DOI: 10.3901/JME.2020.11.181

考虑非连续界面周向正应力时公路单心圆压强隧道衬砌的非完全接触和试验验证*

田红亮^{1,2,3} 陈谦³ 杜轩¹ 张明松²

- (1. 三峡大学机器人与智能系统宜昌市重点实验室 宜昌 443002;
2. 三峡大学水电机械设备设计与维护湖北省重点实验室 宜昌 443002;
3. 三峡大学机械与动力学院 宜昌 443002)

摘要: 以公路单心圆压强隧道为研究对象, 考虑复连通物体的位移单值条件以及径向正应力和径向位移在接触面上均保持连续, 推导出两种衬砌的径向正应力、周向正应力和轴向正应力的解析解。理论分析表明: (1) 当体力为常量时, 对于平面应力和平面应变两种情况, 假如边界形状和外力都相同, 则在该平面内的应力分布将是相同的, 且不包含各向同性材料的弹性常数(即弹性模量和泊松比); (2) 在二次衬砌外半径所在的圆周上, 周向正应力和轴向正应力都会突现应力异常, 导致第一类间断点中的跳跃间断点; (3) 当初支衬砌与二次衬砌的材料弹性参数相同时, 不存在跳跃现象; (4) 塑性屈服的始端首先出现在二次衬砌内侧, 并被周围的弹性区域约束。推导的完整应力公式可为分析公路单心圆压强隧道的接触特性提供参考。

关键词: 公路; 压强隧道衬砌; 非完全接触; 初支衬砌; 二次衬砌; 复连通物体; 位移单值条件

中图分类号: TH113

Non Full Contact of Highway Pressure Tunnel Lining with Single Centre Circle Considering non Continuous Interfacial Circumferential Normal Stress and Experimental Validation

TIAN Hongliang^{1,2,3} CHEN Qian³ DU Xuan¹ ZHANG Mingsong²

- (1. Yichang Key Laboratory of Robot and Intelligent System, China Three Gorges University, Yichang 443002;
2. Hubei Key Laboratory of Hydroelectric Machinery Design & Maintenance, China Three Gorges University, Yichang 443002;
3. College of Mechanical and Power Engineering, China Three Gorges University, Yichang 443002)

Abstract: The analytical solutions about radial normal stress, circumferential normal stress and axial normal stress for two linings are derived when the highway pressure tunnel with single centre circle is studied by considering single valued condition for displacement in a multiply connected body and the continuity of radial normal stress and radial displacement on contact surface. Theoretical analysis shows that: (1) in the case of constant body forces and both for the case of plane stress and plane strain, the stress distribution is hence the same in this plane and does not contain the elastic constants (i.e. elastic modulus and Poisson ratio) of the isotropic material, provided the shape of the boundary and the external forces are the same; (2) the circumferential normal stress and axial normal stress have sudden stress anomaly on the circumference with the secondary lining's external radius, which results in the jump discontinuous point belonging to the first kind of discontinuous point; (3) there is not the jump phenomenon when the primary support lining and secondary lining have the same elastic constants of the material; and (4) the onset of plastic yield first occurs in the internal side of secondary lining, and will be restricted by the surrounding elastic region. These general stress formulas can be applied to the analysis of the contact characteristics of highway pressure tunnel with single centre circle.

Key words: highway; pressure tunnel lining; non full contact; primary support lining; secondary lining; multiply connected body; single valued condition for displacement

* 国家自然科学基金(51275273)、2019年度机器人与智能系统宜昌市重点实验室三峡大学开放基金(JXYC00006, JXYC00004)和2019年度水电机械设备设计与维护湖北省重点实验室三峡大学开放基金(2019KJX11, 2019KJX06)资助项目。20190618收到初稿, 20190823收到修改稿

0 前言

随交通事业的发展,公路隧道的数量迅速增多,其地震灾害也时常发生,隧道的抗震问题日益受到世界各国的高度重视。2008年5月12日14时28分4秒,四川省汶川县映秀镇(北纬30.986°,东经103.364°)突然发生了里氏特震级8.0级、矩震级7.9级、最大烈度10度、震源深度14 km的浅源地震,造成震中附近区域许多公路隧道受到不同程度的损害。公路隧道具有大跨径、大断面的特点,若仍沿用以往的公路隧道断面型式,则开挖断面的面积将大幅度增加,而隧道内空间的有效利用率将显著降低,工程造价也会大幅上升。

公路隧道的结构和应力引起了工程技术人员及学者的高度关注。例如:吴顺川等^[1]基于Noorany修正膨胀本构模型建立了数值计算公式,对增设的聚苯乙烯泡沫缓冲层结构进行了厚度优化和隧道结构稳定性研究;陈江等^[2]在试验中将汶川波作为输入波,采用单向水平(WC-X)、单向竖直(WC-Z)、水平和竖向(WC-XZ)双向3种加载方式,研究了偏压隧道在不同加速度峰值下衬砌结构的加速度动力响应规律;白哲等^[3]以拟静力法为基础,通过地震力偏角的旋转,结合极限平衡条件,推导出地震作用下浅埋偏压隧道围岩压力的解析解;高波等^[4]对都江堰—汶川公路高速路段18座隧道进行了震害调查,描述了隧道的各种震害形式,分析了震害产生的原因,对隧道震后修复原则提出了相应的建议;来弘鹏等^[5]将公路隧道衬砌的断面型式分为3种:单心圆隧道衬砌、坦三心圆隧道衬砌、尖三心圆隧道衬砌,测试了在不同初始应力场作用下这3种公路隧道衬砌断面型式应力的分布规律。

分析上述文献中公路隧道的研究成果,可见存在一个方面的不足:在初支衬砌与二次衬砌的接触中,通常都假定各弹性体在接触面上保持完全接触,即既不互相脱离也不互相滑动,但事实上,在接触面上不相等的周向正应力会导致断层位移错动,初支衬砌与二次衬砌在接触面上突现非完全接触。

本文以公路单心圆压强隧道为研究对象,视初支衬砌和二次衬砌为两种不同的材料,具有不同的材料固有弹性常数(如弹性模量、泊松比和切变模量),考虑复连通物体的位移单值条件以及径向正应力和径向位移在接触面上均保持连续,推导出两种衬砌的径向正应力、周向正应力和轴向正应力的解析解;然后,分析了周向正应力在接触面处产生跳

跃间断点的原因(一般地,当初支衬砌和二次衬砌是2种不同的材料时,周向正应力在接触面上不连续),给出了避免阶跃现象的措施;最后,采用3种强度理论证明了塑性屈服最初发生在公路隧道何处。

1 复连通物体的应力和位移

复连通物体可以完全横切某些截面而不致将物体分成两部分。通俗地说,复连通物体是含有洞(包括点洞)的物体。莱布尼兹在1692年使用函数,假设1862年艾里应力函数 χ 仅为极半径 r 的函数,故 χ 与极角 φ 无关。在体力是常量的情况下,艾里应力函数应当满足拉普拉斯微分方程,即重调和函数。用艾里应力函数 χ 表示相容方程,由直角坐标中的相容方程得到极坐标中的相容方程^[6]为

$$\nabla^4 = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 \chi = 0 \quad (1)$$

式中, ∇ 为哈密顿算符, $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ 。

将式(1)具体展开为

$$\frac{1}{r^4} \left(r^4 \frac{d^4 \chi}{dr^4} + 2r^3 \frac{d^3 \chi}{dr^3} - r^2 \frac{d^2 \chi}{dr^2} + r \frac{d \chi}{dr} \right) = 0 \quad (2)$$

作变换和采用微分算符记号

$$r = e^x \quad D = \frac{d}{dx} \quad (3)$$

将原自变量 r 换成新自变量 x ,则有

$$r \frac{d \chi}{dr} = D \chi \quad r^2 \frac{d^2 \chi}{dr^2} = D(D-1) \chi \quad (4)$$

$$r^3 \frac{d^3 \chi}{dr^3} = D(D-1)(D-2) \chi \quad (5)$$

$$r^4 \frac{d^4 \chi}{dr^4} = D(D-1)(D-2)(D-3) \chi \quad (6)$$

将式(4)~(6)代入式(2),得

$$D^2(D-2)^2 \chi = 0 \quad (7)$$

故1755年欧拉方程式(2)的通解^[7]为

$$\chi = C_1 + C_2 x + e^{2x}(C_3 + C_4 x) = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r \quad (8)$$

式中, C_1 、 C_2 、 C_3 和 C_4 为任意常数。

由式(8),可得径向正应力和周向正应力分别^[6]为

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2} = \frac{C_2}{r^2} + 2C_3 + C_4(1 + 2 \ln r) \quad (9)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} = -\frac{C_2}{r^2} + 2C_3 + C_4(3 + 2 \ln r) \quad (10)$$

可见, 上述两种正应力与 r 有关, 不随 φ 而变化, 又因为圆是轴对称图形, 任何一条直径所在的直线都是圆的对称轴, 圆关于圆心有任意角的旋转对称, 故这两种正应力对称于通过 z 轴的任一平面, 即绕着 z 轴旋转对称。

根据平面应力的物理方程, 由式(8)~(10), 可得径向线应变、环向线应变和切应变^[6]分别为

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\varphi) = \frac{1}{E} \left[\frac{(1+\nu)C_2}{r^2} + 2(1-\nu)C_3 + (1-3\nu)C_4 + 2(1-\nu)C_4 \ln r \right] \quad (11)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \nu\sigma_r) = \frac{1}{E} \left[-\frac{(1+\nu)C_2}{r^2} + 2(1-\nu)C_3 + (3-\nu)C_4 + 2(1-\nu)C_4 \ln r \right] \quad (12)$$

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} = \frac{\tau_{r\varphi}}{G} = \frac{1}{G} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \varphi} \right) = 0 \quad (13)$$

式中 u_r ——径向位移;
 E ——二次衬砌的拉压弹性模量;
 ν ——二次衬砌的泊松比;
 u_φ ——环向位移;
 G ——二次衬砌的切变模量或刚性模量。

由式(11)得

$$u_r = \frac{1}{E} \left[-\frac{(1+\nu)C_2}{r} + 2(1-\nu)C_3r - (1+\nu)C_4r + 2(1-\nu)C_4r \ln r \right] + f(\varphi) \quad (14)$$

式中, $f(\varphi)$ 为 φ 的任意函数, 与 r 无关。

由式(12)得

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{1}{E} \left[-\frac{(1+\nu)C_2}{r} + 2(1-\nu)C_3r + (3-\nu)C_4r + 2(1-\nu)C_4r \ln r \right] - u_r \quad (15)$$

将式(14)代入式(15), 得

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{4C_4r}{E} - f(\varphi) \quad (16)$$

$$u_\varphi = \frac{4C_4r\varphi}{E} - \int f(\varphi) d\varphi + g(r) \quad (17)$$

式中, $g(r)$ 为 r 的任意函数, 与 φ 无关。

将式(14)和(17)代入式(13), 得

$$\frac{1}{r} \frac{df(\varphi)}{d\varphi} + \frac{dg(r)}{dr} + \frac{1}{r} \int f(\varphi) d\varphi - \frac{g(r)}{r} = 0 \quad (18)$$

$$g(r) - r \frac{dg(r)}{dr} = \frac{df(\varphi)}{d\varphi} + \int f(\varphi) d\varphi = C \quad (19)$$

$$g(r) = \alpha r + C \quad (20)$$

式中, C 为任意常数, 不依赖于 r 和 φ ; α 为二次衬

砌绕 z 轴的刚体转角。式(20)不同于文献[8]中的 $g(r) = \alpha r$ 。

由式(19)得

$$\frac{d^2 f(\varphi)}{d\varphi^2} + f(\varphi) = 0 \Rightarrow f(\varphi) = C_5 \cos \varphi + C_6 \sin \varphi \quad (21)$$

将式(21)代入式(19), 得

$$\int f(\varphi) d\varphi = C + C_5 \sin \varphi - C_6 \cos \varphi \quad (22)$$

将式(21)代入式(14), 得

$$u_r = \frac{1}{E} \left[-\frac{(1+\nu)C_2}{r} + 2(1-\nu)C_3r - (1+\nu)C_4r + 2(1-\nu)C_4r \ln r \right] + C_5 \cos \varphi + C_6 \sin \varphi \quad (23)$$

可见, C_5 和 C_6 为二次衬砌与变形无关的刚体平行移动位移。

将式(22)和(20)代入式(17), 得

$$u_\varphi = \frac{4C_4r\varphi}{E} - C_5 \sin \varphi + C_6 \cos \varphi + \alpha r \quad (24)$$

2 内外压强下二次衬砌的应力

二次衬砌的内半径为 a , 外半径为 b , 受内压强 p_a 和外压强 p_b , 故由式(9), 可得两个应力条件^[9]为

$$\sigma_r(a) = \frac{C_2}{a^2} + 2C_3 + C_4(1+2\ln a) = -p_a \quad (25)$$

$$\sigma_r(b) = \frac{C_2}{b^2} + 2C_3 + C_4(1+2\ln b) = -p_b \quad (26)$$

常数 C_4 使得式(24)具有 $4C_4r\varphi/E$ 一项, 这一项不是单值的, 因为点 (r, φ) 与点 $(r, \varphi+2\pi)$ 是同一点, 当 φ 增加 2π 时, 绕整环一周而回到某一指定点时, 它的值将改变 $8\pi C_4r/E$ 。这样的多值位移在整环中是不可能的, 必须令 $C_4=0$, 则由式(25)和(26)得

$$C_2 = \frac{a^2b^2(p_b - p_a)}{b^2 - a^2} \quad C_3 = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{2(b^2 - a^2)} \quad (27)$$

将式(27)分别代入式(9)和(10), 得^[10]

$$\sigma_r = \frac{a^2b^2(p_b - p_a)}{r^2(b^2 - a^2)} + \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} \quad (28)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{a^2b^2(p_a - p_b)}{r^2(b^2 - a^2)} + \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} \quad (29)$$

可见, 复连通物体存在点洞 $r=0$ 。在三维情况下, 将六面体所受的各力投影到 z 轴上, 得平衡方程^[9]

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \rho F_z = \rho \frac{d^2 w}{dt^2} \quad (30)$$

式中, ρ 为密度; F_z 为轴向的体力分量, 即 z 方向的体力分量; w 为轴向位移; t 为时间。

于是, 当不计体力 F_z 时, 将 $\tau_{zr} = \tau_{\varphi z} = 0$ 代入式(30), 得

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (31)$$

根据式(11)和(12), 可得体应变为

$$\theta = \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z = \frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} + \varepsilon_z \quad (32)$$

轴向正应力^[6]为

$$\sigma_z = \lambda \theta + 2G \frac{dw}{dz} \quad (33)$$

式中, λ 为拉梅第一常数。

将式(32)代入式(33), 得

$$\sigma_z = (\lambda + 2G) \frac{dw}{dz} + \lambda \left(\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} \right) \quad (34)$$

将式(34)代入式(31), 可得轴向线应变是常数

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = \text{const} \quad (35)$$

由式(32), 可得径向正应力和周向正应力分别为

$$\sigma_r = \lambda \theta + 2G \frac{du_r}{dr} = (\lambda + 2G) \frac{du_r}{dr} + \lambda \left(\frac{u_r}{r} + \varepsilon_z \right) \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &= \lambda \theta + 2G \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) = \\ &(\lambda + 2G) \frac{u_r}{r} + \lambda \left(\frac{du_r}{dr} + \varepsilon_z \right) \end{aligned} \quad (37)$$

将六面体所受的各力投影到 r 轴上, 可得空间问题的平衡方程为

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + \rho F_r = \rho \frac{d^2 u_r}{dt^2} \quad (38)$$

将式(35)~(37)和 $\tau_{r\varphi} = \tau_{zr} = 0$ 代入式(38), 得

$$\frac{\lambda + 2G}{r^2} \left(r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + r \frac{du_r}{dr} - u_r \right) = 0 \quad (39)$$

$$r \frac{du_r}{dr} = Du_r \quad r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} = D(D-1)u_r \quad (40)$$

将式(40)代入式(39), 得

$$(D+1)(D-1)u_r = 0 \quad (41)$$

故方程(39)的通解为

$$u_r = C_7 e^{-x} + C_8 e^x = \frac{C_7}{r} + C_8 r \quad (42)$$

式中, C_7 和 C_8 为任意常数。

将式(42)代入式(36), 得

$$\sigma_r = 2(\lambda + G)C_8 + \lambda \varepsilon_z - 2G \frac{C_7}{r^2} \quad (43)$$

径向正应力的 2 个边界条件为

$$\sigma_r(a) = 2(\lambda + G)C_8 + \lambda \varepsilon_z - \frac{2G}{a^2} C_7 = -p_a \quad (44)$$

$$\sigma_r(b) = 2(\lambda + G)C_8 + \lambda \varepsilon_z - \frac{2G}{b^2} C_7 = -p_b \quad (45)$$

联立求解方程组(44)和(45), 得

$$C_7 = \frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{2G(b^2 - a^2)} \quad (46)$$

$$C_8 = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{2(\lambda + G)(b^2 - a^2)} - \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} \varepsilon_z \quad (47)$$

将式(46)和(47)代入式(43), 可得式(28)。将式(42)代入式(37), 得

$$\sigma_\varphi = 2(\lambda + G)C_8 + \lambda \varepsilon_z + 2G \frac{C_7}{r^2} \quad (48)$$

将式(46)和(47)代入式(48), 可得式(29)。可见, 当体力为常量时, 对于平面应力和平面应变两种情况, 假如边界形状和外力都相同, 则在该平面内的应力分布将是相同的, 且不包含各向同性材料的弹性常数(即弹性模量和泊松比)。将式(42)代入式(34), 得

$$\sigma_z = (\lambda + 2G)\varepsilon_z + 2\lambda C_8 \quad (49)$$

将式(47)代入式(49), 最终得

$$\sigma_z = \frac{\lambda}{\lambda + G} \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} + \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G} \varepsilon_z \quad (50)$$

沿二次衬砌轴线作用于薄层筒底的合力(把拉伸时的轴力规定为正, 压缩时的轴力规定为负)^[11]为

$$(\pi b^2 - \pi a^2)\sigma_z = p_a \pi a^2 - p_b \pi b^2 \quad (51)$$

由式(51), 可得两端封闭圆筒形容器轴向正应力的 1852 年拉梅公式^[12]为

$$\sigma_z = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\varphi) \quad (52)$$

可见, 拉梅公式是式(50)当 $G=0$ (即 $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} = \frac{1}{2}$)和 $\varepsilon_z = 0$ (即平面应变)时的特例。

3 初支衬砌与二次衬砌的非完全接触

单心圆压强隧道如图 1 所示, 二次衬砌埋在无限大初支衬砌中, E' 和 ν' 分别为初支衬砌的弹性模量和泊松比。

由式(9)和(10), 可得无限大初支衬砌的应力为

$$\sigma'_r = \frac{C'_2}{r^2} + 2C'_3 \quad \sigma'_\varphi = -\frac{C'_2}{r^2} + 2C'_3 \quad r \geq b \quad (53)$$

图1 单心圆压强隧道

在求解弹性力学问题时,使应力分量、应变分量、位移分量完全满足基本方程,并不困难。但是,要使得边界条件也得到完全满足,却往往发生很大的困难。因此,弹性力学问题在数学上被称为边值问题。按照圣维南原理(如果把物体的一小部分边界上的面力,变换为分布不同但静力等效的面力,主矢量相同,对于同一点的主矩也相同,那么,近处的应力分布将有显著的改变,但是远处所受的影响可以忽略不计),在距离二次衬砌很远之处,即 $r \rightarrow +\infty$, 应当几乎没有应力。由式(53)于是有

$$\sigma'_r(+\infty) = \sigma'_\phi(+\infty) = 2C'_3 \approx 0 \Rightarrow C'_3 \approx 0 \quad (54)$$

沿径向方向,无限大初支衬砌与二次衬砌无相对运动,故由径向正应力的连续性 $\sigma_r(b) = \sigma'_r(b)$ 和式(9)、(53),得

$$\frac{C_2}{b^2} + 2C_3 = \frac{C'_2}{b^2} \quad (55)$$

将平面应力的式(23)转换成平面应变^[6],得

$$u_r = \frac{1}{2G} \left[2(1-2\nu)C_3 r - \frac{C_2}{r} \right] \quad a \leq r \leq b \quad (56)$$

由式(54)和(56),可得无限大初支衬砌的径向位移为

$$u'_r = \frac{1}{2G'} \left[2(1-2\nu)C'_3 r - \frac{C'_2}{r} \right] = -\frac{C'_2}{2G'r} \quad r \geq b \quad (57)$$

式中, G' 为初支衬砌的切变模量。

由径向位移的连续性 $u_r(b) = u'_r(b)$, 得

$$2(1-2\nu)\frac{G'}{G}C_3 - \frac{G'}{G}\frac{C_2}{b^2} + \frac{C'_2}{b^2} = 0 \quad (58)$$

式(25)减式(55),得

$$C_2 = -\frac{a^2(p_a b^2 + C'_2)}{b^2 - a^2} \quad (59)$$

将式(59)代入式(55),得

$$C_3 = \frac{p_a a^2 + C'_2}{2(b^2 - a^2)} \quad (60)$$

将式(59)和(60)代入式(58),得

$$C'_2 = \frac{2(\nu-1)\frac{G'}{G}p_a b^2}{\frac{G'}{G}-1 + \left[1 + (1-2\nu)\frac{G'}{G}\right]\frac{b^2}{a^2}} \quad (61)$$

将式(61)分别代入式(59)和(60),得

$$C_2 = \frac{\left[(2\nu-1)\frac{G'}{G}-1\right]p_a b^2}{\frac{G'}{G}-1 + \left[1 + (1-2\nu)\frac{G'}{G}\right]\frac{b^2}{a^2}} \quad (62)$$

$$C_3 = \frac{\left(1 - \frac{G'}{G}\right)p_a}{2\left\{\frac{G'}{G}-1 + \left[1 + (1-2\nu)\frac{G'}{G}\right]\frac{b^2}{a^2}\right\}} \quad (63)$$

最后得单心圆压强隧道的应力为

$$\sigma_r = \begin{cases} \left[1 - \frac{G'}{G} + \left[(2\nu-1)\frac{G'}{G}-1\right]\frac{b^2}{r^2}\right]p_a & a \leq r \leq b \\ \frac{\frac{G'}{G}-1 + \left[1 + (1-2\nu)\frac{G'}{G}\right]\frac{b^2}{a^2}}{2(\nu-1)\frac{G'}{G}p_a \frac{b^2}{r^2}} & r \geq b \end{cases} \quad (64)$$

$$\sigma_\phi = \begin{cases} \left[1 - \frac{G'}{G} + \left[1 + (1-2\nu)\frac{G'}{G}\right]\frac{b^2}{r^2}\right]p_a & a \leq r \leq b \\ \frac{\frac{G'}{G}-1 + \left[1 + (1-2\nu)\frac{G'}{G}\right]\frac{b^2}{a^2}}{2(1-\nu)\frac{G'}{G}p_a \frac{b^2}{r^2}} & r \geq b \end{cases} \quad (65)$$

$$\sigma_z = \begin{cases} \frac{2\nu\left(1 - \frac{G'}{G}\right)p_a}{\frac{G'}{G}-1 + \left[1 + (1-2\nu)\frac{G'}{G}\right]\frac{b^2}{a^2}} + E\varepsilon_z & a \leq r \leq b \\ E'\varepsilon_z & r \geq b \end{cases} \quad (66)$$

由式(65),可得在点 $r=b$ 处的左右极限之差为

$$\sigma_\phi(b^-) - \sigma_\phi(b^+) = \frac{2\left(1 - \frac{G'}{G}\right)p_a}{\frac{G'}{G}-1 + \left[1 + (1-2\nu)\frac{G'}{G}\right]\frac{b^2}{a^2}} \quad (67)$$

式中, b^- 表示从左向右趋于 b ; b^+ 表示从右向左趋于 b 。可见,当 $G=G'$ 即二次衬砌与初支衬砌的切变模量相等时,周向正应力在点 $r=b$ 处连续,否则在点 $r=b$ 处突现应力异常,导致非完全接触。

4 压强隧道的塑性屈服分析

采用拉梅公式的特例参数 $\nu=1/2$, 则最大伸长线应变理论的相当应力为

$$\sigma_{r2} = \frac{3a^2b^2|p_b - p_a|}{2r^2(b^2 - a^2)} \quad a \leq r \leq b \quad (68)$$

最大切应力理论的相当应力为

$$\sigma_{r3} = \frac{2a^2b^2|p_b - p_a|}{r^2(b^2 - a^2)} \quad a \leq r \leq b \quad (69)$$

最大畸变能密度理论的相当应力为

$$\sigma_{r4} = \frac{\sqrt{3}a^2b^2|p_b - p_a|}{r^2(b^2 - a^2)} \quad a \leq r \leq b \quad (70)$$

从式(68)~(70)都可见, 3种强度理论的相当应力皆随极半径 r 的增大而减小, 则塑性屈服^[13]的始端首先出现在二次衬砌内侧, 并被周围的弹性区域约束^[14]。

5 压强隧道应力分布的实例分析

设有一单心圆压强隧道, 二次衬砌的内半径 $a=100$ mm, 外半径 $b=150$ mm, 材料为钢筋混凝土, 弹性模量 $E=31$ GPa, 泊松比 $\nu=0.2$, 抗拉强度 $\sigma_0=252$ MPa; 初支衬砌的材料为喷射混凝土 C25, 弹性模量 $E'=28$ GPa, 泊松比 $\nu'=0.17$ 。

5.1 弹性分析

以最大切应力理论的相当应力为例, 见式(69),

当相当应力满足 $\sigma_{r3} = \frac{2a^2b^2|p_b - p_a|}{r^2(b^2 - a^2)} < \sigma_y$ 时, 单心圆

压强隧道发生弹性变形, 此时支护作用在二次衬砌内侧壁上的压强 p_a 较大(支护是为保证二次衬砌的安全, 对内侧壁采用的支挡、加固与保护措施), 其中 σ_y 为后继屈服应力。不考虑初支衬砌时, 二次衬砌的径向正应力、周向正应力、平面应变的轴向正应力分布如图2所示。可见, 平面应变的轴向正应力保持常量; 径向正应力是压应力, 这不同于文献[15]中的图2a和2b所示的拉应力, 这是因为文献[15]规定压应力为正(见文献[15]中式(3)的 $\frac{F}{(b^2 - a^2)\pi}$ 和

图1中的轴向压力 F), 拉应力为负(见文献[15]中的式(1)和(2), 但文献[15]中的式(13)规定界面上法向应力 $\sigma>0$ 代表张拉, 这2种规定自相矛盾), 但这种规定违背了于1687年发表在牛顿的传世之作《自然哲学之数学原理》中坚实数学基础之上的牛

顿定律II^[16], 此外, 文献[15]中式(4)的 $\mathbf{x}$ 为颗粒中心位置, $\mathbf{x}^{(i)}$ 为接触处颗粒 i 的中心位置, 这2种规定也自相矛盾, 再则, 文献[15]中式(5)的 $\hat{\mathbf{i}}_c$ 为 y 方向的单位向量, 但文献[15]中图3所示 $\hat{\mathbf{i}}_c$ 的正方向与 y 轴的正方向恰好相反。从图2a可见, 平面应变的轴向正应力小于零, 本文的平面应变轴向正应力大于文献[12]的; 从图2b可见, 平面应变的轴向正应力大于零, 本文的平面应变轴向正应力小于文献[12]的。综合以上2种情况, 本文的平面应变轴向正应力的绝对值小于文献[12]的。

(a) 当 $p_a=0, p_b=40$ MPa 时

(b) 当 $p_b=0, p_a=45$ MPa 时

图2 无初支衬砌时二次衬砌的应力分布

单心圆压强隧道的径向正应力、周向正应力、平面应变的轴向正应力分布如图3所示。可见, 在二次衬砌与初支衬砌的接触界面即圆 $r=b$ 处, 周向正应力 σ_ϕ 和平面应变的轴向正应力 σ_z 都会产生垂直突变现象, 出现第一类间断点中的跳跃间断点。由图3a可见, 随极半径的增大, 径向正应力、周向正应力和平面应变的轴向正应力均趋于零; 当 r 从 b^-

变化到 b^+ 时, 周向正应力 σ_ϕ 降低, 使二次衬砌与初支衬砌之间的接触发生切向错动。由图 3b 可见, 本文的平面应变轴向正应力小于文献[12]的, 表明当 r 从 b^- 变化到 b^+ 时, 本文的平面应变轴向正应力的计算结果相对安全, 使二次衬砌与初支衬砌之间的接触不容易发生轴向错动。

图 3 当 $p_a=45$ MPa 时单心圆压强隧道的应力分布

二次衬砌的径向位移如图 4 所示。可见, 径向位移随极半径的增大而减小, 平面应力问题的径向位移大于平面应变问题的。

设二次衬砌内半径的改变为 Δa , 则内半径的相对改变如图 5 所示。可见, 内半径的相对改变是内压强的正比例函数, 且内压强越大, 内半径的相对改变越大; 当内压强一定时, 内半径的相对改变随外内半径比的增大而减小, 平面应力问题的内半径的相对改变大于平面应变问题的。

设二次衬砌外半径的改变为 Δb , 则外半径的相对改变如图 6 所示。可见, 外半径的相对改变是内压强的正比例函数, 且内压强越大, 外半径的相对

改变越大; 当内压强一定时, 外半径的相对改变随外内半径比的增大而减小, 平面应力问题的外半径的相对改变大于平面应变问题的。

图 4 二次衬砌的径向位移

图 5 二次衬砌内半径的相对改变

图 6 二次衬砌外半径的相对改变

二次衬砌的初始厚度为 $t=b-a$, 厚度的改变为 $\Delta t = \Delta b - \Delta a$, 则厚度的相对改变如图 7 所示。可见,

厚度的相对改变小于零,表明 $\Delta b < \Delta a$; 厚度的相对改变是内压强的正比例函数,且内压强越大,厚度相对改变的绝对值越大;当内压强一定时,厚度相对改变的绝对值随内外半径比的增大而减小,平面应力问题的厚度相对改变的绝对值小于平面应变问题的。

图7 二次衬砌厚度的相对改变

5.2 弹塑性分析

以最大切应力理论的相当应力为例,见式(69),

当相当应力达到 $\sigma_{r3} = \frac{2a^2b^2|p_b - p_a|}{r^2(b^2 - a^2)} = \sigma_y$ 时,单心圆

压强隧道发生塑性变形,此时围岩作用在二次衬砌外侧上的压强 p_b 较大(在岩石地下工程中,由于受开挖影响而发生应力状态改变的周围岩体,称为围岩)。单心圆压强隧道的屈服首先从二次衬砌的内侧开始。当动态内压强继续增加,塑性区逐渐向外扩展,形成一个环状塑性区。单心圆压强隧道截面分为两部分,外层为弹性区,内层为塑性区,弹塑性区交界线是半径 c 的圆。弹塑性交界面半径 c 与动态内压强之间的关系如图8所示。可见,当内压强达到弹性极限内压强 $p_e=70$ MPa 时, $c=100$ mm,开始出现塑性变形;当内压强达到塑性极限内压强 $p_p=102.2$ MPa 时, $c=150$ mm,二次衬砌全部处于塑性状态,称为全塑性状态。当动态内压强小于弹性极限内压强时,二次衬砌全部处于弹性状态。在全塑性状态以前,二次衬砌能正常工作。当动态内压强大于塑性极限内压强时,全塑性状态以后就不能正常工作。

取图8所示的参数 $p_a=91.31$ MPa, $c=120$ mm,当二次衬砌既发生弹性变形,也发生塑性变形时,其径向正应力、周向正应力、平面应变的轴向正应力分布如图9所示。可见,当二次衬砌发生弹性变形时,平面应变的轴向正应力为常数;但当

二次衬砌发生塑性变形时,平面应变的轴向正应力不为常数。

图8 界面半径与动态内压强的关系

图9 当 $p_a=91.31$ MPa 时的应力分布

6 试验验证

设公路单心圆压强隧道如图10所示^[17],其中二次衬砌的内半径和外半径 b 可设计成不同的数据,即对应不同的隧道,材料为钢筋混凝土,弹性模量 $E=31$ GPa,泊松比 $\nu=0.2$,抗拉强度 $\sigma_0=252$ MPa;初支衬砌的材料为喷射混凝土 C25,弹性模量 $E'=28$ GPa,泊松比 $\nu'=0.17$ 。

由图10c可见,二次衬砌的平均拉应力大于平均屈服应力,将不计初始瞬时效应时屈服阶段内最小的应力判定为平均屈服应力;过屈服阶段后,二次衬砌达到强化,二次衬砌又恢复了抵抗变形的能力,要使二次衬砌继续变形必须增加拉力。

由图10d可见,在总体趋势上,挤毁外压强随内外半径比 $K=b/a$ 的增大而增大;外半径厚度比随内外半径比的增大而减小。

图 11 表示塑性极限外压强的理论值与试验挤毁外压强检测数据的比较情况，可见，塑性极限外压强的理论值随外内半径比的增大而增大；在大体走势上，试验挤毁外压强检测数据也随外内半径比

(a) 公路隧道的实物照片

(b) 测试过程

(c) 不同公路隧道对应的试验数据

图 10 公路单心圆压强隧道

图 11 塑性极限外压强的理论值与试验检测数据的比较

的增大而增大，但少数试验数据不可靠，因为在重载时，二次衬砌处于屈服阶段，应力开始下降，而应变显著增加^[18]。

塑性极限外压强的理论值与试验挤毁外压强检测数据的相对误差见表 1，其中，第几座隧道的序号从左到右依次是 18, 15, 17, 16, 10, 12, 13, 14, 11，使外内半径比 K 递增，便于画出图 11 中的横坐标 K 。可见，理论值与试验值之间的相对误差为-6.367%~7.515%。

表 1 塑性极限外压强的理论值与试验检测数据的相对误差

隧道编号	18	15	17	16	10	12	13	14	11
平均外半径 b/mm	70.231	63.754	63.754	63.754	57.277	57.404	57.277	57.404	57.531
平均初始厚度 t/mm	6.045	7.671	7.722	7.976	7.544	8.357	8.458	8.509	8.712
递减外半径厚度比 b/t	11.618	8.311	8.257	7.994	7.593	6.869	6.772	6.746	6.604
递增外内半径比 K	1.094	1.137	1.138	1.143	1.152	1.170	1.173	1.174	1.179
试验外压强/MPa	29.392	65.542	63.632	71.457	92.500	116.604	112.853	109.510	109.620
理论外压强/MPa	28.788	63.325	66.566	68.775	87.512	109.180	114.712	115.672	117.858
相对误差/(%)	-2.057	-3.382	4.612	-3.754	-5.393	-6.367	1.647	5.627	7.515

7 结论

本文采用正交曲线柱面坐标和三维问题情况下的单元体平衡微分方程,对两端封闭圆筒形容器轴向正应力的拉梅公式进行了改进计算,获得的具体结论如下。

(1) 以公路单心圆压强隧道为研究对象,考虑复连通物体的位移单值条件以及径向正应力和径向位移在接触面上均保持连续,推导出两种衬砌的径向正应力、周向正应力和轴向正应力的解析解。

(2) 当体力为常量时,对于平面应力和平面应变两种情况,假如边界形状和外力都相同,则在该平面内的应力分布将是相同的,且不包含各向同性材料的弹性常数(即弹性模量和泊松比)。

(3) 在二次衬砌外半径所在的圆周上,周向正应力和轴向正应力都会突现应力异常。当初支衬砌与二次衬砌的材料弹性参数相同时,不存在跳跃现象。

(4) 塑性屈服的始端首先出现在二次衬砌内侧,并被周围的弹性区域约束。

参 考 文 献

- [1] 吴顺川, 韩伟, 陈钊, 等. 基于膨胀本构的石膏岩隧道衬砌缓冲层厚度优化研究[J]. 岩土力学, 2018, 39(4): 1182-1190.
WU Shunchuan, HAN Wei, CHEN Fan, et al. Optimisation of buffer layer thickness in gypsum rock tunnel based on swelling constitutive model[J]. Rock and Soil Mechanics, 2018, 39(4): 1182-1190.
- [2] 陈江, 江学良, 祝中林, 等. 偏压隧道模型振动台试验与数值模拟研究[J]. 振动工程学报, 2017, 30(4): 660-669.
CHEN Jiang, JIANG Xueliang, ZHU Zhonglin, et al. Shaking table test and numerical simulation study on unsymmetrical loading tunnel model[J]. Journal of Vibration Engineering, 2017, 30(4): 660-669.
- [3] 白哲, 吴顺川, 刘波, 等. 地震力作用下浅埋偏压隧道围岩压力的解析解[J]. 北京科技大学学报, 2013, 35(8): 1106-1112.
BAI Zhe, WU Shunchuan, LIU Bo, et al. Analytical solution of rock pressure for shallow-buried unsymmetrical-loading tunnels under earthquake loading[J]. Journal of University of Science and Technology Beijing, 2013, 35(8): 1106-1112.
- [4] 高波, 王峥峥, 袁松, 等. 汶川地震公路隧道震害启示[J]. 西南交通大学学报, 2009, 44(3): 336-341, 374.
GAO Bo, WANG Zhengzheng, YUAN Song, et al. Lessons learnt from damage of highway tunnels in Wenchuan earthquake[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2009, 44(3): 336-341, 374.
- [5] 来弘鹏, 谢永利, 杨晓华. 公路隧道衬砌断面型式模型试验研究[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(6): 740-744.
LAI Hongpeng, XIE Yongli, YANG Xiaohua. Model test study on sectional form of highway tunnel lining[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, 28(6): 740-744.
- [6] 田红亮, 黄瑶, 陈甜敏, 等. 赫兹线接触 134 年[J]. 三峡大学学报, 2016, 38(4): 101-112.
TIAN Hongliang, HUANG Yao, CHEN Tianmin, et al. 134 years of Hertz line contact[J]. Journal of China Three Gorges University, 2016, 38(4): 101-112.
- [7] 同济大学数学系. 高等数学: 上册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2015.
Department of Mathematics Tongji University. Advanced Mathematics: Volume 1[M]. Beijing: Higher Education Press, 2015.
- [8] TIMOSHENKO S P, GOODIER J N. Theory of elasticity[M]. Third edition. New York, United States of America: McGraw-Hill Book Company Incorporated, 1970.
- [9] LOVE A E H. A treatise on the mathematical theory of elasticity[M]. New York, United States of America: Dover Publications Incorporated, 2015.
- [10] 田红亮, 何孔德, 陈从平, 等. 采用俞茂宏统一强度理论求解套管的极限外压强[J]. 西安交通大学学报, 2018, 52(5): 1-11, 87.
TIAN Hongliang, HE Kongde, CHEN Congping, et al. Solving ultimate outer pressure of casing by Yu's unified strength theory[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2018, 52(5): 1-11, 87.
- [11] 田红亮, 彭文昱, 何孔德, 等. 采用俞茂宏统一强度理论求解圆筒和球壳的极限值[J]. 西安交通大学学报, 2018, 52(3): 1-11.
TIAN Hongliang, PENG Wenyu, HE Kongde, et al. Solving limit values of cylinder and spherical shell adopting Yu's unified strength theory[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2018, 52(3): 1-11.
- [12] LAMÉ G. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides[M]. Paris, France: Gauthier-Villars Publisher, 1852.
LAMÉ G. Lessons on the mathematical theory of the

- elasticity of solid bodies[M]. Paris, France: Gauthier-Villars Publisher, 1852.
- [13] AFSHANI A, KAWAKAMI K, KONISHI S, et al. Study of infrared thermal application for detecting defects within tunnel lining[J]. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2019, 86: 186-197.
- [14] KAMPAS G, KNAPPETT J A, BROWN M J, et al. The effect of tunnel lining modelling approaches on the seismic response of sprayed concrete tunnels in coarse-grained soils[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2019, 117: 122-137.
- [15] 周喻, 吴庆良, 杜晓伟, 等. 岩石厚壁圆筒试验破坏的细观力学机制[J]. *岩石力学与工程学报*, 2016, 35(9): 1854-1863.
- ZHOU Yu, WU Qingliang, DU Xiaowei, et al. Meso mechanical mechanisms of thick-walled hollow rock cylinder during failure process[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2016, 35(9): 1854-1863.
- [16] 牛顿. 自然哲学之数学原理[M]. 王克迪, 译. 北京: 北京大学出版社, 2015.
- Newton. *The mathematical principles of natural philosophy*[M]. Translated by WANG Kedi. Beijing: Peking University Press, 2015.
- [17] 徐芝纶. 弹性力学: 上册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2017.
- XU Zhilun. *Elasticity: Book 1* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2017.
- [18] 李人宪, 袁磊. 高速列车通过隧道时的压力波动问题[J]. *机械工程学报*, 2014, 50(24): 115-121.
- LI Renxian, YUAN Lei. Pressure waves in tunnels when high-speed train passing through[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2014, 50(24): 115-121.

作者简介: 田红亮, 男, 1973 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师, 三峡学者。主要研究方向为界面力学。
E-mail: th19732003@aliyun.com
杜轩(通信作者), 男, 1972 年出生, 博士, 副教授。主要研究方向为复杂制造系统建模、优化与仿真。
E-mail: xdu@ctgu.edu.cn