[J]. Aerospace Science and Technology, 2003, 7(3): 201-210.
- [5] 温卫东, 崔海峰, 徐颖. T300/BMP-316 复合材料板冲击损伤研究[J]. 航空动力学报, 2007, 22(5): 749-754.
WEN Weidong, CUI Haipo, XU Ying. Research on impact damage of T300 /BMP- 316 composite laminates[J]. Journal of Aerospace Power, 2007, 22(5): 749-754.
- [6] LI H, WU H, ZHANG T, et al. A nonlinear dynamic model of fiber-reinforced composite thin plate with temperature dependence in thermal environment[J]. Composites Part B: Engineering, 2019, 162: 206-218.

- [7] SHOOSHTARI A, RAZAVI S. A closed form solution for linear and nonlinear free vibrations of composite and fiber metal laminated rectangular plates[J]. *Composite Structures*, 2010, 92(11): 2663-2675.
- [8] ASSARAR M, ZOUARI W, SABHI H, et al. Evaluation of the damping of hybrid carbon-flax reinforced composites[J]. *Composite Structures*, 2015, 132(1): 148-154.
- [9] SCHULTZ A B, TSAI S W. Dynamic moduli and damping ratios in fiber-reinforced composites[J]. *Journal of Composite Materials*, 1968, 2(3): 368-379.
- [10] WOLFENDEN A, WOLLA J M. Mechanical damping and dynamic modulus measurements in continuous fiber-reinforced composite materials: Al/Al₂O₃ and Al/W[J]. *Mrs Proceedings*, 1989, 153(1): 409-413.
- [11] WOLFENDEN A, WOLLA J M. Mechanical damping and dynamic modulus measurements in alumina and tungsten fibre-reinforced aluminium composites[J]. *Journal of Materials Science*, 1989, 24(9): 3205-3212.
- [12] CRANE R M, GILLESPIE J W. Characterization of the vibration damping loss factor of glass and graphite fiber composites[J]. *Composites science and technology*, 1991, 40(91): 355-375.
- [13] KOSTOPOULOS V, KORONTZIS D T. A new method for the determination of viscoelastic properties of composite laminates: A mixed analytical-experimental approach[J]. *Composites Science and Technology*, 2003, 63(10): 1441-1452.
- [14] BERTHELOT J M, SEFRANI Y. Damping analysis of unidirectional glass and Kevlar fibre composites[J]. *Composites science and technology*, 2004, 64(9): 1261-1278.
- [15] MATTER M, GMÜR T, CUGNONI J, et al. Numerical-experimental identification of the elastic and damping properties in composite plates[J]. *Composite Structures*, 2009, 90(2): 180-187.
- [16] IRIONDO J, ARETXABALETA L, AIZPURU A. Characterisation of the elastic and damping properties of traditional FML and FML based on a self-reinforced polypropylene[J]. *Composite Structures*, 2015, 131(1): 47-54.
- [17] 黎大志, 陈树年. 复合材料阻尼测试方法及空气阻尼影响的探讨[J]. *振动与冲击*, 1992, 1(1): 128-131.
LI Dazhi, CHEN Shunian. Study on the test method of the damping of the composite material and the influence of air damping[J]. *Vibration and Shock*, 1992, 1(1): 128-131.
- [18] 李瑞杰, 何安荣, 徐超, 等. 碳纤维增强复合材料结构阻尼性能研究[J]. *宇航材料工艺*, 2012, 42(1): 64-67.
LI Ruijie, HE Anrong, XU Chao, et al. Structural damping determination of carbon fiber reinforced composite[J]. *Aerospace Materials & Technology*, 2012, 42(1): 64-67.
- [19] CHEN J E, ZHANG W, GUO X Y, et al. Theoretical and experimental studies on nonlinear oscillations of symmetric cross-ply composite laminated plates[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 73(3): 1697-1714.
- [20] 杨云昭, 易凯, 王建月, 等. 国产碳纤维增强树脂基复合材料阻尼性能试验研究[J]. *强度与环境*, 2014, 41(6): 402-428
YANG Yunzhao, YI Kai, WANG Jianyue, et al. Experimental investigation of damping performance of domestic carbon fiber reinforced composite materials [J]. *Structure & Environment Engineering*, 2014, 41(6): 402-428.
- [21] LI H, NIU Y, LI Z, et al. Modeling of amplitude-dependent damping characteristics of fiber reinforced composite thin plate[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2020, 80: 394-407.
- [22] WANG Y Y, LAM K Y, LIU G R. The effect of rotatory inertia on the dynamic response of laminated composite plate[J]. *Composite Structures*, 2000, 48(4): 265-273.
-
- 作者简介: 李晖(通信作者), 男, 1982 年出生, 副教授, 博士, 博士后。主要研究方向为复合材料结构减振降噪。
E-mail: lh200300206@qq.com
常永乐, 男, 1989 年出生, 研究生。主要研究方向为纤维增强复合薄板非线性振动测试。
E-mail: 631081103@qq.com
韩清凯, 男, 1969 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为非线性振动与机械动态设计、机械状态监测与故障诊断等。
E-mail: qhan@dlut.edu.cn
闻邦椿, 男, 1930 年出生, 教授, 博士研究生导师, 中国科学院院士。