DOI: 10.3901/JME.2020.11.048

基于牛顿欧拉法的一种空间被动过约束并联机构动力学建模方法*

李永泉^{1,2} 郭雨^{1,2} 张阳^{1,2} 张立杰^{2,3}

- (1. 燕山大学河北省并联机器人与机电系统实验室 秦皇岛 066004;
2. 燕山大学先进锻压成形技术与科学教育部重点实验室 秦皇岛 066004;
3. 燕山大学河北省重型机械流体动力传输与控制实验室 秦皇岛 066004)

摘要: 以 4-RPTR 四自由度空间被动过约束(冗余约束)并联机构为研究对象, 采用牛顿欧拉法结合补充变形协调方程对其进行动力学分析。基于牛顿欧拉法所建动力学方程为 78 个, 但是由于该机构被动过约束的存在, 所求解的未知量为 80 个, 当按照平面被动过约束机构的方法补充 8 个变形协调方程时, 会与所建的 78 个方程线性相关, 导致方程组无法求解。基于此, 提出进行被动过约束并联机构动力学建模时, 应首先分析机构产生被动过约束的原因, 在此基础上, 引入冗余约束力(力矩)引起的杆件变形与末端平台位姿误差的关系作为补充方程, 能够保证方程组线性无关, 可以求解。为此, 引入直接引起冗余约束的转动关节约束力矩产生的杆件变形与末端平台位姿误差的关系, 补充了 8 个变形协调方程, 同时引入了 6 个未知量, 从而得到 86 个方程, 包含 86 个未知量, 且方程组线性无关, 得到了该机构的动力学全解模型。基于 Matlab 和 ADAMS 软件对该机构进行动力学仿真, 在平台末端给定相同运动轨迹的情况下, 对比两种方法仿真所得机构驱动力变化曲线, 可以看出所建动力学模型的正确性。为该类空间被动过约束机构进行动力学建模提供了一个新的思路。

关键词: 并联机构; 过约束; 动力学; 变形协调性分析

中图分类号: TH113

Dynamic Modeling Method of Spatial Passive Over-constrained Parallel Mechanism Based on Newton Euler Method

LI Yongquan^{1,2} GUO Yu^{1,2} ZHANG Yang^{1,2} ZHANG Lijie^{2,3}

- (1. Parallel Robot and Mechatronic System Laboratory of Hebei Province,
Yanshan University, Qinhuangdao 066004;
2. Key Laboratory of Advanced Forging & Stamping Technology and Science (Yanshan University),
Ministry of Education of China, Qinhuangdao 066004;
3. Hebei Provincial Key Laboratory of Heavy Machinery Fluid Power Transmission and Control,
Yanshan University, Qinhuangdao 066004)

Abstract: The 4-RPTR four-degree-of-freedom space passive over-constrained (redundant constrained) parallel mechanism is taken as the research object, and the Newton Euler method combined with the complementary deformation coordination equation is used to analyze the dynamics. The number of dynamic equations based on Newton's Euler method is 78, but due to the existence of passive over-constraints of the mechanism, the unknown variables of the required solutions are 80. When the eight deformation coordination equations are added according to the method of planar over-constrained mechanism, it will be linearly related to the 78 equations built, resulting in the equations being unable to solve. Based on this, when proposing the dynamics modeling of passive over-constrained parallel mechanism, the reason for the passive over-constraint of the mechanism should be analyzed firstly. On this basis, adding the deformation of the member caused by the redundant constrained force (torque) and the position and posture error of the terminal platform as a complementary equation ensures that the equations are linearly

* 国家自然科学基金(51405421)和河北省自然科学基金(E2015203101)资助项目。20190424 收到初稿, 20190717 收到修改稿

independent and can be solved. To this end, the relationship between the deformation of the rod and the position and posture error of the terminal platform caused by the rotational joint restraining torque directly causing the redundant constraint is introduced, and eight deformation coordination equations are added, and six unknown variables are introduced, thereby obtaining 86 equations. Containing 86 unknowns, and the equations are linearly independent, the dynamic solution model of the mechanism is obtained. Based on matlab and adams software, the dynamics simulation of the mechanism is carried out. When the same motion trajectory is given at the terminal of the platform, the correctness of the dynamic model can be seen by comparing the driving force variation curves of the two methods. It provides a new idea for dynamic modeling of this type of space passive over-constrained mechanism.

Key words: parallel mechanism; over-constraint; dynamics; deformation coordination analysis

0 前言

赵永生等^[1]将过约束机构分为被动过约束机构和主动过约束(冗余驱动)机构, 由于过约束的存在, 会造成对过约束机构进行动力学建模时, 方程个数少于未知量个数, 导致方程组无法求解, 这样, 传统以分析力学原理为基础的动力学建模方法, 如牛顿-欧拉法、达朗伯-拉格朗日方程法、虚功原理法和凯恩方法等^[2-6], 在对过约束机构进行动力学建模时, 都或多或少地存在缺陷。本文的研究对象 4-RPTR 并联机构, 具有空间三维移动和绕 Z 轴的转动 4 个自由度, 属于空间被动过约束机构, 对于被动过约束机构, 文献[7]假设机构全部构件为刚体, 即不考虑变形, 使用消除冗余约束的方法以及迭代算法仅能求得某种特殊情况下的动力学模型; 赵燕等^[8]将分支的关节约束力分为使杆件变形的力和力矩与阻止杆件变形的力和力矩, 让两者产生的变形相互抵消, 补充了变形协调方程, 建立了 4-UPU 并联机构的动力学模型, 此方法考虑变形抵消, 将平台视为刚体, 没有考虑末端平台位姿误差; 姜晓等^[9]考虑杆件轴向变形, 建立了末端位姿与位移误差之间的关系, 补充了变形协调方程, 但由于该机构为平面过约束机构, 将该方法直接应用于空间过约束机构时, 会导致补充的方程与原来的动力学方程线性相关, 使方程仍然无法求解; 李永泉等^[10]使用键合图建立球面 2-DOF 冗余驱动并联机构动力学模型, 考虑各杆件变形在末端点的线位移为零补充变形协调方程, 但由于该机构的特殊性, 末端输出为轴而不是平台, 不用考虑平台末端位姿误差, 不具备普遍性; 胡波等^[11]使用虚功原理建立了 2RPU+UPU 机构动力学模型, 跳过考虑变形协调方程的补充, 但此方法仅仅能得到驱动力, 无法得到各关节约束反力; 通过对上述文献动力学建模方法的研究, 可以看出, 要想建立空间被动过约束并联机构动力学全解模型或多或少都存在不足。

本文以 4-RPTR 四自由度空间被动过约束并联

机构为研究对象, 结合材料力学对于静不定问题受力分析的解决方法, 并通过分析 2-DOF 平面机构与 4-RPTR 空间机构的被动过约束, 在平面机构动力学建模的基础上, 提出了对于被动过约束机构动力学建模时必须首先分析机构产生冗余约束的原因, 在补充变形协调方程时, 加入冗余约束力(力矩)引起的杆件变形与末端平台位姿误差的关系, 能够建立完整的动力学模型, 并通过软件仿真验证了该种方法的正确性。

1 4-RPTR 并联机构运动学分析

4-RPTR 并联机构如图 1 所示, 动平台为长方形, 短边长度为 a_2 , 对角线夹角的锐角为 $\varphi=60^\circ$, 静平台为正方形, 对角线长度为 $2R$, 移动副上下连杆长度为 L_5 , 定长杆 E_iP_i 长度为 L_0 , 且定长杆轴线方向与动平台法线夹角为 α , 机构有四个分支, 故 $i=(1,2,3,4)$, 以下本文中涉及下标 i 的变量, 皆同上, 建立局部坐标系 $E_i(x_{Ei}, y_{Ei}, z_{Ei})$ 、 $B_i(x_{Bi}, y_{Bi}, z_{Bi})$ 、动坐标系 $o'(X_o, Y_o, Z_o)$ 、各分支坐标系 $O_i(X_i, Y_i, Z_i)$ 、定坐标系 $O(X_o, Y_o, Z_o)$, 定坐标系 O 固定在定平台上, X_o 轴沿 OB_3 方向, Y_o 轴沿 OB_4 方向, Z_o 轴垂直定平台向上; 坐标系 o' 固定在动平台上, $X_{o'}$ 轴沿 $o'P_3$ 方向, $Z_{o'}$ 轴垂直动平台向上, $Y_{o'}$ 由右手定则决定; 分支坐标系原点与定坐标系重合, Z_i 轴垂直定平台向上, X_i 轴沿局部坐标系 OB_i 反方向, Y_i 由右手定则决定; B_i 固定在转动副 B_i 处, z_{Bi} 轴方向沿 B_i 转动副轴线, x_{Bi} 轴方向沿变长杆 B_iE_i , y_{Bi} 由右手定则决定; 局部坐标系 E_i 固定在转动副 E_i 处, z_{Ei} 轴垂直动平台向上, y_{Ei} 轴沿分支坐标系 Y_i 方向, x_{Ei} 轴沿分支坐标系 X_i 方向, B_i 处为转动副, 轴线方向分别平行于 X_4 、 X_1 、 X_2 、 X_3 , E_i 处为 T 副, 其为两个轴线互相垂直的转动副, 其中一个轴线始终平行于 B_i 处转动副轴线, 另外一个轴线始终垂直于定平台向上, P_i 处为轴线垂直于定平台向上的转动副。

动平台位姿由在定坐标系下动平台中心点 o' 的

位置矢量 $\mathbf{p}$ 和旋转矩阵 ${}^O_o \mathbf{R}$ 可以得出, 此机构有三维移动和一维绕 z 轴转动, 所以

$${}^O_o \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} = [x, y, z] \quad (1)$$

图1 4-RPTR 并联机构简图

1.1 机构位置分析

对各分支坐标系先绕 X_i 轴转动 90° , 再绕旋转后的 Z_i 轴转动 θ_i , 可得到 B_i 处的坐标系, 这样旋转矩阵可以表示为

$${}^O_1 \mathbf{R}(i) = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

旋转变换矩阵的第一列与移动副的方向矢量 $\mathbf{l}_{li}$ 相同, 可得

$$\mathbf{l}_{li} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i \\ 0 \\ -\sin \theta_i \end{bmatrix} \quad (3)$$

对式(3)求解, 可得

$$\cos \theta_i = l_{lix} \quad \sin \theta_i = l_{liy} \quad (4)$$

根据图1得到环路矢量方程

$$\mathbf{r}_{Obi} + L_i \mathbf{l}_{li} + L_0 \mathbf{l}_{0i} = \mathbf{p} + \mathbf{r}_{o'pi} \quad (5)$$

式中, $\mathbf{l}_{li}$ 是 $B_i E_i$ 的方向矢量, $\mathbf{l}_{0i}$ 是 $E_i P_i$ 的方向矢量。

因为在使用环路矢量求导求解关节速度时分支包含关节过多, 无法使用点乘或者叉乘矢量的方法把速度、角速度分离出来, 所以使用机构的反解求得关节 E_i 的方向矢量 OE_i 作为中间矢量来分离速度。

因为文献[12]反解求解出来的 E_i 的轨迹相较于 P_i 在一个圆上, 所以 E_i 点位置有 16 种位置情况

$$OE_1 = (x - a_2 \cos \phi \pm \sqrt{(L_0 \sin \alpha)^2 - (y - a_2 \sin \phi)^2}, 0, z - L_0 \cos \alpha)^T \quad (6)$$

$$OE_2 = (0, y - a_2 \sin(30^\circ) \sin \phi - a_2 \cos(30^\circ) \cos \phi \pm \sqrt{(L_0 \sin \alpha)^2 - (x - a_2 \sin(30^\circ) \cos \phi + a_2 \cos(30^\circ) \sin \phi)^2}, z - L_0 \cos \alpha)^T \quad (7)$$

$$OE_3 = (x + a_2 \cos \phi \pm \sqrt{(L_0 \sin \alpha)^2 - (y + a_2 \sin \phi)^2}, 0, z - L_0 \cos \alpha)^T \quad (8)$$

$$OE_4 = (0, y + a_2 \sin(30^\circ) \sin \phi + a_2 \cos(30^\circ) \cos \phi \pm \sqrt{(L_0 \sin \alpha)^2 - (x + a_2 \sin(30^\circ) \cos \phi - a_2 \cos(30^\circ) \sin \phi)^2}, z - L_0 \cos \alpha)^T \quad (9)$$

OE_i 在反解表达式中由于根号前正负号的存在, 共产生了 16 种组合方式, 此处, 为了便于计算, 选取了一种如图1并联机构简图的组合方式, 选取的组合方式为“--++”, 式中, L_i 是移动副变长杆 $B_i E_i$ 的长度。

此刻环路矢量方程变成由 E_i 点分离的两个矢量方程

$$\mathbf{r}_{Obi} + L_i \mathbf{l}_{li} = \mathbf{OE}_i \quad (10)$$

$$\mathbf{OE}_i + L_0 \mathbf{l}_{0i} = \mathbf{p} + \mathbf{r}_{o'pi} \quad (11)$$

1.2 机构速度分析

若想求得 B_i 点的角速度以及移动副处的速度需要对式(10)关于时间求导, 可以得到

$$\dot{L}_i \mathbf{l}_{li} + L_i \boldsymbol{\omega}_{Bi} \times \mathbf{l}_{li} = \mathbf{v}_{Ei} \quad (12)$$

对式(12)两端同点乘 $\mathbf{l}_{li}$ 来分离出移动副的标量速度

$$\dot{L} = \mathbf{v}_{Ei} \cdot \mathbf{l}_{li} \quad (13)$$

通过对式(12)两端叉乘 $\mathbf{l}_{li}$ 可得

$$\boldsymbol{\omega}_{Bi} = \frac{-\mathbf{v}_{Ei} \times \mathbf{l}_{li}}{L_i} \quad (14)$$

若想求得 E_i 点的角速度需要对式(11)关于时间求导, 可以得到

$$\mathbf{v}_{Ei} + \boldsymbol{\omega}_{Ei} \times L_0 \mathbf{l}_{0i} = \mathbf{v}_{o'} + \boldsymbol{\omega}_{o'} \times \mathbf{p} \quad (15)$$

式中, $\boldsymbol{\omega}_{o'}$ 为动平台转动角速度。

定义 $\mathbf{l}_{0i'}$ 为矢量 $E_i P_i$ 在定平台上投影的单位矢量。

式(15)两端同叉乘 $\mathbf{l}_{0i'}$ 来分离出 $\boldsymbol{\omega}_{Ei}$ 可得

$$\boldsymbol{\omega}_{Ei} = \frac{-(\mathbf{v}_{o'} + \boldsymbol{\omega}_{o'} \times \mathbf{p} - \mathbf{v}_{Ei}) \times \mathbf{l}_{0i'}}{L_0 \sin \alpha} \quad (16)$$

得到各关节的速度和角速度后可以根据旋转关节连杆运动的传递, 通过矢量相乘的方法得到连杆质心的速度和加速度(图2)。

转动副 B_i 到与移动副相连的下连杆质心的矢量为

图 2 支链移动副简图

$$\mathbf{B}_i \mathbf{P}_{ci1} = \frac{L_5 \mathbf{l}_{li}}{2} \quad (17)$$

与转动副 B_i 相连的移动副下连杆的速度

$$\mathbf{v}_{i1} = \boldsymbol{\omega}_{Bi} \times \frac{L_5 \mathbf{l}_{li}}{2} \quad (18)$$

与转动副 B_i 相连的移动副下连杆的速度

$$\boldsymbol{\omega}_{i1} = \boldsymbol{\omega}_{Bi} \quad (19)$$

转动副 B_i 到与 T 副相连的移动副上连杆质心的矢量为

$$\mathbf{B}_i \mathbf{P}_{ci2} = \left(L_i - \frac{L_5}{2} \right) \cdot \mathbf{l}_{li} \quad (20)$$

与 T 副 E_i 相连的移动副上连杆速度

$$\mathbf{v}_{i2} = \dot{L}_i \mathbf{l}_{li} + \boldsymbol{\omega}_{Bi} \times \left(L_i - \frac{L_5}{2} \right) \mathbf{l}_{li} \quad (21)$$

与 T 副 E_i 相连的移动副上连杆角速度

$$\boldsymbol{\omega}_{i2} = \boldsymbol{\omega}_{Bi} \quad (22)$$

下文中与转动副 B_i 相连的移动副下连杆简称为移动副下连杆，与 T 副相连的移动副上连杆简称为移动副上连杆。

T 副 E_i 到定长杆 $E_i P_i$ 的质心矢量为

$$\mathbf{E}_i \mathbf{P}_{ci3} = \frac{L_0 \mathbf{l}_{0i}}{2} \quad (23)$$

定长杆速度

$$\mathbf{v}_{i3} = \mathbf{v}_{Ei} + \boldsymbol{\omega}_{Ei} \times \frac{L_0 \mathbf{l}_{0i}}{2} \quad (24)$$

定长杆角速度

$$\boldsymbol{\omega}_{i3} = \boldsymbol{\omega}_{Ei} \quad (25)$$

1.3 机构加速度分析

若想求得 B_i 点的角加速度以及移动副处的加速度需要对式(12)关于时间求导，可以得到

$$\ddot{L}_i \mathbf{l}_{li} + 2\dot{L}_i \boldsymbol{\omega}_{Bi} \times \mathbf{l}_{li} + L_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_{Bi} \times \mathbf{l}_{li} + L_i \boldsymbol{\omega}_{Bi} \times (\boldsymbol{\omega}_{Bi} \times \mathbf{l}_{li}) = \dot{\mathbf{v}}_{Ei} \quad (26)$$

对上式两端同点乘 $\mathbf{l}_{li}$ 来分离出移动副的标量速度

$$\ddot{L}_i = \dot{\mathbf{v}}_{Ei} \cdot \mathbf{l}_{li} - \boldsymbol{\omega}_{Bi} \times (\boldsymbol{\omega}_{Bi} \times \mathbf{l}_{li}) \cdot \mathbf{l}_{li} \quad (27)$$

通过对式(26)两端又乘 $\mathbf{l}_{li}$ 可得

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{Bi} = \frac{\dot{\mathbf{v}}_{Ei} \times \mathbf{l}_{li} + 2\dot{L}_i \boldsymbol{\omega}_{Bi}}{-L_i} \quad (28)$$

由于已得到转动副 B_i 点的角加速度以及移动副处的加速度 $\ddot{L}_i$ ，所以直接对杆件速度、角速度进行求导可求得杆件的加速度与角加速度。

对式(18)求导可得

$$\dot{\mathbf{v}}_{i1} = \frac{L_5 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{Bi} \times \mathbf{l}_{li}}{2} - \frac{L_5 |\boldsymbol{\omega}_{Bi}|^2 \cdot \mathbf{l}_{li}}{2} \quad (29)$$

对式(19)求导可得

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i1} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{Bi} \quad (30)$$

对式(21)进行求导可得

$$\dot{\mathbf{v}}_{i2} = \ddot{L}_i \mathbf{l}_{li} + \dot{L}_i \boldsymbol{\omega}_{Bi} \times \mathbf{l}_{li} + \left(L_i - \frac{L_5}{2} \right) \dot{\boldsymbol{\omega}}_{Bi} \times \mathbf{l}_{li} - \left(L_i - \frac{L_5}{2} \right) |\boldsymbol{\omega}_{Bi}|^2 \mathbf{l}_{li} \quad (31)$$

对式(22)求导可得

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i2} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{Bi} \quad (32)$$

对式(24)求导可得

$$\dot{\mathbf{v}}_{i3} = \dot{\mathbf{v}}_{Ei} + \frac{L_0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{Ei} \times \mathbf{l}_{0i}}{2} + \frac{L_0 \boldsymbol{\omega}_{Ei} \times (\boldsymbol{\omega}_{Ei} \times \mathbf{l}_{0i})}{2} \quad (33)$$

对式(25)求导可得

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i3} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{Ei} \quad (34)$$

2 4-RPTR 并联机构动力学分析

通过运动学求得的各杆件运动速度、加速度，对杆件与平台施加惯性矩和惯性力，根据牛顿欧拉方法建立分支各杆件的动力学方程。

根据图 3 写出移动副下连杆的力平衡方程

$$\mathbf{m}_{cl} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{Bix} \\ F_{Biy} \\ F_{Biz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{Gix} \\ F_{Giy} \\ F_{Giz} \end{bmatrix} + \mathbf{f}_{ilc} = 0 \quad (35)$$

式中， $\mathbf{m}_{cl}$ 是移动副下连杆的质量； $\mathbf{f}_{ilc} = -\mathbf{m}_{cl} \cdot \dot{\mathbf{v}}_{il}$ 是移动副下连杆的惯性力； $[F_{Bix}, F_{Biy}, F_{Biz}]^T$ 是转动副 B_i 处的约束反力在定坐标系 $O(X_O, Y_O, Z_O)$ 中的表示，以下力与力矩的表示中，若无特殊说明，则都是在定坐标系下； $[F_{Gix}, F_{Giy}, F_{Giz}]^T$ 是移动副下连杆

所受上连杆的反力。

图3 移动副下连杆受力分析图

因为 B_i 处为转动副在自身坐标系下没有 z 方向的转动约束力矩, 对杆质心取矩

$$\begin{bmatrix} F_{Bix} \\ F_{Biy} \\ F_{Biz} \end{bmatrix} \times \mathbf{B}_i \mathbf{P}_{ci1} + \begin{bmatrix} F_{Gix} \\ F_{Giy} \\ F_{Giz} \end{bmatrix} \times \mathbf{G}_i \mathbf{P}_{ci1} + {}^o \mathbf{R}_i \cdot {}^o \mathbf{R}(i) \cdot \begin{bmatrix} M_{Bix} \\ M_{Biy} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{Gix} \\ M_{Giy} \\ M_{Giz} \end{bmatrix} + \mathbf{M}_{i1c} = 0 \quad (36)$$

$$\mathbf{G}_i \mathbf{P}_{ci1} = 1.5(L_5 - L_i) \cdot \mathbf{l}_{li}$$

式中, G_i 点为移动副上连杆底部端点; $\mathbf{G}_i \mathbf{P}_{ci1}$ 为 G_i 点到移动副下连杆质心的矢量; $[M_{Bix}, M_{Biy}, 0]^T$ 是转动副 B_i 处的约束力矩在坐标系 $B_i(x_{Bi}, y_{Bi}, z_{Bi})$ 下的表示; $[M_{Gix}, M_{Giy}, M_{Giz}]^T$ 是移动副下连杆所受上连杆的约束力矩; ${}^o \mathbf{R}_i$ 是分支坐标系向定坐标系姿态的变换矩阵; $\mathbf{M}_{i1c} = -\mathbf{J}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i1}$ 移动副下连杆的惯性力矩; $\mathbf{J}_1$ 为移动副下连杆质心处的转动惯量矩阵; g 为重力加速度。

根据图4可写出移动副上连杆力平衡方程

$$m_{c2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{Gix} \\ F_{Giy} \\ F_{Giz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{Eix} \\ F_{Eiy} \\ F_{Eiz} \end{bmatrix} + \mathbf{f}_{i2c} = 0 \quad (37)$$

式中, m_{c2} 是移动副上连杆的质量; $[F_{Eix}, F_{Eiy}, F_{Eiz}]^T$ 是关节 E_i 点的关约束力; $\mathbf{f}_{i2c} = -m_{c2} \cdot \dot{\mathbf{v}}_{i2}$ 是移动副上连杆的惯性力。

对移动副上连杆质心取矩得到力矩平衡方程

$$\begin{bmatrix} F_{Gix} \\ F_{Giy} \\ F_{Giz} \end{bmatrix} \times \mathbf{G}_i \mathbf{P}_{ci2} + \begin{bmatrix} F_{Eix} \\ F_{Eiy} \\ F_{Eiz} \end{bmatrix} \times \mathbf{E}_i \mathbf{P}_{ci2} + {}^o \mathbf{R}_i \cdot \begin{bmatrix} M_{Eix} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{Gix} \\ M_{Giy} \\ M_{Giz} \end{bmatrix} + \mathbf{M}_{i2c} = 0 \quad (38)$$

式中, $\mathbf{M}_{i2c} = -\mathbf{J}_2 \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i2}$ 是移动副上连杆质心处的惯性力矩; $\mathbf{J}_2$ 为移动副上连杆质心处的转动惯量矩阵; $[M_{Eix}, 0, 0]^T$ 是关节 E_i 点的关约束力矩在局部坐标系 $E_i(x_{Ei}, y_{Ei}, z_{Ei})$ 下的表示; $\mathbf{G}_i \mathbf{P}_{ci2} = 0.5L_5 \mathbf{l}_{li}$ 为 G_i 点到移动副上连杆质心的矢量; $\mathbf{E}_i \mathbf{P}_{ci2} = -\mathbf{G}_i \mathbf{P}_{ci2}$ 为 E_i 点到移动副上连杆质心的矢量。

图4 移动副上连杆受力分析图

根据图5写出定长杆 $E_i P_i$ 的力平衡方程

$$m_{c3} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{Eix} \\ F_{Eiy} \\ F_{Eiz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{Pix} \\ F_{Piy} \\ F_{Piz} \end{bmatrix} + \mathbf{f}_{i3c} = 0 \quad (39)$$

式中, m_{c3} 定长杆 $E_i P_i$ 的质量; $[F_{Pix}, F_{Piy}, F_{Piz}]^T$ 是转动副 P_i 处的约束反力; $\mathbf{f}_{i3c} = -m_{c3} \cdot \dot{\mathbf{v}}_{i3}$ 是定长杆的惯性力。

图5 定长杆受力分析图

定长杆 $E_i P_i$ 对质心的力矩平衡方程

$$\begin{bmatrix} F_{Eix} \\ F_{Eiy} \\ F_{Eiz} \end{bmatrix} \times \mathbf{E}_i \mathbf{P}_{ci3} + \begin{bmatrix} F_{Pix} \\ F_{Piy} \\ F_{Piz} \end{bmatrix} \times \mathbf{P}_i \mathbf{P}_{ci3} - {}^o \mathbf{R}_i \cdot \begin{bmatrix} M_{Eix} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{Pix} \\ M_{Piy} \\ M_{Piz} \end{bmatrix} + \mathbf{M}_{i3c} = 0 \quad (40)$$

式中, $\mathbf{M}_{i3c} = -\mathbf{J}_3 \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i3}$ 是定长杆的惯性力矩; $\mathbf{J}_3$ 是定长杆转动惯量矩阵; $[M_{Pix}, M_{Piy}, M_{Piz}]^T$ 是转动副 P_i 处的约束力矩; $\mathbf{E}_i \mathbf{P}_{ci3} = 0.5L_0 \mathbf{l}_{0i}$ 为 E_i 点到定长杆质心的

矢量； $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_{ci3} = -\mathbf{E}_i \mathbf{P}_{ci3}$ 为 P_i 点到定长杆质心的矢量。

由图 6 可以得到平台的力平衡方程

$$\sum_{i=1}^{n=4} \begin{bmatrix} F_{pix} \\ F_{piy} \\ F_{piz} \end{bmatrix} + m_o \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} + \mathbf{f}_o = 0 \quad (41)$$

式中， $\mathbf{f}_o = -m_o \cdot \mathbf{a}_o$ 是动平台惯性力；其中 m_o 为动平台质量； $\mathbf{a}_o = [a_x, a_y, a_z]^T$ 是动平台质心的加速度。

图 6 动平台受力分析图

对动平台质心 o' 求力矩可得

$$\sum_{i=1}^{n=4} \begin{bmatrix} F_{pix} \\ F_{piy} \\ F_{piz} \end{bmatrix} \times \mathbf{P}_i \mathbf{o}' + \sum_{i=1}^{n=4} \begin{bmatrix} M_{pix} \\ M_{piy} \\ M_{piz} \end{bmatrix} + \mathbf{M}_{o'} = 0 \quad (42)$$

式中， $\mathbf{M}_{o'} = -\mathbf{J}_{o'} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{o'}$ 是动平台的惯性力矩； $\mathbf{J}_{o'}$ 是动平台转动惯量矩阵； $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{o'} = [0, 0, \dot{\phi}]^T$ 是动平台质心的角加速度； $\mathbf{P}_i \mathbf{o}'$ 是 P_i 点到动平台质心 o' 的矢量。

综上所述我们得到了 78 个方程，但是却有 80 个未知量，缺少两个方程，所以只使用牛顿欧拉法无法求解该动力学问题。

3 空间被动过约束机构补充变形协调方程原理分析

在 2-DOF 平面被动过约束并联机构中，如图 7 所示，由于平行四边形 $A_1A_2B_2B_1$ 、 $A_3A_4B_4B_3$ 结构存在，限制了绕 z 轴的转动，所以机构只有沿 x 、 y 轴方向的两个移动自由度。并且在此机构中动平台 $A_1A_2A_3A_4$ 的位姿可以由 $A_iB_i (i=1-4)$ 中任意三条支链来确定，因此第四条支链的引入造成了机构的过约束，同时，四条支链中杆件的轴向力是引起被动过约束的原因，所以只考虑四条支链杆件的挤压变形建立变形协调方程就能够使动力学方程得以求解。

对于 4-RPTR 空间被动过约束并联机构而言，如图 8 所示，建立各分支的运动螺旋

$$\begin{cases} \mathbf{\$}_{i1} = (0, 1, 0; 0, 0, R_{i1}) \\ \mathbf{\$}_{i2} = (0, 0, 0; v_{i2}, 0, n_{i2}) \\ \mathbf{\$}_{i3} = (0, 1, 0; P_{i3}, 0, R_{i3}) \\ \mathbf{\$}_{i4} = (0, 0, 1; 0, Q_{i4}, 0) \\ \mathbf{\$}_{i5} = (0, 0, 1; P_{i5}, Q_{i5}, 0) \end{cases} \quad (43)$$

式中， v_{i2} 、 n_{i2} 为移动副轴线方向余弦， R_{i1} 、 P_{i3} 、 R_{i3} 、 Q_{i4} 、 P_{i5} 、 Q_{i5} 为由相应位置决定的参数，求得各分支的反螺旋为

$$\mathbf{\$}_i^r = (0, 0, 0; 1, 0, 0) \quad (44)$$

由此得到四个分支对动平台的约束

$$\begin{cases} \mathbf{\$}_1^r = (0, 0, 0; 1, 0, 0) \\ \mathbf{\$}_2^r = (0, 0, 0; 0, 1, 0) \end{cases} \quad (45)$$

图 7 2-DOF 平面被动过约束并联机构简图

图 8 4-RPTR 空间被动过约束并联机构运动螺旋示意图

四个分支约束了两个自由度，所以有两个被动过约束(冗余约束)，造成冗余约束的原因为末端转动副的约束力矩，即 M_{P1x} 、 M_{P2y} 、 M_{P3x} 、 M_{P4y} 。

同时考虑到机构的实际使用情况，机构因承受载荷，平台重力、惯性力以及杆件重力、惯性力的影响造成杆件挤压的变形与各分支冗余约束力矩引起的定长杆件弯曲变形是不可避免的，无法通过分支自带自由度进行调节，所以补充变形协调方程时考虑杆件的挤压变形和冗余约束力矩引起的弯曲变

形,在此基础上,进一步在分支矢量链的表达式中建立起上述两种变形叠加产生的形变量与末端平台位姿误差的方程,由此可补充8个变形协调方程,结合牛顿欧拉法所建动力学方程,共得到86个方程,且方程线性无关,末端平台误差在空间运动的情况下有6个分量,即引入6个未知量,共包含86个未知量,从而使得方程能够求解。

在4-RPTR空间被动过约束机构的动力学建模中,经分析发现,若不分析产生被动过约束的原因,直接采用文献[9]中补充变形协调方程的方法,只考虑杆件轴向变形而不考虑冗余约束力矩造成的弯曲变形,会使得补充的变形协调方程与基于牛顿欧拉法所建的方程线性相关,方程无法求解。被动过约束机构建立动力学模型时,因为冗余的约束力或力矩使得方程未知数增加,结合材料力学中补充变形协调方程的方法,即通过材料的固有性质,如弹性模量,计算出造成机构过约束的力或力矩引起的材料变形,建立形变量之间彼此存在的几何关系,把冗余的未知数串联起来,通过以上分析平面和空间被动过约束机构动力学建模时补充变形协调方程的方法可知,对于被动过约束机构,补充变形协调方程时,应首先分析机构产生被动过约束的原因,再进一步由冗余约束力或力矩造成的杆件变形补充变形协调方程。

4 变形协调性分析下的动力学建模

4.1 支链变形与动平台位姿误差关系

由于支链的杆件的形变会造成平台末端的3个移动误差为 $\Delta \mathbf{t} = [\Delta x, \Delta y, \Delta z]^T$;以及3个转动误差引起的旋转变换矩阵为

$$\delta {}^O_o \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & \delta y \\ \delta z & 1 & -\delta x \\ -\delta y & \delta x & 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

考虑移动副上连杆和定长杆挤压变形以及定长杆因冗余约束力矩产生的弯曲变形,所以建立矢量链时由移动副上连杆底部 G_i 点开始。

在发生形变前支链的矢量链方程

$$\mathbf{OG}_i + L_5 \cdot \mathbf{l}_{li} + L_0 \cdot \mathbf{l}_{0i} = \mathbf{p} + {}^O_o \mathbf{R} \cdot \mathbf{o}' \mathbf{P}_i \quad (47)$$

发生形变后,此时式(47)变为

$$\mathbf{OG}_i + L_5 \cdot (\mathbf{l}_{li} + \delta \mathbf{l}_{li}) + L_0 \cdot (\mathbf{l}_{0i} + \delta \mathbf{l}_{0i}) + \Delta \mathbf{t}_i = \mathbf{p} + \Delta \mathbf{t} + \delta {}^O_o \mathbf{R} \cdot {}^O_o \mathbf{R} \cdot \mathbf{o}' \mathbf{P}_i \quad (48)$$

式(48)减去式(47)后,可得

$$L_5 \cdot \delta \mathbf{l}_{li} + L_0 \cdot \delta \mathbf{l}_{0i} = -\Delta \mathbf{t}_i + \Delta \mathbf{t} + (\delta {}^O_o \mathbf{R} - \mathbf{I}_3) \cdot {}^O_o \mathbf{R} \cdot \mathbf{o}' \mathbf{P}_i \quad (49)$$

上式左右两边点乘 $\mathbf{l}_{li}$ 可得

$$\Delta L_{5i} + \Delta L_{0i} \mathbf{l}_{0i} \cdot \mathbf{l}_{li} = [-\Delta \mathbf{t}_i + \Delta \mathbf{t} + (\delta {}^O_o \mathbf{R} - \mathbf{I}_3) \cdot {}^O_o \mathbf{R} \cdot \mathbf{o}' \mathbf{P}_i] \cdot \mathbf{l}_{li} \quad (50)$$

左右两边点乘 $\mathbf{l}_{0i}$ 可得

$$\Delta L_{5i} \mathbf{l}_{li} \cdot \mathbf{l}_{0i} + \Delta L_{0i} = [-\Delta \mathbf{t}_i + \Delta \mathbf{t} + (\delta {}^O_o \mathbf{R} - \mathbf{I}_3) \cdot {}^O_o \mathbf{R} \cdot \mathbf{o}' \mathbf{P}_i] \cdot \mathbf{l}_{0i} \quad (51)$$

式中, ΔL_{5i} 是移动副上连杆的变形; ΔL_{0i} 是定长杆变形量; $\Delta \mathbf{t}_i$ 为冗余约束力矩引起的定长杆弯曲形变位移。

下面建立杆件变形量与之前引入的80个未知量之间的关系,这样补充了8个方程,只引入了6个未知量。

4.2 机构支链杆件变形求解

通过求得杆件的变形 ΔL_{5i} 、 ΔL_{0i} 和 $\Delta \mathbf{t}_i$,使得平台的位姿误差与杆件的受力联系起来,从而使得方程可以求解。

图9为支链移动副上连杆轴向变形受力示意图,只考虑轴向变形的情况下,只需要研究轴向受力即可,图中 $\mathbf{p}_{2i} = m_{c2} \cdot [0, 0, -g]^T / L_5$ 为杆上的重力的均布力, $\mathbf{q}_{2i} = -m_{c2} \cdot \dot{\mathbf{v}}_{i2} / L_5$ 为杆上的惯性力的均布力。

图9 移动副上连杆轴向变形受力分析示意图

距离 G_i 点为 x_1 处杆件的轴向力为

$$\mathbf{Fd}_{2i} = \begin{bmatrix} F_{Eix} \\ F_{Eiy} \\ F_{Eiz} \end{bmatrix} - m_{c2} \cdot \dot{\mathbf{v}}_{i2} \cdot \left(\frac{L_5 - x_1}{L_5} \right) + m_{c2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{L_5 - x_1}{L_5} \right) \cdot \mathbf{l}_{li} \quad (52)$$

杆的轴向变形可以求得

$$\Delta L_{5i} = \int_0^{L_5} \frac{\mathbf{Fd}_{2i} \cdot \mathbf{dx}_1}{E \cdot V_1} \quad (53)$$

式中, V_1 是移动副上连杆的截面积; E 是弹性模量。

图10为定长杆轴向变形受力分析示意图,其中 $\mathbf{p}_{3i} = m_{c3} \cdot [0, 0, -g]^T / L_0$ 为杆上的重力的均布力; $\mathbf{q}_{3i} = -m_{c3} \cdot \dot{\mathbf{v}}_{i3} / L_0$ 为杆上的惯性力的均布力。

距离 E_i 为 x_2 处定长杆件的轴向力为

图 10 定长杆轴向变形受力分析示意图

$$\mathbf{F}d_{0i} = \begin{bmatrix} F_{pix} \\ F_{piy} \\ F_{piz} \end{bmatrix} - m_{c0} \cdot \dot{v}_{i3} \cdot \begin{pmatrix} L_0 - x_2 \\ L_0 \end{pmatrix} + m_{c0} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_0 - x_2 \\ L_0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{l}_{0i} \quad (54)$$

杆的轴向变形可以求得

$$\Delta L_{0i} = \int_0^{L_0} \frac{\mathbf{F}d_{0i}}{E \cdot V_0} \cdot dx_2 \quad (55)$$

式中, V_0 为定长杆的截面面积。

求取因冗余力矩引起的弯曲变形步骤如下将冗余力矩 M_{Pi} 转换为垂直和平行于 $\mathbf{E}_i \mathbf{P}_i$ 的两个偶量, 沿杆方向的衍生为杆方向的扭转, 但是因为默认关节为刚体, 所以只考虑垂直杆件的弯曲变形, 可求得挠度。

冗余约束力矩 M_{Pi} 与定长杆 $\mathbf{l}_{0i}$ 夹角的正余弦

$$\cos \theta_{bi} = \mathbf{l}_{0i} \cdot {}^o \mathbf{R}_i \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\sin \theta_{bi} = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_{bi}} \quad (57)$$

惯性矩为

$$I = \frac{\pi \cdot R^4}{4} \quad (58)$$

因弯曲应力造成的挠度

$$f_{bi} = \frac{(M_{Pi} \cdot \sin \theta_{bi}) \cdot L_0^2}{2EI} \quad (59)$$

$$M_{P1} = M_{P1x} \quad M_{P2} = M_{P2y}$$

$$M_{P3} = M_{P3x} \quad M_{P4} = M_{P4y}$$

弯曲变形方向的方向矢量

$$\mathbf{l}_{bi} = \begin{pmatrix} {}^o \mathbf{R}_i \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \times \mathbf{l}_{0i} \quad (60)$$

式中, $[1, 0, 0]^T$ 为冗余约束力矩 M_{Pi} 的方向矢量分支

坐标系 $E_i(x_{Ei}, y_{Ei}, z_{Ei})$ 中的表示。

挠度的矢量表示

$$\Delta \mathbf{l}_i = \mathbf{f}_{bi} \cdot \mathbf{l}_{bi} \quad (61)$$

联立上面全部的方程可以得到 86 个方程, 86 个未知量, 方程可解。

解得全部约束力后, 可得驱动力

$$\begin{bmatrix} F_{Gix} \\ F_{Giy} \\ F_{Giz} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{l}_{li} = F_{si} \quad (62)$$

5 动力学仿真

5.1 机构末端运动轨迹规划

对平台的轨迹进行规划, 使平台在 x 、 y 平面运动轨迹为圆形, z 轴方向做上下移动, 锁定 z 轴转动, 运动轨迹表达式为

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{10} [\sin(t) - \cos(t)] \\ y = \frac{\sqrt{2}}{10} [\sin(t) + \cos(t)] \\ z = 1 + 0.1 \sin(t) \\ \phi = \frac{\pi}{12} \end{cases} \quad (63)$$

5.2 驱动力仿真

确定运动轨迹后, 首先在 SolidWorks 中里建立机构的三维模型(图 11), 机构参数如表 1 所示, 然后将三维模型导入 ADAMS 软件中, 杆件材料类型定义为铸铁, 动平台以及各个关节默认为刚体^[13-14], 四个移动副为驱动副, 将末端运动轨迹导入 ADAMS 与 Matlab 软件中分别进行动力学仿真与数值计算, 最后将二者仿真结果进行对比, 以验证动力学建模方法的正确性。

图 11 机构 ADAMS 三维仿真模型

表 1 4-RPTR 机构参数

参数	数值
动平台质量/kg	60.365 407 280 7
移动副下连杆质量/kg	10.678 394 915 4
移动副上连杆质量/kg	11.635 363 301 9
定长杆质量/kg	11.063 711 539 7
静平台对角线长度/m	1.6
动平台对角线长度/m	0.7
移动副上下连杆长度/m	0.5

(续)

参数	数值
定长杆与平台法线夹角/rad	$\pi/3$
定长杆长度/m	0.5

图 12、13 为在 ADAMS 与 Matlab 中计算的在上述路径下的仿真驱动力曲线。

从图 12、图 13 中可以看出, Matlab 数值计算与 ADAMS 软件仿真导出的驱动力曲线趋势相同, 峰值误差在 3% 以内, 证明了所建动力学模型的正确性。

图 12 相同末端运动轨迹下 ADAMS 仿真驱动力曲线

图 13 相同末端运动轨迹下 Matlab 仿真驱动力曲线

6 结论

(1) 采用牛顿欧拉法结合补充变形协调方程建立了 4-RPTR 空间被动过约束并联机构的动力学模型, 在给定轨迹的条件下, 通过 Matlab 与 ADAMS 软件仿真, 证明了该动力学模型的正确性, 为后续动力学控制研究奠定基础。

(2) 建模过程中发现, 在沿用平面被动过约束机构动力学建模方法, 即仅考虑杆件拉压变形建立变形协调补充方程时, 所添加的变形协调方程会与基于牛顿欧拉法所建动力学方程线性相关, 使得方

程无法求解, 也意味着直接将平面被动过约束机构动力学建模补充变形协调方程的方法应用于空间被动过约束并联机构是不可行的。

(3) 通过对空间并联机构被动过约束的分析, 提出在补充变形协调方程时, 应首先分析机构产生冗余约束的原因, 在此基础上, 引入冗余约束力或力矩引起的杆件变形与末端平台位姿误差的关系, 可以保证所添加的变形协调方程与基于牛顿欧拉法所建动力学方程线性无关, 使得方程可以求解。

参 考 文 献

- [1] 赵永生, 许允斗, 姚建涛, 等. 一种过约束并联机构受

- 力分析的方法[J]. 中国机械工程, 2014, 25(6): 711-717.
- ZHAO Yongsheng, XU Yundou, YAO Jiantao, et al. A force analysis method for overconstrained parallel mechanisms[J]. China Mechanical Engineering, 2014, 25(6): 711-717.
- [2] AZIZI M R, NADERI D. Dynamic modeling and trajectory planning for a mobile spherical robot with a 3-Dof inner mechanism[J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 64(1): 251-261.
- [3] 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学[M]. 高等教育出版社, 2006.
- HUANG Zhen, ZHAO Yongsheng, ZHAO Tieshi. Advanced spatial mechanism[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006.
- [4] GHERMAN B, PISLA D, UAIDA C, et al. Development of inverse dynamic model for a surgical hybrid parallel robot with equivalent lumped masses[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2012, 28(3): 402-415.
- [5] TSAI L W. Solving the inverse dynamics of a Stewart platform manipulator by the principle of virtual work[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2000, 122(1): 3-9.
- [6] ZHAO Yongjie, GAO Feng. Inverse dynamics of the 6-dof out-parallel manipulator by means of the principle of virtual work[J]. Robotica, 2009, 27(2): 259-268.
- [7] FRACZEK J, WOJTYRA M. On the unique solvability of a direct dynamics problem for mechanisms with redundant constraints and Coulomb friction in joints[J]. Mechanism & Machine Theory, 2011, 46(3): 312-334.
- [8] 赵燕, 黄真. 含过约束力偶的少自由度并联机构的受力分析[J]. 机械工程学报, 2010, 46(5): 15-21.
- ZHAO Yan, HUANG Zhen. Force analysis of lower-mobility parallel mechanisms with over-constrained couples[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(5): 15-21.
- [9] 姜晓, 李铁民, 王立平. 过约束并联机构动力学建模方法[J]. 机械工程学报, 2013, 49(17): 123-129.
- JIANG Yao, LI Tiemin, WANG Liping. Research on the dynamic model of an over-constrained parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(17): 123-129.
- [10] 李永泉, 宋肇经, 郭菲, 等. 多能域过约束并联机器人系统动力学建模方法[J]. 机械工程学报, 2016, 52(21): 17-25.
- LI Yongquan, SONG Yijing, GUO Fei, et al. Dynamic modeling method for overconstrained multi-energy domain parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(21): 17-25.
- [11] 胡波, 路懿, 许佳音, 等. 新型过约束并联机构 2RPU+UPU 动力学模型[J]. 机械工程学报, 2011, 47(11): 36-43.
- HU Bo, LU Wei, XU Jiayin, et al. Solving kinematics for a novel over-constrained 2UPR+UPU parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(11): 36-43.
- [12] 李永泉. 一种新型 4-RPTR 并联机构的运动学分析及仿真研究[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2005.
- LI Yongquan. The kinematic analysis and simulation research of a kind of new type 4-RPTR parallel mechanism[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2005.
- [13] 许允斗, 姚建涛, 赵永生. 基于几何约束条件过约束并联机构自由度瞬时性的简便判别方法[J]. 机械工程学报, 2013, 49(5): 10-16.
- XU Yundou, YAO Jiantao, ZHAO Yongsheng. Simple methods for distinguishing instantaneity of mobility of the overconstrained parallel mechanism based on the geometric constraint conditions[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(5): 10-16.
- [14] 赵永生, 刘文兰, 许允斗, 等. 一种过约束并联机构受力的数值仿真分析方法[J]. 中国机械工程, 2015, 26(12): 1576-1583.
- ZHAO Yongsheng, LIU Wenlan, XU Yundou, et al. A numerical simulation method for force analysis of an over-constrained PM[J]. China Mechanical Engineering, 2015, 26(12): 1576-1583.

作者简介: 李永泉, 男, 1979 年出生, 副教授, 硕士研究生导师。主要研究方向为并联机构及机器人技术。发表论文 20 余篇。

E-mail: lijia197879@sina.com

郭雨, 男, 1994 年出生, 硕士研究生。主要研究方向为并联机器人控制技术。

E-mail: 815035926@qq.com

张阳, 男, 1994 年出生, 硕士研究生。主要研究方向为并联机器人型综合。

E-mail: 1623641500@qq.com

张立杰(通信作者), 男, 1969 年出生, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为并联机构及机器人技术、液压系统集成及控制技术。发表论文 50 余篇。

E-mail: ljzhang@ysu.edu.cn