DOI: 10.3901/JME.2020.09.018

机械臂动力学分析及关节非线性摩擦模型建立*

段书用^{1,2} 李昌洛^{1,2} 韩旭^{1,2} 刘桂荣³

(1. 省部共建电工装备可靠性与智能化国家重点实验室(河北工业大学) 天津 300131;

2. 河北工业大学机械工程学院 天津 300131;

3. 辛辛那提大学航空工程和机械工程系 辛辛那提 45221 美国)

摘要: 现有研究大多采用分段线性组合而成的拟非线性摩擦模型来描述机械臂各关节摩擦力矩大小及其分布,忽略了低速区关节摩擦的实际非线性变化,而该非线性变化恰恰是影响机械臂轨迹精度及稳定性的关键因素之一。基于此,着重研究机械臂关节非线性摩擦模型及其对机械臂末端轨迹的影响。对多关节机械臂进行几何机构建模,对任意设定的机械臂理想运动轨迹,通过机构运动学分析得到各关节的角位移、角速度和角加速度。考虑非线性摩擦,建立高可靠性的关节非线性摩擦的一般模型。对给定的理想运动轨迹下的角位移、角速度和角加速度进行 Newton-Euler 反向动力学分析,从而得到各关节的非线性驱动力矩。基于一般非线性摩擦模型,将得到的驱动力矩代入正向动力学模型中得到机械臂末端实际的运动轨迹。通过上述分析步骤,深入研究各关节在不同类型驱动力矩组合条件下对机械臂末端运动轨迹、及各关节角位移的影响。研究结果表明机械臂各关节的不同摩擦形式对末端运行轨迹影响显著,各关节驱动力矩的变化对其相邻关节的角位移也有明显影响。

关键词: 机械臂; 非线性摩擦模型; 动力学建模; Newton-Euler 法; 正-反向动力学; 机械臂运动学; 运动轨迹

中图分类号: TP242

Forward-inverse Dynamics Analysis of Robot Arm Trajectories and Development of a Nonlinear Friction Model for Robot Joints

DUAN Shuyong^{1,2} LI Changluo^{1,2} HAN Xu^{1,2} LIU Guirong³

(1. State Key Laboratory of Reliability and Intelligence of Electrical Equipment, Hebei University of Technology, Tianjin 300131;

2. School of Mechanical Engineering, Hebei University of Technology, Tianjin 300131;

3. Aeronautical Engineering and Mechanical Engineering, University of Cincinnati, Cincinnati 45221, USA)

Abstract: Piecewise linear friction in the joints is often used to model dynamic behavior of robot arms. Nonlinear friction has been, however, found as one of the key factors to determine the dynamic jitter trajectory of robot arm tips. It is studied that the nonlinear friction model of the robot joints and its influence on the dynamic trajectory of robots. A kinematic model is established for multi-joint robots, using which the angular displacement, velocity and acceleration of joints are obtained for any planned trajectory. The Newton-Euler inverse dynamics analysis is then carried out to find out the forces and torques at the joints considering nonlinear frictions, for a given trajectory at the arm-tip. These forces and torques are substituted applied into the forward dynamics model to obtain the actual trajectory of the arm-tip. Using our analysis procedure, the influence of different driving torques on the trajectory and the angular displacement of each joint are studied in great detail. The results show that the nonlinear friction has a significantly influence on the trajectory of the arm-tip. The present forward and inverse dynamic analysis procedure and the nonlinear friction model proposed in this work provide a useful analytic and modeling tool for the development of high-precision robots.

Keywords: robot arm; nonlinear friction model; dynamic modeling; Newton-Euler methods; forward-inverse dynamics; robot arm kinematics; motion trajectory

* 国家重点研发计划(2017YFB1301300)和国家自然科学基金青年基金(11902110)资助项目。20190528 收到初稿, 20190925 收到修改稿

0 前言

机械臂末端运动轨迹的精度与平稳性是衡量高端机械臂工作性能的重要指标。关节作为机械臂的关键基本组件对其末端轨迹生成有着重要的影响^[1]。当机械臂运动时,其各关节受重力、惯性力、科氏力和摩擦力等诸力的综合作用,其中关节摩擦计算的准确性决定了机械臂各关节摩擦力矩与驱动力矩的匹配性。当机械臂各关节摩擦力矩与驱动力矩不匹配将导致机械臂末端在运动时产生爬行、抖动等现象,严重影响机械臂的轨迹精度与平稳性等^[2-3]。

机械臂关节摩擦通常被模拟为一个由库仑摩擦、黏滞摩擦、黏滞摩擦和斯特里贝克摩擦的线性组合或分段线性组合的摩擦模型^[4-14]。有些研究着眼于库仑摩擦和黏滞摩擦对运动轨迹的影响,提出了一种凸松弛方法完成时间最优轨迹和前馈控制,用以解决机械臂的非凸问题^[5-6],但该方法没考虑由斯特里贝克摩擦产生的影响。有些研究仅考虑机械臂关节的黏性摩擦效应对运动轨迹的影响^[7],而有些研究则仅考虑库仑摩擦和黏性摩擦总体效应对机械臂运动轨迹的影响,忽略了机械臂在低速区域的实际非线性分布^[8-9]。还有一些研究提出了包含库仑摩擦、黏性摩擦和斯特里贝克效应的机械臂关节摩擦模型,但没考虑机械臂快速运动时,关节摩擦力与速度的关系^[10-11]。

基于现有研究的不足,文中首先建立了三维多关节机械臂运动学模型,通过大量精细的正-反向运动学分析提出了关节非线性摩擦的一般模型。该模型充分考虑了机械臂关节摩擦在低速区时的非线性客观事实,又结合了关节摩擦随速度增加而变化的特点,重点研究了机械臂关节的非线性摩擦模型及其对机械臂末端轨迹的影响规律,为后期的机械臂系统高精设计、分析和控制奠定理论基础和分析手段。

1 多关节机械臂机构运动学模型及其机构运动学求解

多关节机械臂对提高制造业的智能制造水平以及人们的日常生活具有非常重要的意义,并已成为现阶段人类科技发展的重要战略。为提高高精机械臂的国际竞争水平,详细研究影响其运动轨迹精度的各种因素是十分必要的。作者前期研究发现机械臂的关节摩擦是影响机械臂运动轨迹的关键因素之一。因此,这篇文章以多关节机械臂为研究对象,

建立其机构运动学模型并对其进行机构运动学求解,为后续的反动力学求解提供机械臂末端的理想轨迹、角位移、角速度以及角加速度。文中具体的分析流程如图 1 所示。

图 1 机械臂机构运动学与动力学求解流程图

1.1 几何机构建模

本文以六轴串联机械臂为研究对象,其简化模型如图 2 所示。机械臂的 Denavit-Hartenberg Matrix (D-H)参数如表 1 所示^[14],其中 α_i 表示局部坐标系 $\{i\}$ 的 z 轴相对于局部坐标系 $\{i-1\}$ 的 z 轴的旋转角, θ_i 表示局部坐标系 $\{i\}$ 的 x 轴相对于局部坐标系 $\{i-1\}$ 的 x 轴的旋转角位移, a_i 表示局部坐标系 $\{i\}$ 的 z 轴与局部坐标系 $\{i-1\}$ 的 z 轴之间的公垂线长度,其中 d_i 表示局部坐标系 $\{i\}$ 的 x 轴与局部坐标系 $\{i-1\}$ 的 x 轴的公垂线长度。将机械臂关节的 D-H 参数输入到 Matlab Robotics toolbox(RTB)^[12],建立机械臂机构运动学模型,如图 3 所示。

图 2 六轴串联机械臂几何机构简化模型

表1 六轴机械臂各连杆的D-H参数

	α_i/rad	θ_i/rad	d_i/rad	a_i/rad
连杆1	$\pi/2$	θ_1	0	0.121 5
连杆2	0	θ_2	0.408	-0.140 5
连杆3	0	θ_3	0.376	0.140 5
连杆4	$\pi/2$	θ_4	0	-0.102 5
连杆5	$-\pi/2$	θ_5	0	0.102 5
连杆6	π	θ_6	0	-0.094 0

图3 六轴串联机械臂的机构运动学模型

1.2 机构运动学规划

基于已建立的机械臂模型进行机构运动学规划,即机械臂末端运动轨迹的规划与生成。以该机械臂末端在 xz 平面内做直线运动为例,设机械臂的理想运行轨迹为如图4所示的直线。为了直观描述摩擦力矩对机械臂末端生成轨迹的影响,具有相同的起止点与形状的轨迹将用于不同类型的非线性摩擦模型的分析中。

图4 在 xz 平面内机械臂末端理想直线运动轨迹

1.3 机构运动学求解

根据规划的直线运动轨迹,对机械臂进行非线性机构运动学求解^[15-17]。

(1) 机械臂末端坐标系到基座固定坐标系的变换矩阵为

$${}^0T = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \quad (1)$$

式中, ${}^i_{i+1}T$ 为关节坐标系 $\{i\}$ 到 $\{i+1\}$ 的变换矩阵。

(2) 通过恒等变换得到

$${}^0T^{-1} {}^0T_6 {}^5T_6 {}^5T^{-1} = {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T = {}^1T_5 \quad (2)$$

由矩阵内部的元素等式计算得到关节1, 关节5与关节6的角位移。

以计算关节1角位移为例, 设

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中, $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$, $\mathbf{o} = (o_x, o_y, o_z)^T$, $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$ 为方向矢量, $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)^T$ 为位置矢量, 可以得到关节1的角位移为

$$\theta_1 = \pm \arccos \left(\frac{d_4}{\sqrt{(d_6 a_y - p_y)^2 + (p_x - d_6 a_x)^2}} \right) + \arctan \left(\frac{p_x - d_6 a_x}{d_6 a_y - p_y} \right)$$

(3) 基于步骤(2), 计算得到关节2, 关节3与关节4的角位移

$${}^0T^{-1} {}^0T_6 {}^5T_6 {}^5T^{-1} {}^4T^{-1} = {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T = {}^1T_4 \quad (3)$$

由上述分析知, 机械臂各关节在特定的末端轨迹条件下, 角位移、角速度以及角加速度可以不随时间的变化而改变。

以机械臂在1 s内完成直线运动轨迹为例, 求得其各关节的角位移、角速度与角加速度随时间变化的曲线图, 如图5~7所示。其中图5为机械臂关节角位移-时间曲线, 图6为机械臂关节角速度-时间曲线, 图7为机械臂关节角加速度-时间曲线。综合图5~7分析知, 机械臂末端在1 s内的直线运动过程中, 关节2、3、4的角位移、角速度以及角加速度都随运动时间在变化, 关节1、5、6的角位移、角速度以及角加速度都不随时间的变化而改变。因此, 可以判断在这一运动过程中机械臂的主要运动关节为关节2、3和4, 该关节对机械臂末端生成轨迹的精度将有较大影响。

图 5 时间-关节角位移曲线

图 6 时间-关节角速度曲线

图 7 时间-关节角加速度曲线

2 摩擦模型

2.1 拟非线性摩擦模型

文中所述的拟非线性摩擦模型是由库仑摩擦和黏性摩擦组合形成的简化模型^[12](该模型在角速度 $[-\dot{\theta}, \dot{\theta}]$ 区间内为分段线性组合成的非线性函数, 为与第 2.2 节提出的一般非线性摩擦模型区分, 文中

统称该模型为“拟非线性摩擦模型”)。它假设在转子克服最大静摩擦力矩后仅受库仑摩擦力矩作用, 随着转子转速的提高, 出现黏性摩擦阻力矩, 且与转速成线性正比, 如图 8 所示, 图中 τ_{fs} 表示最大静摩擦力矩。为了计算的简便通常情况下不考虑低速区的非线性现象, 将低速区摩擦力矩变化仍视为与关节角速度 $\dot{\theta}$ 成线性正比, 但这一替代的力矩值一般要比实际值小, 其数学模型如式(4)、(5)所示

$$\tau_{f\dot{\theta}} = r\dot{\theta} + \tau_c \quad (4)$$

$$\tau_c = \begin{cases} 0 & \dot{\theta} = 0 \\ \tau_{c2} & \dot{\theta} > 0 \\ \tau_{c1} & \dot{\theta} < 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中, $\tau_{f\dot{\theta}}$ 表示摩擦力矩, r 表示黏性摩擦因数, $\dot{\theta}$ 表示关节角速度, τ_c 表示库仑摩擦力矩, τ_{c1} 、 τ_{c2} 分别表示转子正转与反转的库仑摩擦力矩。由于机械臂电动机正转时接触面的材料及正压力与其反转时基本一致, 而库仑摩擦力等于接触面的材料所决定的摩擦因数与正压力的乘积, 因此可以认为 $|\tau_{c2}| = |\tau_{c1}|$ 。

图 8 拟非线性摩擦模型的角速度与摩擦力矩间的关系

2.2 一般非线性摩擦模型

在实际情况下, 当机械臂关节克服静摩擦力以后, 关节摩擦力矩在低速区域随着角速度的增加反而下降, 即斯特里贝克效应^[13]。第 2.1 节中的拟非线性摩擦模型在低速区域内的摩擦力矩是线性递增的, 在低速区域内相同速度的拟非线性摩擦力矩值小于斯特里贝克效应下的摩擦力矩值, 且速度越低差值越大。因此在低速区域内, 用斯特里贝克效应摩擦力矩值替代拟非线性摩擦模型的力矩值可以得到一般非线性关节摩擦模型(图 9)。根据文献[13]所提出的物体在平移运动下的一般非线性摩擦模型, 文中提出该模型在旋转运动情况下的表达式为

$$\tau_{f\dot{\theta}} = \begin{cases} \tau_{c1} + (\tau_{fs} - \tau_{c1}) \exp\left(-\left(\frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}_s}\right)^\delta\right) + r\dot{\theta} & \dot{\theta} > 0 \\ \tau_{c2} - (\tau_{fs} + \tau_{c2}) \exp\left(-\left(\frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}_s}\right)^\delta\right) + r\dot{\theta} & \dot{\theta} < 0 \\ \tau_{fs} \operatorname{sgn}(T_{\text{out}}) & \dot{\theta} = 0, |T_{\text{out}}| > \tau_{fs} \\ T_{\text{out}} & \dot{\theta} = 0, |T_{\text{out}}| \leq \tau_{fs} \end{cases} \quad (6)$$

式中, T_{out} 为外作用力矩。 $\operatorname{sgn}(T)$ 为符号函数 τ_{fs} 为最大静摩擦力矩。 $\dot{\theta}_s$ 为斯特里贝克角速度, δ 为指数因子, 它们都为经验常数^[13]。当 $\delta=1$ 时为 Tustin 模型; $\delta=2$ 时为 Gauss 指数模型, 该模型能以 90% 的精度近似拟合低速区域的真实摩擦力^[13]。所以文中采用 Gauss 非线性摩擦模型来模拟机械臂实际摩擦力矩。

图9 一般非线性摩擦模型的角速度与摩擦力矩间的关系^[12]

3 机械臂动力学分析模型

基于第2节建立的机械臂机构运动学和关节摩擦模型, 文中将机械臂各连杆的动力学参数(表2)输入到第3.1节建立的一系列动力学方程中。通过反动力学方程来计算关节的驱动力矩。再通过正动力学方程来获得关节的实际角位移、角速度与角加速度。

3.1 机械臂动力学分析

文中采用拟非线性摩擦模型和一般非线性摩擦模型对机械臂进行反动力学分析。第一步, 在相同的时间段内让机械臂末端在平面内做如图4所示的直线运动, 分别求出机械臂在拟非线性摩擦模型下各关节的力矩值、以及在一般非线性摩擦模型下各关节的力矩值; 第二步, 用上一步得

表2 六轴机械臂各连杆动力学分析所需参数

	质量/kg	质心相对于连杆坐标系位置/m	惯性张量/(kg·m ²)
连杆1	6.531	[0.001 027, 0, 0.068 666]	$\begin{bmatrix} 0.023 & 0 & 0 \\ 0 & 0.023 & 0 \\ 0 & 0 & 0.015 \end{bmatrix}$
连杆2	5.54	[0.068 709, 0, -0.109 791]	$\begin{bmatrix} 0.057 & 0 & 0 \\ 0 & 0.06 & 0.002 \\ 0 & -0.002 & 0.013 \end{bmatrix}$
连杆3	6.342	[0.030 903, 0.000 001, 0.045 673]	$\begin{bmatrix} 0.066 & 0 & -0.016 \\ 0 & 0.046 & 0 \\ 0.016 & 0 & -0.029 \end{bmatrix}$
连杆4	1.6	[0, -0.000 568, -0.010 869]	$\begin{bmatrix} 0.002 & 0 & 0 \\ 0 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$
连杆5	1.6	[0, -0.000 568, 0.010 869]	$\begin{bmatrix} 0.002 & 0 & 0 \\ 0 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$
连杆6	2.034	[0, -0.026 836, -0.000 521]	$\begin{bmatrix} 0.004 & 0 & 0 \\ 0 & 0.004 & 0 \\ 0 & 0 & 0.004 \end{bmatrix}$

到的力矩值驱动机械臂在一般非线性摩擦模型条件下完成与第一步相同的时间-位移轨迹。具体实现过程如下所述。

首先, 基于第1.1节中已建立的机构运动学模型, 在RTB中利用笛卡儿轨迹生成函数^[12]获取图4中设定的理想直线运动轨迹以及通过机构运动学分析得到六个关节角在各时刻的角位移, 角速度以及角加速度。接着, 基于机械臂各关节的拟非线性线性摩擦及一般非线性摩擦模型, 将理想轨迹条件下获得的角位移, 角速度以及角加速度代入RTB内, 并用经典的非线性递归Newton-Euler算法^[14]反向计算出机械臂六个关节在各个时刻的驱动力矩。最后, 在各关节摩擦为一般非线性条件下, 将已得到的驱动力矩代入RTB内的Newton-Euler法变换形式^[14]正向计算出机械臂各关节的角位移与角速度及机械臂末端实际轨迹。

3.1.1 考虑摩擦力矩的递归Newton-Euler算法

递归Newton-Euler算法联立了牛顿力学方程与欧拉方程, 其中牛顿方程是针对平移刚体的力与加速度的关系, 欧拉方程是表示转动刚体力矩与角加速度的关系。由于机械臂连杆柔性特征对其运动轨迹的影响不明显, 所以将机械臂的所有连杆都视为刚体。连杆所需的力是关于连杆期望加速度及其质量分布的函数^[14]。连杆期望加速度可由第1.3节所做的机构运动学求解得到, 而整体质量分布特征可由表2得到。递归Newton-Euler算法求解过程可以分为两步: 第一步是向外递归, 由机械臂底座向关

节末端进行递归, 得到各连杆速度与加速度; 第二步是向内递归, 即由机械臂末端连杆向底座进行递归, 计算出连杆间的相互作用力矩与关节驱动力矩^[14]。以图 10 为例对向外递归与向内递归方法进行说明, 图中描述了两相邻连杆的受力情况, F_i , N_i 表示作用在连杆 i 上的外力与外力矩, $\{i\}$ 、 $\{i+1\}$ 分别代表以关节 i 与关节 $i+1$ 建立的局部坐标系, ${}^i n_{fri}$, ${}^{i+1} n_{fri}$ 分别表示关节 i 与关节 $i+1$ 所受的摩擦力矩, f_i , n_i 表示连杆 $i-1$ 对关节 i 的作用力与力矩。

图 10 相邻连杆受力状况^[14]

(1) 向外递归。

图 10 中关节 $i+1$ 为旋转关节, 可以求得连杆 $i+1$ 的角速度 ${}^{i+1} \omega_{i+1}$ 如式(7)所示

$${}^{i+1} \omega_{i+1} = {}^{i+1} R^i \omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1} \hat{Z}_{i+1} \quad (7)$$

式中, ${}^{i+1} R^i$ 表示由坐标系 $\{i\}$ 到坐标系 $\{i+1\}$ 的变换矩阵, $\dot{\theta}_{i+1}$ 表示坐标系 $\{i+1\}$ 相对于坐标系 $\{i\}$ 的关节角速度, ${}^{i+1} \hat{Z}_{i+1}$ 表示坐标系 $\{i+1\}$ 的 $\hat{Z}$ 方向的单位法矢量。

对式(7)求导可得连杆 $i+1$ 的角加速度 ${}^{i+1} \dot{\omega}_{i+1}$ 表达式如式(8)所示

$$\begin{aligned} {}^{i+1} \dot{\omega}_{i+1} = \frac{d}{dt} ({}^{i+1} R^i \omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1} \hat{Z}_{i+1}) = \\ {}^{i+1} R^i \dot{\omega}_i + {}^{i+1} R^i \omega_i \times \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1} \hat{Z}_{i+1} + \\ \ddot{\theta}_{i+1} {}^{i+1} \hat{Z}_{i+1} \end{aligned} \quad (8)$$

式中, $\ddot{\theta}_{i+1}$ 表示坐标系 $\{i+1\}$ 相对于坐标系 $\{i\}$ 的关节角加速度。

局部坐标系 $\{i+1\}$ 原点在连杆 $i+1$ 上的线速度 ${}^{i+1} \dot{v}_{i+1}$ 见式(9)

$${}^{i+1} \dot{v}_{i+1} = {}^{i+1} R^i [\omega_i \times {}^i P_{i+1} + \dot{\omega}_i \times {}^i P_{i+1}] + \dot{v}_i \quad (9)$$

式中, ${}^i P_{i+1}$ 表示坐标系 $\{i+1\}$ 相对于坐标系 $\{i\}$ 的位置矢量。

对连杆 i 的质心线加速度 ${}^i \dot{v}_{C_i}$ 为式(10)

$${}^i \dot{v}_{C_i} = {}^i \dot{\omega}_i \times {}^i P_{C_i} + {}^i \omega_i \times ({}^i \omega_i \times {}^i P_{C_i}) + {}^i \dot{v}_i \quad (10)$$

式中, ${}^i P_{C_i}$ 表示质心 C_i 相对于坐标系 $\{i\}$ 的位置矢量。

将式(8)~(10)联立可得作用于连杆 i 上的力 F_i 与力矩 N_i 分别如式(11)和式(12)所示

$$F_i = {}^i F_i = m {}^i \dot{v}_{C_i} \quad (11)$$

$$N_i = {}^i N_i = {}^c I {}^i \dot{\omega}_i + {}^i \omega_i \times {}^c I {}^i \omega_i \quad (12)$$

式(12)中, ${}^c I$ 表示连杆 i 相对于质心 C_i 的转动惯量。

(2) 向内递归。

图 10 中关节 i 所受力 f_i 与力矩 n_i 情况描述如式(13)与式(14)所示

$${}^i f_i = {}^{i+1} R^{i+1} f_{i+1} + {}^i F_i \quad (13)$$

$$\begin{aligned} {}^i n_i = {}^i N_i + {}^{i+1} R^{i+1} n_{i+1} + {}^i P_{C_i} \times {}^i F_i + \\ {}^i P_{i+1} \times {}^{i+1} R^{i+1} f_{i+1} + {}^i n_{fri} + {}^{i+1} R^{i+1} n_{fri} \end{aligned} \quad (14)$$

式(14)中清楚地给出了摩擦力矩项 ${}^i n_{fri} + {}^{i+1} R^{i+1} n_{fri}$ 的影响。由式(13)与式(14)联立求得关节 i 的驱动力矩 τ_i 如式(15)

$$\tau_i = {}^i n_i^T {}^i \hat{Z}_i \quad (15)$$

3.1.2 Newton-Euler 算法的广义形式及其变换

可以将上述的递归 Newton-Euler 算法表达成一个状态空间方程^[14, 18]如式(16)

$$\begin{aligned} \tau = H(\theta) \ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} + F(\dot{\theta}) + \\ G(\theta) + J(\theta)^T f \end{aligned} \quad (16)$$

式中, $H(\theta)$ 为惯性矩阵, $C(\theta, \dot{\theta})$ 为科氏力矢量, $F(\dot{\theta})$ 为摩擦力矢量, $G(\theta)$ 为重力矢量, $J(\theta)^T$ 为雅可比矩阵, f 为施加在机械臂末端的外力矢量。由式(16)可得

$$\ddot{\theta} = H(\theta)^{-1} (\tau - C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} - F(\dot{\theta}) - G(\theta) - J(\theta)^T f) \quad (17)$$

设在 t 时刻, 任意关节的角位移 θ_n 、角速度 $\dot{\theta}_n$ 、角加速度 $\ddot{\theta}_n$; 在 $t+1$ 时刻, 任意关节的角位移 θ_{n+1} 、角速度 $\dot{\theta}_{n+1}$ 、角加速度 $\ddot{\theta}_{n+1}$ 。关节角速度 $\dot{\theta}_{n+1}$ 的数值积分, 取步长为 h , 由欧拉积分公式^[14, 19]可得式(18)

$$\dot{\theta}_{n+1} = \dot{\theta}_n + h \ddot{\theta}_n \quad (18)$$

关节角速度 $\dot{\theta}_{n+1}$ 的数值积分, 将式(18)代入梯形积分公式^[14, 19]可得

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} = \theta_n + \frac{h}{2} (\dot{\theta}_n + \dot{\theta}_{n+1}) = \\ \theta_n + \dot{\theta}_n h + \frac{h^2}{2} \ddot{\theta}_n \end{aligned} \quad (19)$$

通过进行了式(18)与式(19)进行反复迭代, 在进行 $k+1$ 次迭代时, 如式(20)所示, 其敛散性的判断方法为

$$\dot{\theta}_{n+1}^{(k+1)} = \dot{\theta}_n + h\ddot{\theta}_n^{(k)} \quad (20)$$

由式(20)减去式(18), 并由利普希茨条件^[19]可得

$$\left| \dot{\theta}_{n+1}^{(k+1)} - \dot{\theta}_{n+1}^{(k)} \right| = h \left| \ddot{\theta}_n^{(k+1)} - \ddot{\theta}_n^{(k)} \right| \leq hL \left| \dot{\theta}_{n+1}^{(k)} - \dot{\theta}_{n+1}^{(k-1)} \right| \quad (21)$$

式中, L 为 $\ddot{\theta}$ 的利普希茨条件常数, 当 $L > 0$ 且 $hL < 1$ 时, 该迭代法就收敛^[19]。在确保该迭代计算效率的前提下, 步长 h 的取值尽可能小, 以确保该迭代计算的精确度^[14], 在仿真试验中 $h = 0.02$, 收敛的平均时间为 8 h。

3.2 关节驱动力矩拟合函数求取

为了更准确便捷地得到由正向动力学函数求出的机械臂运动轨迹, 可将由 Newton-Euler 递归算法计算得到的离散的力矩值拟合成连续的力矩函数, 作为式(17)的 τ 值。由第 1.3 节可知关节 3 和 4 是机械臂在直线轨迹运行中的主要运动关节, 所以这两个关节力矩值拟合的准确度对机械臂末端轨迹精度有很大影响。因此, 本文重点研究关节 3 和 4 在 1 s 的运动时间内, 一般非线性摩擦模型条件下的驱动力矩拟合曲线及相应的拟合误差分析如图 11~14 所示, 其中图 11 为关节 3 的驱动力矩随时间变化的曲线图, 图 12 为关节 3 的驱动力矩拟合误差随时间的变化曲线, 图 13 为关节 4 的驱动力矩随时间变化的曲线图, 图 14 为关节 4 的驱动力矩拟合误差随时间的变化曲线。由图 12 和 14 分析知, 关节 3 和关节 4 的驱动力矩拟合函数与真实驱动力矩的误差都分别在 6% 和 4% 以下。由此, 可判定该驱动力矩的拟合函数能较好地反映真实情况。

图 11 关节 3 时间-驱动力矩曲线

将已得到的拟合函数代入第 2.2 节中的一般非线性摩擦模型, 通过正动力学函数驱动机械臂在 1 s 的时间段内进行运动, 将得到的运动轨迹与第 1.2 节中理想的运动轨迹进行对比如图 15 所示, 可初步

判定机械臂理想轨迹与一般非线性摩擦模型驱动下的轨迹较吻合。由于该轨迹的 z 方向位移的偏差比 x 方向大, 所以位移误差分析以 z 方向为主如图 16 所示, 1 s 内机械臂 z 方向的位移误差值均在 5% 以内。这一正动力学的计算方法是正确的, 且可推广应用到机械臂关节的各种摩擦模型研究以及快、慢速运行工况, 能快速生成机械臂末端运动轨迹。

图 12 关节 3 驱动力矩拟合误差随时间的分布

图 13 关节 4 时间-驱动力矩曲线

图 14 关节 4 驱动力矩拟合误差随时间的分布

图 15 机械臂在 xz 平面内末端运动轨迹 图 16 末端运动在 z 方向上的位移误差

4 仿真试验

4.1 摩擦模型对运动轨迹的影响

在第 2.2 节中提到的一般非线性模型在低速区域时,其摩擦力矩的大小及分布能够以 90% 的精度反映该区域内真实的摩擦力矩。所以,采用一般非线性模型来模拟真实机械臂在该区域内的摩擦力矩。机械臂末端做的是变加速变减速运动,如图 17、18 所示的关节 2 的驱动力矩随时间的变化,侧面说明了这一运动现象。末端速度的变化会造成机械臂各关节角速度的变化,当有些关节角速度不在低速运动区时,由第 3.1 节理论推导可知,用拟非线性摩擦模型与一般非线性摩擦模型计算出的机械臂关节摩擦力矩的大小和方向是相同的。因此,文中以不同的运动时间来实现不同的运动速度,如以运动时间分别为 1 s 与 2 s 为例,完成第 1.2 节中相同的理想运动轨迹,并比较分析各关节摩擦模型为拟非线性模型及一般非线性模型时对机械臂运动轨迹的影响。

由于关节自身摩擦是一般非线性的,所以将其摩擦力矩模型设为一般非线性摩擦模型。关节的驱

图 17 2 s 内关节 2 时间-驱动力矩曲线

图 18 1 s 内关节 2 时间-驱动力矩曲线

动力矩加载方式分为以下两类:一类是关节采用拟非线性摩擦模型条件下的驱动力矩,此时的驱动力矩称为“拟非线性驱动力矩”;另一类是关节采用一般非线性摩擦模型条件下的驱动力矩,此时的驱动力矩称为“一般非线性驱动力矩”。各关节驱动力矩具体的加载方式分别为以下五种:① 所有关节都为一般非线性驱动力矩;② 所有关节都为拟非线性驱动力矩;③ 关节 2 为拟非线性驱动力矩,其余关节为一般非线性驱动力矩;④ 关节 3 为拟非线性驱动力矩,其余关节为一般非线性驱动力矩;⑤ 关节 4 为拟非线性驱动力矩,其余关节为一般非线性驱动力矩。在 1 s 和 2 s 的运动时间内机械臂各关节驱动力矩分别在上述五种加载条件下,其末端在 xz 平面内的运动轨迹分别如图 19、20 所示。由图 19 可以看出,在机械臂快速运动条件下,各关节用拟非线性或一般非线性驱动力矩对其末端运动轨迹的形状没有明显的影响,只是改变了运动轨迹的相对位置。当机械臂各关节均为一般非线性驱动力矩时,其末端运动轨迹与只有关节 2 为拟非线性驱动力矩时的末端运动轨迹十分吻合,此现象说明关节 2 对驱动力矩形式不敏感。当只有关节 3 为拟非线性驱动力矩时,末端运动轨迹与各关节均为一般非线性驱动力矩时的末端运动轨迹有较大差异,说明关节 3 对驱动力

矩形式较敏感。当只有关节 4 为拟非线性驱动力矩时, 末端运动轨迹与各关节均为一般非线性驱动力矩时的末端运动轨迹有较大差异, 说明关节 4 对驱动力矩形式也敏感, 但敏感程度次于关节 3, 此现象与第 3.2 节中对关节 3 和 4 对末端运动轨迹影响程度的分析吻合。当机械臂各关节均为拟非线性驱动力矩时, 末端运动轨迹与各关节均为一般非线性驱动力矩时的末端运动轨迹差异最大, 即与理想运动轨迹差异最大。由图 20 知, 在机械臂慢速运动条件下, 各关节用拟非线性或一般非线性驱动力矩对其末端运动轨迹的形状及相对位置都产生了很大影响。当机械臂各关节均为一般非线性驱动力矩时, 其末端运动轨迹与只有关节 2 或只有关节 4 为拟非线性驱动力矩时的末端运动轨迹形状基本相似, 但其位置有明显差异。当只有关节 3 或各关节均为拟非线性驱动力矩时, 末端运动轨迹与理想运动轨迹或各关节均为一般非线性驱动力矩时的末端运动轨迹形状和位置均有较大差异, 且轨迹的运动方向均已改变。

图 19 1s 的运动时间内机械臂在 XZ 平面的轨迹

图 20 2s 的运动时间内机械臂在 XZ 平面的轨迹

4.2 关节角的相互影响

在机械臂运动过程中, 各关节角也会相互影响。

如图 3 所示, 连杆 1 与连杆 2 垂直, 所以关节 1 的轴线方向平行于 z 轴, 且与关节 2 的转轴垂直。由于限制了关节轴向的移动。因此, 关节 1 与关节 2、3 和 4 之间运动的关联性很小。关节 2 的转轴和关节 3、4 的转轴相互平行, 初步判断它们之间运动的关联性较大。在分析时将关节 2、3、4 及其连杆简化为图 21 所示的三连杆模型^[20], 其中关节 2 与关节 3 通过连杆 2 连接, 关节 3 与关节 4 通过连杆 3 连接。可以由式(16)的动力学方程一般形式进行变形可得

$$\tau = \begin{Bmatrix} \tau_4 \\ \tau_3 \\ \tau_2 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \tau_4 &= {}^4H_1(\theta_3, \theta_4)\ddot{\theta}_2 + {}^4H_2(\theta_4)\ddot{\theta}_3 + {}^4H_3\ddot{\theta}_4 + \\ &\quad {}^4C(\theta_3, \theta_4)\dot{\theta}_2 + F(\dot{\theta}_4) + {}^4G(\theta_2, \theta_3, \theta_4) \\ \tau_3 &= {}^3H_1(\theta_3, \theta_4)\ddot{\theta}_2 + {}^3H_2(\theta_4)\ddot{\theta}_3 + {}^3H_3(\theta_4)\ddot{\theta}_4 + \\ &\quad {}^3C(\theta_3, \theta_4)\dot{\theta}_2 + F(\dot{\theta}_3) + {}^3G(\theta_2, \theta_3, \theta_4) \\ \tau_2 &= {}^2H_1(\theta_3, \theta_4)\ddot{\theta}_2 + {}^2H_2(\theta_3, \theta_4)\ddot{\theta}_3 + {}^2H_3(\theta_3, \theta_4)\ddot{\theta}_4 + \\ &\quad {}^2C(\theta_3, \theta_4)\dot{\theta}_2 + F(\dot{\theta}_2) + {}^2G(\theta_2, \theta_3, \theta_4) \end{aligned}$$

式中, τ 为关节驱动力矩矢量, τ_2 、 τ_3 、 τ_4 分别指关节 2、3、4 关节驱动力矩, θ_2 、 θ_3 、 θ_4 为关节 2、3、4 的关节角度, $\dot{\theta}_2$ 、 $\dot{\theta}_3$ 、 $\dot{\theta}_4$ 为关节角速度, $\ddot{\theta}_2$ 、 $\ddot{\theta}_3$ 、 $\ddot{\theta}_4$ 为 2、3、4 关节角加速度, H_1 、 H_2 、 H_3 分别指三个关节的惯性张量, $F(\dot{\theta}_2)$ 、 $F(\dot{\theta}_3)$ 、 $F(\dot{\theta}_4)$ 为关节 2、3、4 的摩擦力矩, G 为重力矢量, C 为科氏力与离心力矢量。

图 21 三连杆模型

由式(22)中可以看出在三关节模型中, 三个关节(关节 2、3、4)的驱动力矩与三个关节的角位移, 角速度以及角加速度都相关, 它们之间的关联以及与关节 1 之间的关联如图 22~24 所示。

(1) 由图 22 可知, 全部关节都为一般非线性驱动力矩或只有关节 1 或关节 4 为拟非线性驱动力矩, 其他各关节均为一般非线性驱动力矩条件下的关节 2 的角位移-时间曲线基本吻合, 此现象说明关节 2

的角位移对关节 1 和 4 中驱动力矩的变化不敏感。而关节 3 驱动力矩的变化与关节 2 驱动力矩变化对关节 2 的角位移影响较大。所有关节为拟非线性驱动力矩时, 对关节 2 的角位移影响最大。

图 22 2 s 的运动时间内关节 2 的时间-角位移曲线

(2) 由图 23 可知, 全部关节都为一般非线性驱动力矩或只有关节 1 或关节 4 为拟非线性驱动力矩, 其他各关节均为一般非线性驱动力矩条件下的关节 3 的角位移-时间曲线基本吻合, 此现象说明关节 3 的角位移对关节 1 和 4 中驱动力矩的变化不敏感。而关节 2 驱动力矩的变化与关节 3 驱动力矩变化对关节 3 的角位移影响较大。所有关节为拟非线性驱动力矩时对关节 3 角位移的影响与关节 3 对其自身角位移的影响程度相同。

图 23 2 s 的运动时间内关节 3 的时间-角位移曲线

(3) 由图 24 可知, 全部关节都为一般非线性驱动力矩或只有关节 1 或关节 2 为拟非线性驱动力矩, 其他各关节均为一般非线性驱动力矩条件下的关节 4 的角位移-时间曲线基本吻合, 此现象说明关节 4 的角位移对关节 1 和 2 中驱动力矩的变化不敏感。而关节 3 驱动力矩的变化与关节 4 驱动力矩变化对关节 4 的角位移影响较大。所有关节为拟非线性驱动力矩时对关节 4 角位移的影响与关节 4 对其自身

角位移的影响程度相同。

图 24 2 s 的运动时间内关节 4 的时间-角位移曲线

5 结论

以六轴串联机械臂为例, 进行了系统的运动学和正-反向动力学分析。基于拟非线性摩擦模型与斯特里贝克效应, 建立了关节的一般非线性摩擦模型, 深入研究了这两种非线性摩擦模型对机械臂末端轨迹的影响及各关节间的相互影响。得到了如下主要结论。

(1) 末端轨迹在关节角速度较低时摩擦的非线性影响较大, 反之影响较小。

(2) 关节 2 对末端轨迹影响较小; 关节 3 和 4 对机械臂末端轨迹影响较大。

(3) 机械臂平行关节间的相互影响比垂直关节间的相互影响大。所以对关节驱动力矩控制策略设计时要充分考虑与其平行关节角位移的变化。

(4) 提出的正反向动力学分析方法以及非线性摩擦模型为高精机械臂的研发提供理论支撑和有力的分析手段。

参考文献

- [1] OLSSON H, ÅSTROM K J. Friction generated limit cycles[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2001, 9(4): 629-636.
- [2] LI Y, LIU Y, LIU X, et al. Parameter identification and vibration control in modular manipulators[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2004, 9(4): 700-705.
- [3] LIU Y, LI Y. Dynamic modeling and adaptive neural-fuzzy control for nonholonomic mobile manipulators moving on a slope[J]. International Journal of Control Automation and Systems, 2006, 4(2): 197-203.
- [4] 韩邦成, 马纪军, 李海涛. 谐波减速器的非线性摩擦建

- 模及补偿[J]. 光学精密工程, 2011, 19(5): 1095-1103.
- HAN Bangcheng, MA Jijun, LI Haitao. Modeling and compensation of nonlinear friction in harmonic driver[J]. Optics and Precision Engineering, 2011, 19(5): 1095-1103.
- [5] 付建宁, 詹涵菁, 黄文康. 空间机械臂关节非线性摩擦建模及补偿[J]. 机械传动, 2014(12): 28-32.
- FU Jianning, ZHAN Hanjing, HUANG Wenkang. Modeling and compensation of non-linear friction for spatial robotic arm joint[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2014(12): 28-32.
- [6] REYNOSO-MORA P, CHEN W, TOMIZUKA M. A convex relaxation for the time-optimal trajectory planning of robotic manipulators along predetermined geometric paths[J]. Optimal Control Applications and Methods, 2016, 37(6): 1263-1281.
- [7] CHENG H, LI Z X, YIU Y K. Dynamics and control of redundantly actuated parallel manipulators[J]. IEEE-ASME Transactions on Mechatronics, 2003, 8(4): 483-491.
- [8] GROTHJAHN M, HEIMANN B, ABDELLATIF H. Identification of friction and rigid-body dynamics of parallel kinematic structures for model-based control[J]. Multibody System Dynamics, 2004, 11(3): 273-294.
- [9] SHANG W, CONG S, ZHANG Y. Nonlinear friction compensation of a 2-dof planar parallel manipulator[J]. Mechatronics, 2008, 18(7): 340-346.
- [10] HELLSSEN R H A, ANGELIS G Z, VAN DE MOLENGRAFT M J G, et al. Grey-box modeling of friction: an experimental case-study[J]. European Journal of Control, 2000, 6(3): 258-267.
- [11] KOSTIC D, JAGER D B, STEINBUCH M, et al. Modeling and identification for high-performance robot control: an mrr-robotic arm case study[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2004, 12(6): 904-919.
- [12] CORKE P. Robotics, vision and control-fundamental algorithms in matlab[M]. 2nd ed. Cham, Switzerland: Springer, 2017.
- [13] 丁千, 翟红梅. 机械系统摩擦动力学研究进展[J]. 力学进展, 2013, 43(1): 112-131.
- DING Qian, ZHAI Hongmei. The advance in researches of friction dynamics in mechanics system[J]. Advances in Mechanics, 2013, 43(1): 112-131.
- [14] CRAIG J J. Introduction to robotics mechanics and control[M]. 3rd ed. Harlow, United Kingdom: Pearson Education International, 2005.
- [15] 史晓佳, 张福民, 曲兴华, 等. KUKA 工业机器人位姿测量与在线误差补偿[J]. 机械工程学报, 2017, 53(8): 1-7.
- SHI Xiaojia, ZHANG Fumin, QU Xinghua, et al. Position and attitude measurement and online errors compensation for kuka industrial robots[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(8): 1-7.
- [16] ZHANG D S, XU Y D, YAO J T, et al. Analysis and optimization of a spatial parallel mechanism for a new 5-dof hybrid serial-parallel manipulator[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2018, 31(54): 1-9.
- [17] Cnblogs.com. The forward and inverse kinematics solution method of ur manipulator[EB/OL]. [2018-05-27]. www.cnblogs.com/mightycode/p/9095059.html.
- [18] 山显雷, 程刚. 考虑关节摩擦的 3SPS+1PS 并联机构显式动力学建模研究[J]. 机械工程学报, 2017, 53(1): 28-35.
- SHAN Xianlei, CHENG Gang. Explicit dynamic modeling of a 3SPS+1PS parallel manipulator with joint friction[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(1): 28-35.
- [19] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.
- LI Qinyang, WANG Nengchao, YI Dayi. Numerical analysis[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2008.
- [20] ZHENG D T, XIAO Z Y, XIA X. Multiple measurement models of articulated arm coordinate measuring machines[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2015, 28(5): 994-998.

作者简介: 段书用, 女, 1984 年出生, 博士, 副教授, 硕士研究生导师。主要研究方向为机器人动力学、机器人可靠性和计算反求技术。

E-mail: duanshuyong@hebut.edu.cn

韩旭(通信作者), 男, 1968 年出生, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为计算反求技术、机器人可靠性、优化理论与算法。

E-mail: xhan@hebut.edu.cn