DOI: 10.3901/JME.2020.11.161

复杂约束下的五轴数控系统自适应速度规划*

杨敏¹ 赵现朝¹ 钟泽杉¹ 岳义² 高鹏¹ 李乾坤¹

(1. 上海交通大学机械与动力工程学院 上海 200240;

2. 上海航天设备制造总厂有限公司 上海 200245)

摘要: 为充分发挥五轴机床的运动性能,提升机床的加工效率,提出一种复杂约束下的自适应速度规划方法。以弓高误差、刀具的进给运动和驱动轴的运动性能为约束,建立基于时间最优的五轴机床速度规划模型;在位移-速度坐标系中,采用二阶B样条对速度曲线进行描述,有效降低了优化变量的维度,提高了速度曲线的求解效率;采用具有连续一阶导数的罚函数对模型去约束化,并以BFGS算法为基础设计了具有鲁棒性的速度曲线求解策略。仿真表明,所提出的算法可适用于形状复杂的加工路径,算法计算高效,规划得到的速度曲线能满足各项约束并提高加工效率。采用S形试件进行实际加工测试,进一步验证了算法的有效性。

关键词: 五轴数控系统, 自适应速度规划, 加加速度约束, B样条速度曲线

中图分类号: TG659

Adaptive Velocity Planning under Complex Constraints for 5-axis CNC Systems

YANG Min¹ ZHAO Xianchao¹ ZHONG Zeshan¹ YUE Yi² GAO Peng¹ LI Qiankun¹

(1. School of Mechanical Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240;

2. Shanghai Aerospace Equipment Manufacturer Co., Ltd, Shanghai 200245)

Abstract: To maximize the property of five-axis CNC machine tool and improve its efficiency without impairment of precision, an adaptive velocity planning algorithm under complex constraints is proposed. Taken confined chord error, tangential movement of cutter and driving performance of axis into consideration, a time-optimal velocity planning model is established; expressing velocity profile with second-order B-spline in the displacement-velocity coordinate system to reduce the dimension of the optimization variables and improve efficiency of the model solving; A penalty function with continuous first-derivative is conducted to remove constraints of the model; a robust solution strategy for solving the model is designed based on BFGS algorithm. As shown in simulation, the proposed algorithm is advanced in dealing with complex tool paths efficiently. velocity profiles derive from the algorithm satisfy various of constraints well and increase processing efficiency markedly. The practice machining of S-shaped specimen further validates effectiveness of the algorithm.

Key words: five-axis CNC; adaptive feedrate planning; jerk constraint; B-spline velocity profile

0 前言

五轴数控系统具有加工柔性好、自动化程度高等优点,被广泛应用于航空航天、武器装备、汽车等重要领域。由于五轴机床运动学的非线性以及加工路径曲率的变化,当刀具以恒定的进给速率进行快速加工时,各个驱动轴的速度可能会剧烈变化,

产生过大的加速度以及加加速度,引起机床的振动和轮廓误差的增大,使得工件加工质量下降。为保证加工质量达到要求,五轴数控系统只能选择较小的进给率进行加工,致使加工效率较低。为兼顾加工质量和加工效率,不少学者针对数控系统的自适应速度规划方法进行了研究。

YONG等^[1]综合考虑弓高误差以及刀具运动的加减速约束,提出了一种离线的自适应速度规划方法,提高了机床运动的平稳性。TIMAR等^[2]基于时间最优速度曲线的“bang-bang”控制特性实现了驱动轴加加速度约束下的速度规划。DONG等^[3]建立了

* 国家重点研发计划(2017YFB1301900)和国家自然科学基金(51675328)资助项目。20190813收到初稿,20191208收到修改稿

基于加速度约束的双向扫描算法,实现了速度曲线的快速求解。FENG 等^[4]在双向扫描的基础上引入前瞻窗口,实现了加速度约束下的实时插补。上述方法均只考虑了加速度最大值的约束,却没有保证加速度的连续变化,求解得到的速度曲线连续但不光滑,容易造成机床的振动,引起较大的加工误差,加速机床零部件的磨损。

因此,不少学者引入加加速度约束以提高加工质量。DONG 等^[5]以双向扫描算法为基础,实现了加加速度约束下的速度规划。文献[6]对双向扫描算法进行修正,使得正反向速度曲线在连接处更为平滑,实现了柔性加减速控制。文献[7]寻找无法满足加速度以及加加速度约束的区域,并以此为起点回溯一段距离,重新调整插补过程中的速度曲线。LEE 等^[8]将急剧的转角设置为关键点,采用加加速度连续的速度曲线完成相邻关键点之间的拼接。JAHANPOUR 等^[9]以曲率极大值点分割加减速区域,并采用 S 型曲线完成加减速速度区间的速度规划。

考虑到加加速度是导致问题复杂化的因素,不少研究者选择对加加速度进行近似处理来实现速度规划。FAN 等^[10]对加加速度约束进行强化,实现了约束的线性化,使得问题可以通过线性规划求解。ERKORKMAZ 等^[11]在线性化的基础上,对长路径进行分段,并采用多线程同时计算各区间的最优速度曲线,实现求解效率的提升。ZHANG 等^[12]引入伪加加速度的概念,将模型转换为成凸优化问题,并采用 SQP 进行求解,与此类似的还有文献[13]。上述方法均是通过强化约束实现对加加速度约束的简化,降低了问题的复杂度,但是同时也导致可行解空间缩小,当加加速度约束成为速度提升的主要限制因素时,对加工效率的优化效果比较有限。

部分学者采用试错迭代的方法进行时间最优曲线的求解。BEUDAERT 等^[14]采用贪心法逐个计算插补步长,当插补步长无法同时满足所有约束时,按照设计的算法返回修正之前的插补点来进行调整。该算法能够精确地获得近似最优解,且适用于各类机床,但是计算时长过长且不稳定。SUN 等^[15]提出了一种逐点调整速度曲线的方法,对于不满足约束的采样点,按照固定比例降低采样点处的速度,直到获得完全满足约束的速度曲线。在此基础上,SUN 等在文献[16]中引入了速度平滑评价函数,以提高速度曲线的平滑性。上述方法实现比较简单,但是曲线中各采样点的约束满足情况是相互影响的,算法需要反复调整多次才能得到比较理想的速度曲线。BHARATHI 等^[17]选择使用分段样条对速度

曲线进行描述,并采用二分法对最优控制点进行搜索,调整过程中引入松弛因子以降低陷入局部最优的可能性,但是随着控制点的增加,曲线规划时长急剧增长。

针对五轴数控加工系统的速度规划问题,本文提出了一种新的解决方法。方法综合考虑多方面约束,建立了基于时间最优的速度规划模型,并采用 B 样条构建速度曲线以降低模型优化变量的维度;采用光滑的罚函数对模型进行去约束化,设计了以拟牛顿法为核心的迭代调整策略,实现了最优速度曲线的快速求解。通过数值仿真与实际加工验证了算法的有效性。

1 优化模型的建立

1.1 目标函数

进行速度规划的主要目的是最大化加工效率,即最小化加工时间,给定刀尖点速度曲线 v 后,加工时间 T 可按照式(1)进行计算

$$T = \int_0^L \frac{ds}{v} \quad (1)$$

式中, L 为加工路径的总长度。

1.2 弓高误差

如图 1a 所示,轮廓误差包括半径误差和弓高误差,此处认为插补点严格处于加工路径上,因此可以忽略半径误差。精确计算弓高误差十分复杂,选择采用近似的方法进行计算:如图 1b 所示,将插补点附近曲线近似为圆,将相邻插补点之间的实际运动路径近似为直线,弓高误差 δ 可计算如下

$$\delta = \rho - \sqrt{\rho^2 - \left(\frac{\Delta T v}{2}\right)^2} \quad (2)$$

式中, ρ 为插补点处对应的曲率半径, ΔT 为插补周期。给定最大弓高误差 $\delta_{\max}$, 可得

$$v \leq \frac{2\sqrt{\delta_{\max}(2\rho - \delta_{\max})}}{\Delta T} \quad (3)$$

图 1 轮廓误差描述

对于空间曲线,曲率半径可按照式(4)进行计算

$$\rho = \frac{\|C'(u)\|^3}{\|C'(u) \times C''(u)\|} \quad (4)$$

式中, u 为插补点处的曲线参数, $C'(u)$ 和 $C''(u)$ 分别为路径曲线关于参数 u 的一阶、二阶导数。

1.3 刀具进给运动约束

刀尖进给是影响加工表面质量的重要因素。受加工材料、加工工艺等因素限制, 刀具进给速度不能超过限制值, 否则容易引起刀具过热、磨损加快等问题。考虑到刀尖处切削力等因素的影响, 进给的加速度和加加速度也需要限制在一定范围内。因此, 可建立约束如下

$$\begin{cases} 0 \leq v \leq V_{\max} \\ |a| = \left| \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} \right| = |v_s v| \leq A_{\max} \\ |j| = \left| \frac{dv_s}{ds} v \frac{ds}{dt} \right| = |v_{ss} v^2 + v_s^2 v| \leq J_{\max} \end{cases} \quad (5)$$

式中, v_s , v_{ss} 分别指速度 v 关于路径 s 的一、二阶导数。

1.4 驱动轴性能约束

驱动轴的性能是影响加工过程中跟随精度以及平稳性的重要因素。当运动速度与加速度超出电机驱动能力的限制时, 电机的动态响应特性下降, 会产生较大的跟随误差。而加加速度过大则会造成机床的振动, 引起噪声和加速磨损。因此, 需要建立如下约束

$$\begin{cases} |v^\tau| \leq V_{\max}^\tau \\ |a^\tau| \leq A_{\max}^\tau \\ |j^\tau| \leq J_{\max}^\tau \\ \tau = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases} \quad (6)$$

式中, τ 代表驱动轴 τ 。各个轴的速度、加速度以及加加速度计算方法如下

$$\begin{cases} v^\tau = \frac{dq^\tau}{dt} = \frac{dq^\tau}{ds} \frac{ds}{dt} = q_s^\tau v \\ a^\tau = \frac{dq_s^\tau}{ds} \frac{ds}{dt} v + q_s^\tau \frac{dv}{dt} = q_{ss}^\tau v^2 + q_s^\tau a \\ j^\tau = \frac{dq_{ss}^\tau}{ds} v^2 \frac{ds}{dt} + \frac{dq_s^\tau}{ds} a \frac{ds}{dt} = q_{sss}^\tau v^3 + 3q_{ss}^\tau a v + q_s^\tau j \end{cases} \quad (7)$$

式中, q^τ 代表轴 τ 的位置, $q_s^\tau, q_{ss}^\tau, q_{sss}^\tau$ 分别代表 q^τ 关于 s 的一阶、二阶、三阶导数。

综上所述, 可建立如下的速度规划模型, 该模型的求解变量为速度曲线 v

$$\begin{aligned} \min_{v} T &= \int_0^L \frac{ds}{v} \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} v \leq \frac{2\sqrt{\delta_{\max}(2\rho - \delta_{\max})}}{\Delta T} \\ V_{\max}^\tau \geq |q_s^\tau v| \\ A_{\max}^\tau \geq |q_{ss}^\tau v + q_s^\tau a| \\ J_{\max}^\tau \geq |q_{sss}^\tau v^3 + 3q_{ss}^\tau a v + q_s^\tau j| \\ V_{\max} \geq v \geq 0 \\ A_{\max} \geq |v_s v| \\ J_{\max} \geq |v_{ss} v^2 + v_s^2 v| \\ \tau = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

1.5 离散模型的建立

模型(8)的优化变量为速度曲线 v , 为典型的泛函最优化问题, 难以直接求解, 需要进行离散转换为一般的优化问题。以 Δs 为步长, 沿着路径长度进行采样, 得到采样点矢量 $s_z = [s_1, s_2, \dots, s_m]^T$, 则离散的优化模型可以描述如式(9), 模型的优化变量为采样点处对应的速度矢量 $v_z = [v_1, v_2, \dots, v_m]^T$ 。

$$\begin{aligned} \min_{v_z} T &= \sum_{i=1}^m \frac{\Delta s}{v_i} \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} v_i \leq \frac{2\sqrt{\delta_{\max}(2\rho_i - \delta_{\max})}}{\Delta T} \\ V_{\max}^\tau \geq |q_{s,i}^\tau v_i| \\ A_{\max}^\tau \geq |q_{ss,i}^\tau v_i + q_{s,i}^\tau a_i| \\ J_{\max}^\tau \geq |q_{sss,i}^\tau v_i^3 + 3q_{ss,i}^\tau a_i v_i + q_{s,i}^\tau j_i| \\ V_{\max} \geq v_i \geq 0 \\ A_{\max} \geq |v_{s,i} v_i| \\ J_{\max} \geq |v_{ss,i} v_i^2 + v_{s,i}^2 v_i| \\ \tau = 1, 2, 3, 4, 5; i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

式中, 下标 i 代表在采样点 s_i 处的相关参数。对于结构比较简单的机床, $q_{s,i}^\tau, q_{ss,i}^\tau, q_{sss,i}^\tau$ 可直接根据运动学映射关系进行解析计算, 而对于相对复杂的机构, 可以采用如下的数值方法进行快速估计

$$\begin{cases} q_{s,i}^\tau = \frac{q_{i+1}^\tau - q_{i-1}^\tau}{2\Delta s} \\ q_{ss,i}^\tau = \frac{q_{s,i+1}^\tau - q_{s,i-1}^\tau}{2\Delta s} \\ q_{sss,i}^\tau = \frac{q_{ss,i+1}^\tau - q_{ss,i-1}^\tau}{2\Delta s} \end{cases} \quad (10)$$

1.6 B 样条形式速度曲线的构建

为保证速度曲线在整个加工过程中都能很好地

满足约束条件, 离散模型的采样点需要足够密集。但是由于模型(9)的优化变量为采样点处的速度 $\mathbf{v}_z$, 密集采样将使得优化变量维度过高, 导致模型求解效率下降。为此, 本文选用如图 2 所示的 B 样条对速度曲线进行描述, 将优化变量转换为 B 样条的控制点。模型依旧通过采样点计算速度曲线的约束满足情况以及加工时长, 但在优化过程中调整的是控制点位置而不再是每个采样点处的速度。由于控制点数量远小于采样点, 优化变量维度也因此得到降低, 模型的求解速度也实现了提升。虽然控制点比较稀疏, 但是 B 样条具有强大的形状表达能力, 速度曲线依旧可以调整成复杂的形状以满足模型要求; 另外 B 样条具有局部支撑特性, 相距较远的控制点之间的影响较小, 在优化求解过程中速度曲线比较容易收敛。

图 2 B 样条速度曲线

如图 2 所示, B 样条速度曲线 $\mathbf{E}(r)$ 建立在路径-速度(s-v)坐标系中, 该曲线包含 n 个控制点, 阶次为 2 次, 并采用均匀分布的节点矢量 $\mathbf{U}$

$$\mathbf{U} = [u_1, \dots, u_{n+3}] = \left[0, 0, 0, \frac{1}{n-2}, \dots, \frac{n-3}{n-2}, 1, 1, 1 \right] \quad (11)$$

控制点矢量如下

$$\mathbf{P} = \{\{S_1, V_1\}, \{S_2, V_2\}, \dots, \{S_n, V_n\}\} \quad (12)$$

式中, $\{S_k, V_k\}$ 表示第 k 个控制点的坐标。为方便描述, 令 $\mathbf{S} = [S_1, S_2, \dots, S_n]^T$, 称为位移控制点矢量, 令 $\mathbf{V} = [V_1, V_2, \dots, V_n]^T$, 称为速度控制点矢量。速度曲线上的点可以按照如下的公式进行计算

$$\mathbf{E}(r) = \{\mathbf{S}(r), \mathbf{V}(r)\} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \mathbf{S}(r) = \sum_{k=1}^n N_{k,2}(r) \mathbf{S}_k = \mathbf{N}^T(r) \mathbf{S} \\ \mathbf{V}(r) = \sum_{k=1}^n N_{k,2}(r) \mathbf{V}_k = \mathbf{N}^T(r) \mathbf{V} \end{cases} \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (14)$$

式中, $\mathbf{N}^T(r) = [N_{1,2}(r), N_{2,2}(r), \dots, N_{n,2}(r)]$ 为基函数向

量, $N_{k,2}(r)$ 为 B 样条基函数。

采样点向量 $\mathbf{s}_z$ 中的各个采样点处的运动参数可以按照如下步骤进行计算。

(1) 采用牛顿迭代法计算出每个采样点 s_i 在速度曲线 $\mathbf{E}(r)$ 中对应的参数 r_i , 由于位移控制点矢量 $\mathbf{S}$ 中的元素为递增关系, 即

$$S_k < S_{k+1}, k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (15)$$

因此对于每个 s_i 都只存在唯一的解 r_i 。

(2) 根据 r_i , 计算采样点 s_i 处对应的速度、加速度与加加速度

$$\begin{cases} v_i = V(r_i) = \mathbf{N}^T(r_i) \mathbf{V} \\ a_i = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} \Big|_{r=r_i} = \frac{v_{r,i}}{s_{r,i}} v_i \\ j_i = \frac{da}{ds} \frac{ds}{dt} \Big|_{r=r_i} = \frac{v_{rr,i} s_{r,i} - v_{r,i} s_{rr,i}}{s_{r,i}^3} v_i^2 + \frac{a_i^2}{v_i} \end{cases} \quad (16)$$

式中, $v_{r,i}, v_{rr,i}, s_{r,i}, s_{rr,i}$ 分别为 $V(r), S(r)$ 关于参数 r 的一阶、二阶导数, 其计算方法如下

$$\begin{cases} v_{r,i} = \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=r_i} = \mathbf{N}'^T(r_i) \mathbf{V} \\ s_{r,i} = \frac{\partial s}{\partial r} \Big|_{r=r_i} = \mathbf{N}'^T(r_i) \mathbf{S} \\ v_{rr,i} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \Big|_{r=r_i} = \mathbf{N}''^T(r_i) \mathbf{V} \\ s_{rr,i} = \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} \Big|_{r=r_i} = \mathbf{N}''^T(r_i) \mathbf{S} \end{cases} \quad (17)$$

式中, $\mathbf{N}'^T(r)$ 和 $\mathbf{N}''^T(r)$ 分别为基函数矢量 $\mathbf{N}^T(r)$ 关于参数 r 的一、二阶导数。

(3) 根据式(7), 可计算各个采样点处的驱动轴 τ 的速度 v_i^r 、加速度 a_i^r 以及加加速度 j_i^r 。

为简化计算, B 样条的位移控制点矢量 $\mathbf{S}$ 在生成后将保持固定, 因此离散模型式(9)中的优化变量将转变为速度控制点矢量 $\mathbf{V}$, 目标函数可以写成如下形式

$$\min_{\mathbf{V}} T = \sum_{i=1}^m \frac{\Delta s}{v_i} \quad (18)$$

2 模型求解

2.1 基于罚函数的去约束化

上述问题为约束下的非线性优化问题, 求解此类问题, 常见的算法有 SQP 等, 但是 SQP 对约束规模比较敏感, 求解约束维度较高的优化问题时计算效率太低, 不适合本问题的求解。相比之下, 罚函数法更适合处理大规模约束优化问

题, 虽然罚函数法所得到的速度曲线为近似可行解, 但可以通过选择合适的惩罚函数和判定条件对约束超出量进行限制, 使得求解的速度曲线能够满足实际的应用需求。因此本文选择采用罚函数法进行模型的求解。

构建如式(19)所示的罚函数, 该罚函数为光滑函数, 具有连续的一阶导数。

$$h(x) = \begin{cases} \left(\left| \frac{x}{X_{\max}} \right| - 1 \right)^2 & |x| > |X_{\max}| \\ 0 & |x| \leq |X_{\max}| \end{cases} \quad (19)$$

式中, x 代表模型中的约束项, $X_{\max}$ 为对应的约束限定值。模型约束部分可以转换为如下的惩罚项。

$$F_p(\mathbf{V}) = \sum_{i=1}^m \left[\frac{h(v_i) + h(a_i) + h(j_i)}{m} \right] + \sum_{\tau=1}^5 \sum_{i=1}^m \left[\frac{h(v_i^\tau) + h(a_i^\tau) + h(j_i^\tau)}{m} \right] \quad (20)$$

需要注意的是, 由于 v_i 需要同时满足最大进给速度和弓高误差两方面的约束, $h(v_i)$ 对应的约束限定值 $V_{i,\max}$ 应按照式(21)进行计算

$$V_{i,\max} = \min \left\{ V_{\max}, \frac{2\sqrt{\delta_{\max}(2\rho_i - \delta_{\max})}}{\Delta T} \right\} \quad (21)$$

为统一度量, 将加工效率评价函数改为如下形式

$$F_T(\mathbf{V}) = \frac{T}{T_{\min}} = \frac{V_{\max}}{L} \sum_{i=1}^m \frac{\Delta s}{v_i} \quad (22)$$

其中, $T_{\min}$ 是以最大进给速度 $V_{\max}$ 完成路径加工所需要的时间。最终得到如下无约束优化问题

$$\min_{\mathbf{V}} F(\mathbf{V}) = \min_{\mathbf{V}} [F_T(\mathbf{V}) + \alpha F_p(\mathbf{V})] \quad (23)$$

式中, α 为惩罚因子。

2.2 函数梯度计算

为了提高优化模型的求解速度和求解精度, 有必要对函数 $F(\mathbf{V})$ 的梯度进行精确计算。将各个采样点处的运动参数用向量进行描述

$$\mathbf{a}_z = [a_1, a_2, \dots, a_m]^T$$

$$\mathbf{j}_z = [j_1, j_2, \dots, j_m]^T$$

$$\mathbf{v}_z^\tau = [v_1^\tau, v_2^\tau, \dots, v_m^\tau]^T$$

$$\mathbf{a}_z^\tau = [a_1^\tau, a_2^\tau, \dots, a_m^\tau]^T$$

$$\mathbf{j}_z^\tau = [j_1^\tau, j_2^\tau, \dots, j_m^\tau]^T$$

根据式(16), 可以计算进给速度 $\mathbf{v}_z$ 、加速度 $\mathbf{a}_z$ 以及加加速度 $\mathbf{j}_z$ 关于速度控制点矢量 $\mathbf{V}$ 的雅可比矩阵

$$\begin{cases} \mathbf{N}_v = \frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial \mathbf{V}^T}, \mathbf{N}_a = \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial \mathbf{V}^T}, \mathbf{N}_j = \frac{\partial \mathbf{j}_z}{\partial \mathbf{V}^T} \\ \mathbf{N}_v(i, k) = \frac{\partial v_i}{\partial V_k} = N_{k,2}(r_i) \\ \mathbf{N}_a(i, k) = \frac{\partial a_i}{\partial V_k} = \frac{v_{r,i}}{s_{r,i}} N_{k,2}(r_i) + \frac{v_i}{s_{r,i}} N'_{k,2}(r_i) \\ \mathbf{N}_j(i, k) = \frac{\partial j_i}{\partial V_k} = \frac{v_i^2}{s_{r,i}^2} N''_{k,2}(r_i) + \left(\frac{2v_i v_{r,i}}{s_{r,i}^2} - \frac{v_i^2 s_{rr,i}}{s_{r,i}^3} \right) N'_{k,2}(r_i) + \left(\frac{v_{r,i}^2}{s_{r,i}^2} - \frac{2v_{r,i} v_i s_{rr,i}}{s_{r,i}^3} + \frac{2v_{rr,i} v_i}{s_{r,i}^2} \right) N_{k,2}(r_i) \end{cases} \quad (24)$$

结合式(7)与(24), 根据链式求导法则, 可快速计算驱动轴处速度 $\mathbf{v}_z^\tau$ 、加速度 $\mathbf{a}_z^\tau$ 、以及加加速度 $\mathbf{j}_z^\tau$ 关于矢量 $\mathbf{V}$ 的雅可比矩阵

$$\begin{cases} \mathbf{N}_{v^\tau} = \frac{\partial \mathbf{v}_z^\tau}{\partial \mathbf{V}^T}, \mathbf{N}_{a^\tau} = \frac{\partial \mathbf{a}_z^\tau}{\partial \mathbf{V}^T}, \mathbf{N}_{j^\tau} = \frac{\partial \mathbf{j}_z^\tau}{\partial \mathbf{V}^T} \\ \mathbf{N}_{v^\tau}(i, k) = \frac{\partial v_i^\tau}{\partial V_k} = q_{s,i}^\tau \frac{\partial v_i}{\partial V_k} \\ \mathbf{N}_{a^\tau}(i, k) = \frac{\partial a_i^\tau}{\partial V_k} = 2q_{ss,i}^\tau v_i \frac{\partial v_i}{\partial V_k} + q_{s,i}^\tau \frac{\partial a_i}{\partial V_k} \\ \mathbf{N}_{j^\tau}(i, k) = \frac{\partial j_i^\tau}{\partial V_k} = 3(q_{sss,i}^\tau v_i^2 + q_{ss,i}^\tau a_i) \frac{\partial v_i}{\partial V_k} + 3q_{ss,i}^\tau v_i \frac{\partial a_i}{\partial V_k} + q_{s,i}^\tau \frac{\partial j_i}{\partial V_k} \end{cases} \quad (25)$$

为方便描述, 令

$$\mathbf{h}'(\mathbf{x}) = [h'(x_1), h'(x_2), \dots, h'(x_m)]^T$$

$$h'(x_k) = \begin{cases} 2 \left(\frac{x_k}{X_{k,\max}^2} - \frac{1}{X_{k,\max}} \right) & x_k > X_{k,\max} \\ 0 & |x_k| \leq |X_{k,\max}| \\ 2 \left(\frac{x_k}{X_{k,\max}^2} + \frac{1}{X_{k,\max}} \right) & x_k < -X_{k,\max} \end{cases} \quad (26)$$

综合上述, 惩罚项 $F_p(\mathbf{V})$ 关于速度控制矢量 $\mathbf{V}$ 的梯度可表示为式(27)

$$\frac{\partial F_p(\mathbf{V})}{\partial \mathbf{V}^T} = \frac{\mathbf{h}'^T(\mathbf{v}_z) \mathbf{N}_v + \mathbf{h}'^T(\mathbf{a}_z) \mathbf{N}_a + \mathbf{h}'^T(\mathbf{j}_z) \mathbf{N}_j}{m} + \sum_{\tau=1}^5 \frac{\mathbf{h}'^T(\mathbf{v}_z^\tau) \mathbf{N}_{v^\tau} + \mathbf{h}'^T(\mathbf{a}_z^\tau) \mathbf{N}_{a^\tau} + \mathbf{h}'^T(\mathbf{j}_z^\tau) \mathbf{N}_{j^\tau}}{m} \quad (27)$$

而加工时间评价函数 $F_T(\mathbf{V})$ 的梯度则可以按照下式进行计算

$$\frac{\partial F_T(\mathbf{V})}{\partial \mathbf{V}^T} = -\frac{\Delta s V_{\max}}{L} \left(\frac{1}{v_1^2}, \frac{1}{v_2^2}, \dots, \frac{1}{v_m^2} \right) \mathbf{N}_v \quad (28)$$

结合式(23)和式(27)、式(28), 可得到目标函数梯度如下

$$\frac{\partial F(\mathbf{V})}{\partial \mathbf{V}^T} = \frac{\partial F_T(\mathbf{V})}{\partial \mathbf{V}^T} + \alpha \frac{\partial F_P(\mathbf{V})}{\partial \mathbf{V}^T} \quad (29)$$

值得注意的是, 当采样点确定后, 式(27)中的雅可比矩阵 $\mathbf{N}_v, \mathbf{N}_a, \mathbf{N}_j, \mathbf{N}_{v^r}, \mathbf{N}_{a^r}, \mathbf{N}_{j^r}$ 中的部分系数为固定参数, 整个优化过程只需要计算一次。根据 B 样条基函数的局部支撑性可知, 这些雅可比矩阵均属于稀疏矩阵, 并且随着优化过程中约束条件的逐渐满足, $\mathbf{h}'(\mathbf{v}_z), \mathbf{h}'(\mathbf{a}_z), \mathbf{h}'(\mathbf{j}_z), \mathbf{h}'(\mathbf{v}_z^r), \mathbf{h}'(\mathbf{a}_z^r), \mathbf{h}'(\mathbf{j}_z^r)$ 中的大部分元素也将变为 0, 因此梯度的计算耗时将随着优化过程的进行而逐渐减少。

2.3 基于拟牛顿法的迭代调整策略

拟牛顿法具有超线性的收敛速度, 并且可以避免计算目标函数的二次微分, 被广泛应用于非线性优化问题的求解。选择拟牛顿法中具有强鲁棒性的 BFGS 算法^[18]作为目标函数式(23)的基本求解算法。

但是直接以 BFGS 计算的结果作为最终的速度曲线并不可靠: 一方面, 目标函数为非凸函数, BFGS 等基于梯度的优化算法所得到的解均为局部最优解, 可能出现与全局最优解相差较大的情况, 因此需要选择良好的初值并多次迭代, 使得所得速度曲线尽量靠近最优解; 另一方面, 由于罚函数法得到的解不一定能满足设定约束, 为避免约束超出范围过大, 需要对解的约束满足情况进行检测, 并据此调节惩罚因子 α 的大小, 以提高算法的鲁棒性。综合上述考虑, 设计了如图 3 所示的以 BFGS 为内核的迭代调整算法, 各个步骤的具体说明如下。

(1) 确定采样点与位移控制点的位置。

采样点数量对计算效率有着直接影响, 采样点数量越多, 则求解精度越高, 但是所耗费的时间也越长。综合两方面因素, 采样点步长选择为最大插补步长 $\Delta L_{\max} = V_{\max} \Delta T$ 的 0.5~10 倍。位移控制点的选取则相对稀疏很多, 步长为采样步长的 20~200 倍。

(2) 设定最大迭代次数 M 和约束超出阈值 $C_{\max}$ 。

最大迭代次数的选择是影响算法鲁棒性和算法优化效果的重要因素, 选择次数越大, 最终得到的解也更接近实际最优解, 但是计算时长也会随之增加, 一般选择 5~10 次。 $C_{\max}$ 的值则可根据实际加工过程中允许的约束超出余量来进行设定。

(3) 计算固定参数。

在优化迭代过程中, 需要多次计算目标函数值以及它的梯度, 但是部分参数只需要计算一次, 不

图3 速度曲线求解流程

需要随着迭代而重复计算, 包括采样点矢量 $\mathbf{s}_z$ 在 B 样条速度曲线中对应的参数 $[r_1, r_2, \dots, r_m]$ 和基函数 $N_{k,2}, N'_{k,2}, N''_{k,2}$, 以及固定系数 $s_{r,i}, s_{rr,i}, q_{s,i}^r, q_{ss,i}^r, q_{sss,i}^r$ 。

(4) 计算初值 $\mathbf{V}_0$ 。

对于非凸优化问题, 初值的选择对最终的优化结果和求解效率有着重要影响。采用文献[3]提供的双向扫描法对加速度约束下的近似最优速度曲线进行快速求解, 可得到每个采样点 s_i 处对应的速度 v_i^* , 并采用最小二乘法拟合 B 样条形式。令 $\mathbf{v}^* = [v_1^*, v_2^*, \dots, v_m^*]^T$, 则初值 $\mathbf{V}_0$ 可按式(30)计算得到

$$\mathbf{V}_0 = \arg \min_{\mathbf{V}} \|\mathbf{v}^* - \mathbf{N}_v \mathbf{V}\| = (\mathbf{N}_v^T \mathbf{N}_v)^{-1} \mathbf{N}_v^T \mathbf{v}^* \quad (30)$$

(5) BFGS 算法求解, 得到局部最优解 $\mathbf{V}^*$ 。

BFGS 算法采用迭代的方法对海塞矩阵进行近似, 只需计算目标函数的一阶梯度即可实现快速收敛。一阶梯度可按照第 2.2 节中提供的方法进行计算。

(6) 优化参数调整。

为避免出现约束超出过大的问题, 根据 $\mathbf{V}^*$ 对约束条件的满足情况对下一次迭代的惩罚因子 α 和初值 $\mathbf{V}_0$ 进行调整: 如果 $F_p(\mathbf{V}^*)$ 超出设定阈值 $C_{\max}$, 可以适当提高惩罚因子以提升最优解对约束的满足能力

$$\begin{cases} V_0 = \gamma_l V^* \\ \gamma_l = \min \left\{ 0.9, \frac{1}{1 + \sqrt{F_p(V^*)}} \right\} \\ \alpha = \eta_l \alpha \\ \eta_l = \min \left\{ 2, \frac{F_p(V^*)}{C_{\max}} \right\} \end{cases} \quad (31)$$

如果 $F_p(V^*)$ 未超过 $C_{\max}$, 则说明在现有的约束范围内, 还存在进一步提高加工效率的空间, 可以适当降低惩罚因子以释放更多优化潜力, 并提高初始速度曲线让其重新收敛

$$\begin{cases} V_0 = \gamma_h V^* \\ \gamma_h = 1.1 \\ \alpha = \eta_h \alpha \\ \eta_h = \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{F_p(V^*)}{C_{\max}} \right\} \end{cases} \quad (32)$$

(7) 判断是否继续迭代。

如果迭代次数小于设定的最大迭代次数 M , 进入步骤(5)再次进行计算; 反之结束优化, 并在记录的速度曲线中选择最优解: 如果存在约束超出小于设定阈值的解 ($F_p(V) < C_{\max}$), 则在其中选择加工时间最短的作为最优速度曲线; 如果不存在, 则选择约束超出最小的解作为最终的速度曲线。

3 仿真与试验

为了检测算法的速度规划效果, 分别进行了仿真验证与实际加工测试。本文算法可适用于任意结构的机床, 测试选用的是图 4 所示的五轴混联机床, 驱动轴包含三根支链以及一个 AC 摆。由于是混联结构, 该机床的运动学存在强耦合性和强非线性, 速度规划具有很高的难度。在测试过程中, 算法的参数设置如下: 初始惩罚因子 α 为 500, 约束超出阈值 $C_{\max}$ 为 0.02%, 最大迭代次数 M 为 5 次。

3.1 仿真测试

采用如图 5 所示的双 B 样条路径进行速度规划测试, 该路径形状复杂, 存在许多曲率较大的区域, 总长度为 341.35 mm。在测试过程中, 采样点间距选择为 0.1 mm, 控制点间距选择为 3 mm。由于起点与终点需要快速地加减速, 为提高速度调节的灵活性, 靠近起点、终点附近的控制点选取更为密集, 间距为 0.75 mm。

按照本文提出的规划策略, 先采用双向扫描算法生成加速度约束下的速度曲线, 结果如图 6 所示。

图 4 五轴混联加工机床

表 1 机床约束条件

	支链 1	支链 2	支链 3	A 摆	C 摆	刀尖
$V_{\max}/(\text{mm}\cdot\text{rad}/\text{s})$	150	150	150	$\pi/3$	$5\pi/3$	50
$A_{\max}/(\text{mm}\cdot\text{rad}/\text{s}^2)$	300	300	300	5	10	500
$J_{\max}/(\text{mm}\cdot\text{rad}/\text{s}^3)$	3 000	3 000	3 000	100	500/3	5 000
$\delta_{\max}/\text{mm}$	0.001

图 5 双 B 样条加工路径

从图中可以看出, 由于未对加速度进行约束, 速度曲线虽然连续但不光滑, 在部分区域依然可以看到明显的尖角。采用 B 样条拟合后, 得到如图 7 所示的速度曲线和控制点, 并以此作为迭代求解的初值。最终获得的速度曲线如图 8 所示, 对比图 6, 可以明显看出, 经过加速度约束的速度曲线更为光滑, 尖角部分都被平滑处理了, 并且在部分区域 (130~200 mm), 加工速度相对有所提升。这是因为在运用文献[3]提供的算法计算速度曲线时, 为方便计算, 驱动轴的加速度是采用式(33)近似得到的, 与真实的加速度存在一定的误差, 导致规划获得的速度曲线与理想最优速度曲线存在一定偏差。但是

经过本文算法的优化后,这部分较低的速度曲线都得到了提升,整体的加工效率也明显提高。

$$a_i^r = \frac{(q_{s,i}^r v_i)^2 - (q_{s,i-1}^r v_{i-1})^2}{2\Delta s} \quad (33)$$

图6 加速度约束下的速度曲线

依据规划得到的速度曲线对路径进行插补计算,以检测真实插补过程中是否会超出设定的约束。由于B样条曲线长度没有解析表达式,本文选择用牛顿法进行插补点的计算。获得插补点后,可以轻易地获得速度、加速度以及加加速度信息并对约束满足情况进行检测。图9绘制刀尖点以及驱动轴的速度、加速度以及加加速度曲线,从中可以看出,规划得到的速度曲线几乎没有超出约束,完全符合

实际加工需求,弓高误差(图10)也在设定范围内。

图7 B样条拟合生成初值

图8 算法得到的最优速度曲线

(a) 速度约束情况

(b) 加速度约束情况

(c) 加加速度约束情况

图9 约束满足情况检测

图 10 弓高误差约束检测

仿真使用的计算机 CPU 主频为 3.7 GHz, 整个规划过程采用 C++ 计算只需耗时 1.38 s, 经过对速度曲线的优化, 整条路径的加工时长为 13.60 s。虽然本文算法为离线计算方法, 但是由于计算效率较高, 数控系统可以采用并行计算的框架将本算法应用于实时加工系统中。如图 11 所示, 速度规划与实时插补各占用一个线程并行运算, 由于规划时长小于加工时长, 在系统预规划一段时间后, 速度规划将能够提供足够的速度信息给后续的实时插补使用, 数控系统也能实现持续稳定地加工。

图 11 并行构架

3.2 实际加工测试

为进一步验证算法的有效性, 采用 S 形试件进行实际加工测试, 测试使用的是基于 TwinCat3 平台自主开发的五轴数控系统。该数控系统采用多线程并行构架设计, 运行于高性能的工控机上, 并通过 EtherCat 总线与硬件模块进行通信。

试验加工路径如图 13 所示, 该路径为 S 形试件单侧路径, 整条路径长约 690 mm。由于工件安装位置处于混联机床工作空间边缘, 机床动态性能相对较差, 因此加工过程采用的约束参数比较严格, 三根支链最大速度、加速度分别设置为 30 mm/s、150 mm/s², A 摆和 C 摆的最大速度分别设置为 0.05π/s, 0.1π/s, 其余参数与表 1 中一致。

采用本文算法规划得到的速度曲线如图 14 所示, 各个驱动轴约束速度、加速度以及加加速度约束条件满足情况如图 15 所示。由于 S 形路径相对

图 12 试验平台结构

图 13 试件加工路径

图 14 试件加工速度曲线

平缓, 刀具姿态变化范围不大, 运动过程比较平稳, 各驱动轴的加速度、加加速度均处于比较合理的范围。受支链 3 最大速度限制, 刀尖进给速度在 10~200 mm 以及 470~670 mm 区间未能达到最大速度。而在路径末段, 由于曲率较大, 为保证各支链的加速度和加加速度不超出设定约束, 进给速度也有所下降。

图 15 加工测试速度曲线约束满足情况

采用规划得到的速度曲线进行加工，S 形试件的加工情况如图 16 所示。在加工过程中，机床运行平稳没有冲击，运动噪声较低。由于混联机床在 S 形路径中不存在奇异点，所以不会和串联机床一样在试件中间出现过切的现象。工件的加工表面光滑，没有明显的振纹，符合实际的加工需求。

图 16 S 形试件加工效果

4 结论

(1) 综合考虑弓高误差、刀尖进给运动、运动轴运动情况，建立了基于时间最优的速度规划优化模型，并构建了 B 样条形式的速度曲线，降低了模型优化变量的维度。

(2) 采用罚函数法将优化模型转变为无约束优化模型，并基于 BFGS 算法设计了模型的求解策略，实现了速度曲线的快速计算。

(3) 通过仿真试验与实际加工测试验证了算法的有效性。

参考文献

- [1] YONG T, NARAYANASWAMI R. A parametric interpolator with confined chord errors, acceleration and deceleration for NC machining [J]. Computer-Aided Design, 2003, 35(13): 1249-1259.
- [2] TIMAR S D, FAROUKI R T, SMITH T S, et al. Algorithms for time-optimal control of CNC machines along curved tool paths [J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2005, 21(1): 37-53.
- [3] DONG J, STORI J. A generalized time-optimal bidirectional

- scan algorithm for constrained feed-rate optimization [J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2006, 128(2): 379-390.
- [4] FENG J, LI Y, WANG Y, et al. Design of a real-time adaptive NURBS interpolator with axis acceleration limit [J]. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2009, 48(1-4): 227-241.
- [5] DONG J, FERREIRA P M, STORI J A. Feed-rate optimization with jerk constraints for generating minimum-time trajectories [J]. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 2007, 47(12-13): 1941-1955.
- [6] MATTMÜLLER J, GISLER D. Calculating a near time-optimal jerk-constrained trajectory along a specified smooth path [J]. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2009, 45(9-10): 1007-1016.
- [7] DU D, LIU Y, GUO X, et al. An accurate adaptive NURBS curve interpolator with real-time flexible acceleration/deceleration control [J]. *Robotics and Computer- Integrated Manufacturing*, 2010, 26(4): 273-281.
- [8] LEE A C, LIN M T, PAN Y R, et al. The feedrate scheduling of NURBS interpolator for CNC machine tools [J]. *Computer-Aided Design*, 2011, 43(6): 612-628.
- [9] JAHANPOUR J, ALIZADEH M R. A novel acc-jerk-limited NURBS interpolation enhanced with an optimized S-shaped quintic feedrate scheduling scheme [J]. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2014, 77(9-12): 1889-1905.
- [10] FAN W, GAO X S, LEE C H, et al. Time-optimal interpolation for five-axis CNC machining along parametric tool path based on linear programming [J]. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2013, 69(5): 1373-1388.
- [11] ERKORKMAZ K, CHEN Q G, ZHAO M Y, et al. Linear programming and windowing based feedrate optimization for spline toolpaths [J]. *CIRP Annals*, 2017, 66(1): 393-396.
- [12] ZHANG Q, LI S, GUO J. Smooth time-optimal tool trajectory generation for CNC manufacturing systems [J]. *Journal of Manufacturing Systems*, 2012, 31(3): 280-287.
- [13] GUO J-X, ZHANG K, ZHANG Q, et al. Efficient time-optimal feedrate planning under dynamic constraints for a high-order CNC servo system [J]. *Computer-Aided Design*, 2013, 45(12): 1538-1546.
- [14] BEUDAERT X, LAVERNHE S, TOURNIER C. Feedrate interpolation with axis jerk constraints on 5-axis NURBS and G1 tool path [J]. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 2012, 57: 73-82.
- [15] SUN Y, ZHAO Y, BAO Y, et al. A novel adaptive-feedrate interpolation method for NURBS tool path with drive constraints [J]. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 2014, 77: 74-81.
- [16] SUN Y, ZHAO Y, BAO Y, et al. A smooth curve evolution approach to the feedrate planning on five-axis toolpath with geometric and kinematic constraints [J]. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 2015, 97: 86-97.
- [17] BHARATHI A, DONG J. Feedrate optimization for smooth minimum-time trajectory generation with higher order constraints [J]. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2015, 82(5-8): 1029-1040.
- [18] NOCEDAL J, WRIGHT S J. Numerical optimization [M]. London: Springer, 1999.

作者简介: 杨敏, 男, 1996 年出生。主要研究方向为机器人运动规划、数控系统。

E-mail: yangmin5130209275@sjtu.edu.cn

赵现朝(通信作者), 男, 1967 年出生, 博士, 副教授。主要研究方向为并联机器人技术、数控技术、动力学半物理仿真技术。

E-mail: xczhao@sjtu.edu.cn