DOI: 10.3901/JME.2020.09.009

Bennett 机构交错角区间和机构类型的关系*

鹿 玲^{1,2} 张一同^{1,3} 牟德君^{1,3} 胡 波^{1,3} 卢文娟^{1,3}

(1. 燕山大学机械工程学院 秦皇岛 066004;

2. 燕山大学河北省重型智能制造装备技术创新中心 秦皇岛 066004;

3. 燕山大学河北省并联机器人与机电系统实验室 秦皇岛 066004)

摘要: 目前 Bennett(BNT)机构根据回转副轴线的方向, 分成非对称安装和线性对称安装两类。为了研究这两类机构的共性和区别, 在杆件交错角 $(0, 2\pi)$ 的区域内, 用相邻象限组合为 4 个区间, 由 S_{12} (第 1-2 象限)区间和 S_{34} (第 3-4 象限)区间各得到 1 组非对称安装的左旋和右旋 BNT 机构; 由 S_{23} (第 2-3 象限)和 S_{41} (第 4-1 象限)区间各得到 1 组线性对称安装的左旋和右旋 BNT 机构。把前后 2 组机构进行对比, 只有轴线方向是非对称的, 机构结构本身都是对称的。由于 S_{12} 和 S_{34} 区间的非对称安装机构, 通过交错角的设定, 可以转换为 S_{41} 区间的线性对称机构, 所以线性对称和非对称之间并无本质差别, 4 组机构本质是相同的 1 组。因为 S_{41} 区间机构的运动副的轴线方向指向相同, 轴线的正方向与相邻杆内角逆时针的角位移方向一致, 所以把 S_{41} 区间改用交错角锐角表示的 R_{41} (第 4-1 象限)区间作为交错角的工作区间, 就得到线性对称的右旋型和左旋型两种 BNT 机构基本类型, 这两类机构的运动链是相同的, 只是以不同构件为机架得到两种机构的形式。根据这些概念, 左旋型和右旋型 BNT 机构, 采用交错角锐角给出了统一的结构参数方程和含相邻杆内角表示的闭环位移方程。这种交错角为锐角的统一参数方程, 简单, 直观, 便于应用。研究强调并补充了相邻杆的交错角不能在作用区间的同一象限选取的一个必要的约束条件。

关键词: Bennett 机构; 约束条件; 交错角; 结构参数; 闭环位移方程

中图分类号: TH112

Relationship between Stagger Angle Interval and Mechanism Type of the Bennett Mechanism

LU Ling^{1,2} ZHANG Yitong^{1,3} MU Dejun^{1,3} HU Bo^{1,3} LU Wenjuan^{1,3}

(1. School of Mechanical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004;

2. Heavy-duty Intelligent Manufacturing Equipment Innovation Center of Hebei Province,
Yanshan University, Qinhuangdao 066004;

3. Hebei Provincial Key Laboratory of Parallel Robot and Mechatronic System,
Yanshan University, Qinhuangdao 066004)

Abstract: At present, Bennett (BNT) mechanism can be divided into two types according to the direction of axis of revolute joints: Asymmetrical and linear symmetrical installation. In order to study the similarities and differences between these two types of mechanisms, using adjacent quadrants were used to form four intervals in the region of link stagger angle $(0, 2\pi)$. Then, a group of asymmetrically installed left-handed and right-handed BNT mechanisms are obtained based on the S_{12} (quadrant I and II) and S_{34} (quadrant III and IV)intervals, and a group of linearly symmetrically installed left-handed and right-handed BNT mechanisms are obtained based on the S_{23} (quadrant II and III)and S_{41} (quadrant IV and I)intervals. Comparing these two groups of mechanisms, only the axis is asymmetrical while the structure itself is symmetrical. Since the asymmetrical installation mechanisms in the regions of S_{12} and S_{34} can be transformed into linear symmetrical mechanisms in the region of S_{41} by setting the stagger angle, there is no essential difference between linear symmetrical and asymmetrical mechanisms, and these two groups of mechanisms are essentially the same one. Because the joints within the mechanism in the region of S_{41} have the same axial direction, and the positive direction of the axis is the same as the anti-clockwise angular displacement direction of the inner angle of the adjacent links, so the interval of

* 河北省自然科学基金(E2011203193)和河北省杰出青年基金(E2017203094)资助项目。20190612 收到初稿, 20191124 收到修改稿

R_{41} (quadrant IV and I) represented by the sharp angle of the stagger angle is used as the working interval of the stagger angle, then two basic types of BNT linear symmetrical mechanisms, i.e., right-handed and left-handed, are obtained. The kinematic chains of these two types of mechanisms are the same, but they are obtained by taking different components as the frame. According to these concepts, aiming to the left-handed and right-handed BNT mechanisms, the uniform structural parameter equations and the closed-loop displacement equations with the inner angles of adjacent links are given by using the stagger sharp angles. This unified parametric equation with sharp angles is simple, intuitive and easy to apply. A necessary constraint condition that the stagger angles of adjacent links cannot be selected in the same quadrant of the action region is emphasized and supplemented.

Key words: Bennett mechanism; constraint condition; stagger angle; structural parameters; closed-loop displacement equation

0 前言

BNT 机构是 1903 年英国科学家 BENNETT^[1-2]提出的。它由 4 个 2R 杆通过回转副首尾相接组成, 每个杆两端的回转副轴线的交错角不为零。由于机构约束条件的特殊性, 使得机构的性能很复杂, 因此机构学者们对其机构的自由度、各种特性和应用进行了大量的研究^[3-13]。

BNT 机构杆件交错角的传统取值区间^[14-16]为 $(0^\circ, 180^\circ)$, 由于轴线方向的不对称, 称之为非对称安装。文献[17]提出了 BNT 机构的一种线性对称的安装结构形式, 但是现有的文献都没有详细地讨论相邻杆件交错角的所有作用区间与 BNT 机构的非线性安装和线性对称的安装之间的内在关系。

为了能更清晰地了解它们之间的内在关系, 以及它们与 BNT 机构类型的关系, 本文下面将对此问题进行详细讨论。并且给出 BNT 机构两种结构形式、结构参数和闭环位移参数方程的统一的表达形式。

1 交错角区间与机构类型的关系

图 1 和图 2 是 BNT 机构的一个 2R 杆件的两个视图, 两轴 A 和 B 的交错角为 α , 逆时针为正, 顺时针为负。为了叙述方便, 规定在 BNT 机构中, 相邻杆的一个杆长 a 的交错角为 α , 另一个杆长 b 的交错角为 β 。

图 1 2R 杆正面

图 2 侧视图

BNT 机构杆件交错角的传统取值区间为 $(0^\circ, 180^\circ)$, 称之为交错角的第 S_{12} 作用区间, 简称交错角的 S_{12} 区间。本文提出相邻杆交错角的一个必要几何约束条件: 相邻杆的交错角不能在作用区间的同一象限选取, 简称相邻杆交错角的异象限约束条

件。在 S_{12} 区间, 当机架的交错角为第一象限 $0^\circ < \beta < 90^\circ$ 时, 连架杆的交错角必须在第二象限选取 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ 。这样在 S_{12} 区间得到图 3 非对称安装的右旋型(连杆相对机架成右螺旋型)BNT 机构, 连杆 BC 相对机架 AD 成右旋状态。

当 $90^\circ < \beta < 180^\circ$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 时, 在 S_{12} 区间得到图 4 非对称安装的左旋型 BNT 机构, 连杆 BC 相对机架 AD 成左旋状态。

图 3 S_{12} 区右旋型非对称安装 图 4 S_{12} 区左旋型非对称安装

这两种类型由于运动副的轴线 z 方向不对称, 称为非对称安装(非对称是指运动副的轴线方向不对称)。文献[1-2,14-16]给出的 BNT 机构都是非对称的传统安装方式。

图 5a 是文献[17]给出的一种非对称安装的 BNT 机构, 显然图 5a 就是图 3 或图 4 的一种。文献[17]在文献[18]的基础上, 通过对一个构件的 180° 翻转, 改变了该构件两个回转副的轴线方向, 使得变化后机构运动副的轴线实现了对称, 得到了图 5b 的线性对称的安装结构形式^[18-20]。

(a) 非对称安装

(b) 线性对称安装

图 5 现有文献及文献[17]对 BNT 机构的分类

相邻杆交错角在作用域内的一个周期为 $(0^\circ, 360^\circ)$, 可以任意选两个相邻的象限作为它的一个作用区间, 这样可以得到 4 个作用区间: 第一个作用

区间 S_{12} 为第一象限和第二象限($0^\circ, 180^\circ$); 第二个作用区间 S_{23} 区为第二象限和第三象限($90^\circ, 270^\circ$); 第三个作用区间 S_{34} 区为第三象限和第四象限($180^\circ, 360^\circ$); 第四个作用区间 S_{41} 为第四象限和第一象限($270^\circ, 90^\circ$)。

选取杆件的交错角时, 必须充分注意到象限约束条件: 相邻杆的交错角不能在区间内的同一象限选取。任选一个作用区间, 都可以得到以机架为参考系的两种类型的 BNT 机构: 左旋型 BNT 机构和右旋型 BNT 机构。

1.1 相邻杆交错角的 S_{12} 区间

根据相邻杆交错角的异象限约束条件, 在相邻杆交错角的 S_{12} 区间($0^\circ, 180^\circ$)内, 交错角的选取方案有两种: ① $0^\circ < \beta < 90^\circ, 90^\circ < \alpha < 180^\circ$; ② $0^\circ < \alpha < 90^\circ, 90^\circ < \beta < 180^\circ$ 。对应这两种交错角的选择, 分别得到图 3 的 S_{12} 区右旋型和图 4 的 S_{12} 区左旋型的两种非对称安装的机构。图 3 的交错角为 $\beta=30^\circ, \alpha=150^\circ$, 图 4 为 $\beta=150^\circ, \alpha=30^\circ$; 两图的杆长 $a=b=120\text{ mm}$ 。

在图 3 的 S_{12} 区右旋型 BNT 机构, 机架的两个轴线都指向前方, 方向相同, 连杆的两个轴线都指向后方, 方向相同。在图 4 的 S_{12} 区左旋型 BNT 机构, 连架杆 AB 的两个轴线都指向前方, 方向相同。连架杆 CD 的两个轴线都指向后方, 方向相同。

1.2 相邻杆交错角的 S_{23} 区间

在 S_{23} 区间($90^\circ, 270^\circ$)内, 相邻杆交错角的选取方案有两种: ① $180^\circ < \beta < 270^\circ, 90^\circ < \alpha < 180^\circ$; ② $90^\circ < \beta < 180^\circ, 180^\circ < \alpha < 270^\circ$ 。对应这两种交错角的选择, 分别得到图 6 的 S_{23} 区右旋型 BNT 机构和图 7 的 S_{23} 区左旋型 BNT 机构, 两种都是线对称安装的 BNT 机构。

图 6 S_{23} 区右旋型

图 7 S_{23} 区左旋型

图 6 的交错角为 $\beta=210^\circ, \alpha=150^\circ$, 图 7 为 $\beta=150^\circ, \alpha=210^\circ$; 两图的杆长 $a=b=120\text{ mm}$ 。

在图 6 的 S_{23} 区右旋型 S_{23} 中, 所有杆的两个轴线都指向相反。在图 7 的 S_{23} 区左旋型中, 所有杆的两个轴线都指向相反。

1.3 相邻杆交错角的 S_{34} 区间

在 S_{34} 区间 ($180^\circ, 360^\circ$)内, 相邻杆交错角的选取方案有两种: ① $180^\circ < \beta < 270^\circ, 270^\circ < \alpha < 360^\circ$; ②

$270^\circ < \beta < 360^\circ, 180^\circ < \alpha < 270^\circ$ 。对应这两种交错角的选择, 分别得到图 8 的 S_{34} 区右旋型 BNT 机构和图 9 的 S_{34} 区左旋型 BNT 机构, 两种都是线对称安装的 BNT 机构。图 8 的交错角为 $\beta=210^\circ, \alpha=330^\circ$, 图 9 为 $\beta=330^\circ, \alpha=210^\circ$; 两图的杆长 $a=b=120\text{ mm}$ 。

图 8 S_{34} 区右旋型

图 9 S_{34} 区左旋型

在图 8 的 S_{34} 区右旋型 BNT 机构中, 机架的两个轴线指向相反, 连杆的两个轴线指向相反, 连架杆 AB 的两个轴线都指向前方, 方向相同。连架杆 CD 的两个轴线都指向后方, 方向相同。

在图 9 的 S_{34} 区左旋型 BNT 机构中, 连架杆 AB 的两个轴线指向相反。连架杆 CD 的两个轴线指向相反。机架的两个轴线都指向前方, 方向相同。连杆的两个轴线都指向后方, 方向相同。

1.4 相邻杆交错角的 $S_{41}(R_{41})$ 区间

在 S_{41} 区间的第 4 和 1 象限($270^\circ, 90^\circ$)内, 相邻杆交错角的选取方案有两种: ① $0^\circ < \beta < 90^\circ, 270^\circ < \alpha < 360^\circ$; ② $270^\circ < \beta < 360^\circ, 0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 。对应这两种交错角的选择, 分别得到图 10 的 S_{41} 区右旋型 BNT 机构和图 11 的 S_{41} 区左旋型 BNT 机构。

图 10 $S_{41}(R_{41})$ 区右旋型

图 11 $S_{41}(R_{41})$ 区左旋型

图 10 的交错角为 $\beta=30^\circ, \alpha=330^\circ$, 图 11 为 $\beta=330^\circ, \alpha=30^\circ$; 两图的杆长 $a=b=120\text{ mm}$ 。

这两种机构都是线对称安装的, 所有杆的两个轴线都指向前方, 方向相同。

相邻杆交错角的第 S_{41} 区间($270^\circ, 90^\circ$), 用交错角的锐角表示为($-90^\circ, 90^\circ$), 简称为 R_{41} 区间。在 R_{41} 区($-90^\circ, 90^\circ$)中, R_{41} 区右旋型 BNT 机构的交错角取值为 $-90^\circ < \alpha < 0^\circ, 0^\circ < \beta < 90^\circ$; R_{41} 区左旋型 BNT 机构交错角的取值为 $0^\circ < \alpha < 90^\circ, -90^\circ < \beta < 0^\circ$ 。

例如图 10 中 R_{41} 区的右旋型 BNT 机构交错角为 $\beta=30^\circ, \alpha=-30^\circ$, 图 11 R_{41} 区的左旋型 BNT 机构为 $\beta=-30^\circ, \alpha=30^\circ$ 。

2 非对称安装和线性对称安装

图 5a 就是文献[17]给出的一种非对称安装的 BNT 机构, 所谓非对称安装是指运动副的轴线指向(即所规定的轴线正向)是非对称的。例如图 5a 中, z_1 轴和 z_3 轴方向不是线性对称的, z_2 轴和 z_4 轴方向也不是线性对称的。

交错角为 S_{12} 区的传统 BNT 机构和交错角为 S_{34} 区的 BNT 机构都是非线性安装的。为了确保 BNT 机构得到封闭环, 非对称安装必须遵守“邻杆交错角的异象限约束条件”, 否则机构不能封闭。这是机构封闭的必要条件之一。

根据交错角的异象限约束条件, 在 S_{12} 区的 $(0^\circ, 180^\circ)$ 内, 相邻杆交错角可以有两种选取方案: ① $0^\circ < \beta < 90^\circ, 90^\circ < \alpha < 180^\circ$; ② $0^\circ < \alpha < 90^\circ, 90^\circ < \beta < 180^\circ$ 。对应这两种交错角的选择分别得到图 3 左旋型和图 4 右旋型的两种非对称安装的机构。在 S_{34} 区的 $(180^\circ, 360^\circ)$ 内, 相邻杆交错角可以有两种选取方案: ① $180^\circ < \beta < 270^\circ, 270^\circ < \alpha < 360^\circ$; ② $270^\circ < \beta < 360^\circ, 180^\circ < \alpha < 270^\circ$ 。

2.1 非对称安装的结构参数和闭环位移方程

2.1.1 非对称安装结构参数

由前面的分析知, 相邻杆交错角为 S_{12} 和 S_{34} 区间时, 得到非对称安装 BNT 机构。非对称安装 BNT 的结构参数几何约束条件是: ① 对边的杆长相等和交错角相等, 交错角的旋向相同; ② 相邻两个边长比值和对应交错角正弦的比值相等, 即

$$a_1=a_3=a \quad b_2=b_4=b \quad \alpha_1=\alpha_3=\alpha \quad \beta_2=\beta_4=\beta \quad (1)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (2)$$

式(2)是相邻杆的比例方程。当限定交错角 $0^\circ < \alpha < 360^\circ$ 时, 式(2)仅仅适合 S_{12} 区和 S_{34} 区的 BNT 机构。

2.1.2 非对称安装的闭环位移方程

由文献 17 的图 5a 可以得出, 非对称 BNT 机构的位移方程为

$$\theta'_1 + \theta'_3 = 2\pi \quad \theta'_2 + \theta'_4 = 2\pi \quad (3)$$

$$\tan \frac{\theta'_1}{2} \tan \frac{\theta'_2}{2} = \frac{\sin \frac{\beta + \alpha}{2}}{\sin \frac{\beta - \alpha}{2}} = k \quad (4)$$

式(4)称之为相邻杆外角的正切积的正弦形式, k 为外角的正切积的正弦形式常数, 它只适合 S_{12} 区和 S_{34} 区的 BNT 机构。式(3)和式(4)中 $\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$ 和 θ'_4 都是相邻杆的外角, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 和 θ_4 是相邻杆的内角, 如图 3 所示。并且 $\theta'_1 = \pi - \theta_1, \theta'_2 = \pi - \theta_2,$

$\theta'_3 = \pi - \theta_3, \theta'_4 = \pi - \theta_4, \theta'_2 = \theta'_4$ 。把 $\theta'_1 = \pi - \theta_1, \theta'_2 = \pi - \theta_2$, 代入式(4), 得

$$\tan \frac{\pi - \theta_1}{2} \tan \frac{\pi - \theta_2}{2} = \arctan \frac{\theta_1}{2} \arctan \frac{\theta_2}{2} = \frac{\sin \frac{\beta + \alpha}{2}}{\sin \frac{\beta - \alpha}{2}}$$

$$\tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_2}{2} = \frac{\sin \frac{\beta - \alpha}{2}}{\sin \frac{\beta + \alpha}{2}} = k \quad (5)$$

式(5)称之为相邻杆内角的正弦形正切积方程, k 为内角的正弦形正切积常数。式(5)适用于 S_{12} 和 S_{34} 区间。

2.2 线性对称安装的结构参数和闭环位移方程

文献[17]在文献[18]的基础上, 通过一个构件 180° 的翻转, 改变了回转副的轴线方向, 使机构的运动副轴线实现了线性对称安装。

由前面的分析知, S_{23} 区左旋型和右旋型 BNT 机构, 以及 S_{41} 区左旋型和右旋型 BNT 机构, 都是线对称的 BNT 机构。

2.2.1 线性对称安装的结构参数

线性对称安装的 BNT 机构的结构参数几何约束条件是: ① 对边的杆长相等和交错角相等, 交错角的旋向相同; ② 相邻两边的边长比值与交错角的正弦比值相等, 符号相反。即

$$a_1=a_3=a \quad b_2=b_4=b \quad \alpha_1=\alpha_3=\alpha \quad \beta_2=\beta_4=\beta \quad (6)$$

$$\frac{a}{b} = -\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (7)$$

限定交错角 $0^\circ < \alpha < 360^\circ$ 时, 式(7)仅仅适合 S_{23} 区和 S_{41} 区的 BNT 机构。因为在 S_{23} 区和 S_{41} 区, 交错角的约束法则使 $\sin \alpha$ 或者 $\sin \beta$ 必有一个是小于零的, 所以 $(-\sin \alpha / \sin \beta) > 0$ 。

根据 BNT 机构相邻杆交错角的异象限约束法则, 在 S_{23} 区, 当 $180^\circ < \beta < 270^\circ, 90^\circ < \alpha < 180^\circ$ 时, 得到图 6 的右旋型 BNT 机构, 当 $90^\circ < \beta < 180^\circ, 180^\circ < \alpha < 270^\circ$ 时, 得到图 7 的左旋型 BNT 机构。

在 S_{41} 区, 当 $0^\circ < \beta < 90^\circ, 270^\circ < \alpha < 360^\circ$ 时, 得到图 10 的右旋型 BNT 机构; 当 $270^\circ < \beta < 360^\circ, 0^\circ < \alpha < 90^\circ$ (或者用锐角表示 $-90^\circ < \beta < 0^\circ, 0^\circ < \alpha < 90^\circ$) 时, 得到图 11 的左旋型 BNT 机构。

2.2.2 线性对称安装的闭环位移方程

线对称安装的 BNT 机构的位移方程为

$$\theta'_1 = \theta'_3 \quad \theta'_2 = \theta'_4 \quad (8)$$

$$\tan \frac{\theta'_1}{2} \tan \frac{\theta'_2}{2} = \frac{\cos \frac{\beta + \alpha}{2}}{\cos \frac{\beta - \alpha}{2}} = k \quad (9)$$

式(9)称之为相邻杆的外角的正切积的余弦形式, k 为外角的余正弦切积常数, 它只适合 S_{23} 区和 S_{41} 区的 BNT 机构。式(8)和式(9)中 θ'_1 、 θ'_2 、 θ'_3 和 θ'_4 是相邻杆的外角, θ_1 、 θ_2 、 θ_3 和 θ_4 是相邻杆的内角, 如图 6 所示。把 $\theta'_1 = \pi - \theta_1$, $\theta'_2 = \pi - \theta_2$, 代入式(9), 得

$$\tan \frac{\pi - \theta_1}{2} \tan \frac{\pi - \theta_2}{2} = \arctan \frac{\theta_1}{2} \arctan \frac{\theta_2}{2} = \frac{\cos \frac{\beta + \alpha}{2}}{\cos \frac{\beta - \alpha}{2}}$$

$$\tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_2}{2} = \frac{\cos \frac{\beta - \alpha}{2}}{\cos \frac{\beta + \alpha}{2}} = k \quad (10)$$

式(10)称之为相邻杆内角的正切积的余弦形式, k 为内角的正切积的余弦形式常数。式(10)适用于 S_{23} 、 S_{41} 、 R_{41} 区间。

3 非对称和线对称安装的本质属性

3.1 非对称和线对称安装具有结构相同的本质属性

在交错角 $(0, 360)$ 区间内, 由 S_{12} 和 S_{34} 区间各得到 1 组非对称安装的左旋型和右旋型 BNT 机构; 由 S_{23} 和 S_{41} 区间各得到 1 组线对称安装的左旋型和右旋型 BNT 机构。

对比前 2 组机构和后 2 组机构, 可以看出非对称的 BNT 机构与线性对称的 BNT 机构, 除了运动副回转轴线的对称性有区别外, 机构结构本身都是完全相同的, 都是线性对称的, 所以线性对称和非对称之间并无本质差别, 因此从机械结构方面来讲 4 组机构本质是相同的 1 组机构。

从结构参数和位移参数方面来讲, 非对称和线对称只有相邻杆的比例方程和正切积方程表达形式的不同, 其余都相同。相邻杆的比例方程式(2)和式(7), 只有一个正负号之差, 它是交错角在不同象限的正负不同引起的, 它们的绝对值都是相同的, 所以它们之间没用本质区别。

式(4)是外角正切积交错角的正弦形式, 式(9)是外角正切积交错角的余弦形式, 虽然表达式略有区别, 但是通过交错角象限的转换, 可以把外角正切积的正弦形式转换为正切积的余弦形式。因此, 非对称和线对称的正切积方程也没有本质区别的不同。

下面详细给出非对称正切积的交错角正弦形式转换成正切积交错角为锐角余弦形式的过程, 以及线对称正切积交错角为锐角的余弦形式表示。

3.2 非对称和线对称安装正切积交错角的锐角表示

下面给出非对称安装 S_{12} 区、 S_{34} 区和线对称安

装 S_{23} 正切积正弦型转换为 R_{41} 区的正切积余弦型的过程。

3.2.1 S_{12} 区正切积正弦型转换为 R_{41} 区的余弦型

对于 S_{12} 区右旋型 BNT 机构, 由于 $0^\circ < \beta < 90^\circ$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, 只要第二象限的 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ 转化为第四象限的锐角。如图 12 所示, 设 $-90^\circ < \alpha' < 0^\circ$, 用 $\alpha = \pi + \alpha'$ 代入式(4)

$$\tan \frac{\theta'_1}{2} \tan \frac{\theta'_2}{2} = \frac{\sin \left(\frac{\beta + \pi + \alpha'}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\beta - (\pi + \alpha')}{2} \right)} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\beta + \alpha'}{2} \right)}{\sin \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\beta - \alpha'}{2} \right)}$$

$$\tan \frac{\theta'_1}{2} \tan \frac{-\theta'_2}{2} = \frac{\cos \left(\frac{\beta + \alpha'}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\beta - \alpha'}{2} \right)} \quad (11)$$

式(11)就是右旋型 BNT 机构, S_{12} 区外角正切积正弦形转换到 R_{41} 区的外角正切积交错角为锐角的余弦表达形式, 简称为 R_{41} 区外角正切积余弦式。

图 12 2→4 象限转换

对于 S_{12} 区左旋型 BNT 机构, $90^\circ < \beta < 180^\circ$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 。用 $\beta = \pi + \beta'$ ($-90^\circ < \beta' < 0^\circ$) 代入式(4)

$$\tan \frac{\theta'_1}{2} \tan \frac{\theta'_2}{2} = \frac{\sin \frac{\pi + \beta' + \alpha}{2}}{\sin \frac{\pi + \beta' - \alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{\beta' + \alpha}{2}}{\cos \frac{\beta' - \alpha}{2}}$$

即

$$\tan \frac{\theta'_1}{2} \tan \frac{\theta'_2}{2} = \frac{\cos \frac{\beta' + \alpha}{2}}{\cos \frac{\beta' - \alpha}{2}} \quad (12)$$

显然, 式(12)是 R_{41} 区用锐角 β' 和 α 表示的左旋型 BNT 机构外角正切积的余弦形式。

3.2.2 S_{34} 区正切积正弦型转换为 R_{41} 区的余弦型

对于 S_{34} 区的右旋型 BNT 机构, $180^\circ < \beta < 270^\circ$, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ 。把 β 和 α 分别由第二象和第三象限转换为锐角表示的 R_{41} 区。如图 13 所示, 设 $\beta = \pi + \beta'$ ($0^\circ < \beta' < 90^\circ$), $\alpha = 2\pi + \alpha'$ ($-90^\circ < \alpha' < 0^\circ$), 代入式(4), 则

$$\tan \frac{\theta'_1}{2} \tan \frac{\theta'_2}{2} = \frac{\sin \frac{\pi + \beta' + 2\pi + \alpha'}{2}}{\sin \frac{\pi + \beta' - (2\pi + \alpha')}{2}} = \frac{\cos \frac{\beta' + \alpha'}{2}}{\cos \frac{\beta' - \alpha'}{2}} \quad (13)$$

图13 3→1象限转换

对于 S_{34} 区左旋型BNT机构, $270^\circ < \beta < 360^\circ$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ 。设 $\beta = 2\pi + \beta'$ ($-90^\circ < \beta' < 0^\circ$), $\alpha = \pi + \alpha'$ ($0^\circ < \alpha' < 90^\circ$), 代入式(4), 则

$$\tan \frac{\theta'_1}{2} \tan \frac{\theta'_2}{2} = \frac{\sin \frac{2\pi + \beta' + \pi + \alpha'}{2}}{\sin \frac{2\pi + \beta' - (\pi + \alpha')}{2}} = -\frac{\cos \frac{\beta' + \alpha'}{2}}{\cos \frac{\beta' - \alpha'}{2}}$$

$$\tan \frac{\theta'_1}{2} \tan \frac{-\theta'_2}{2} = \frac{\cos \frac{\beta' + \alpha'}{2}}{\cos \frac{\beta' - \alpha'}{2}} \quad (14)$$

3.2.3 S_{23} 区正切积正弦型转换为 R_{41} 区的余弦型

对于 S_{23} 区右旋型BNT机构, $180^\circ < \beta < 270^\circ$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ 。设 $\beta = 2\pi + \beta'$ ($0^\circ < \beta' < 90^\circ$), $\alpha = \pi + \alpha'$ ($-90^\circ < \alpha' < 0^\circ$), 代入式(4), 则

$$\tan \frac{\theta'_1}{2} \tan \frac{\theta'_2}{2} = \frac{\sin \frac{2\pi + \beta' + \pi + \alpha'}{2}}{\sin \frac{2\pi + \beta' - (\pi + \alpha')}{2}} = \frac{-\cos \frac{\beta' + \alpha'}{2}}{\cos \frac{\beta' - \alpha'}{2}}$$

$$\tan \frac{\theta'_1}{2} \tan \frac{-\theta'_2}{2} = \frac{\cos \frac{\beta' + \alpha'}{2}}{\cos \frac{\beta' - \alpha'}{2}} \quad (15)$$

对于 S_{23} 区左旋型BNT机构, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, $90^\circ < \beta < 180^\circ$ 。设 $\alpha = 2\pi + \alpha'$ ($0^\circ < \alpha' < 90^\circ$), $\beta = \pi + \beta'$ ($-90^\circ < \beta' < 0^\circ$), 代入式(4), 则

$$\tan \frac{\theta'_1}{2} \tan \frac{\theta'_2}{2} = \frac{\sin \frac{\pi + \beta' + 2\pi + \alpha'}{2}}{\sin \frac{\pi + \beta' - (2\pi + \alpha')}{2}} = \frac{\cos \frac{\beta' + \alpha'}{2}}{\cos \frac{\beta' - \alpha'}{2}} \quad (16)$$

3.2.4 S_{41} 和 R_{41} 区外角正切积的余弦形式

由于 S_{41} 区和 R_{41} 区是同一个区域。所以计算该区域的外角正切积, 直接采用 R_{41} 区的外角正切积余弦形式的式(16)即可。

由上面的分析可知, 非线性的 S_{12} 、 S_{34} 区和线对称的 S_{23} 区都可以通过交错角象限的变换, 转换到用锐角表示的 R_{41} 区, 在 R_{41} 区使外角正切积用交错角的余弦表达形式。因此, 从本质上讲, 非对称安装和线对称安装是同一种机构, 只不过正切积的表达形式不同。因此, 在 R_{41} 区用交错角为锐角的 α 取代 α' , β 取代 β' , 相邻杆外角为 θ'_1 、 θ'_2 (用 θ'_2 取代 θ'_2 和 $-\theta'_2$), 就可以得到相邻杆外角统一的正切积交

错角为锐角的余弦表达式, 即

$$\tan \frac{\theta'_1}{2} \tan \frac{\theta'_2}{2} = \frac{\cos \frac{\beta + \alpha}{2}}{\cos \frac{\beta - \alpha}{2}} \quad (17)$$

需要说明的是, 式(17)中相邻杆的外角 θ'_1 和 θ'_2 的作用区间为 $-180^\circ \leq \theta'_1 \leq 180^\circ$, $-180^\circ \leq \theta'_2 \leq 180^\circ$, 而式(11)~(16)邻杆的外角 θ'_1 和 θ'_2 的作用区间为 $0^\circ \leq \theta'_1 \leq 360^\circ$, $0^\circ \leq \theta'_2 \leq 360^\circ$ 。

用相邻杆内角 θ_1 、 θ_2 (图6)表示正切积余弦表达式为

$$\tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_2}{2} = \frac{\cos \frac{\beta - \alpha}{2}}{\cos \frac{\beta + \alpha}{2}} = k \quad (18)$$

这种用相邻杆内角表示的正切积余弦表达式, 式中 α 和 β 为锐角, θ_1 和 θ_2 的区间为 $-180^\circ \leq \theta_1 \leq 180^\circ$, $-180^\circ \leq \theta_2 \leq 180^\circ$ 。

在多环路 BNT 机构, 以及多环路 BNT 机构演变而成的 Goldberg 机构中, 使得各杆件之间的几何关系变的非常直观、简明, 有重要的应用意义。

综上所述, 由交错角 4 个区间得到的 4 组 BNT 机构, 本质上是相同的, 只是 1 组, 在使用中, 只要选一组运动轴线方向都一致的 $R_{41}(S_{41})$ 区间就可以了。

R_{41} 区间机构的 4 个运动副轴线的正方向都在同一侧, 并且轴线的正方向与相邻杆内角逆时针的角位移方向一致。这个特点用于表示多环路 BNT 机构和多杆单环路 Goldberg 机构的角位移关系带来了极大的方便。

由于 S_{41} 区第 4 象限和第 1 象限的交错角都可以用锐角 ($-\pi/2, \pi/2$) 方便地表示出来, 因此把 S_{41} 区间改写成用锐角表示的 R_{41} 区间作为 BNT 机构交错角的工作区间, 只要用锐角给出机构的结构参数方程和闭环位移方程, 就可以计算右旋型和左旋型两种基本类型的 BNT 机构, 这样就取代了用钝角给出的非线性安装和线性对称安装的两种不同形式的参数方程。

因此, BNT 机构的两种基本类型(右旋型和左旋型)的都是线性对称的, 下面用交错角的锐角给出的 BNT 机构的结构参数方程和闭环位移参数方程。

4 交错角为锐角的BNT机构参数方程

4.1 交错角为锐角的结构参数方程

在给定 BNT 机构相邻杆交错角的锐角作用区

间 R_{41} 为 $(-90^\circ < \alpha < 90^\circ)$ 前提下, 机构封闭的几何条件为: ① 对边的杆长相等和交错角相等, 交错角的旋向相同; ② 相邻两边的边长比值与交错角的正弦值比值相等, 符号相反; ③ 相邻两个边交错角的旋向相反。

$$a_1=a_3=a \quad b_2=b_4=b \quad \alpha_1=\alpha_3=\alpha \quad \beta_2=\beta_4=\beta \quad (19)$$

$$\frac{a}{b} = -\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (20)$$

式(20)是相邻杆杆长比值和交错角正弦比值的关系式。

$$\tau_a = -\tau_b \quad |\tau_a| = |\tau_b| = 1 \quad (21)$$

式中, τ_a 和 τ_b 是交错角的单位矢量。式(21)强调了相邻两杆交错角旋向相反的特性, 也体现了它们不能在作用区间的同一象限选取的约束条件。

4.2 交错角为锐角的位移参数方程

设 θ_{ij} 为第 i 个杆件相对邻杆 j 的角位移, 其中 $i=1, 2, 3, 4, j=i-1$, 简写为 θ_i 。角位移 θ_1 、 θ_3 和 θ_2 、 θ_4 都是相邻杆的内角。在 R_{41} 区间, $\theta_i (i=1, 2, 3, 4)$ 的取值区间为 $-180^\circ \leq \theta_i \leq 180^\circ$ 。

BNT 机构用交错角为锐角表示的闭环位移参

数方程为

$$\theta_1 = \theta_3 \quad (22)$$

$$\theta_2 = \theta_4 \quad (23)$$

$$\tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_2}{2} = \frac{\cos \frac{\beta - \alpha}{2}}{\cos \frac{\beta + \alpha}{2}} = k \quad (24)$$

式(24)称之为相邻杆的内角余弦形正切积方程, k 是锐角余弦正切积常数。重要结论: 任何 BNT 机构都是线性对称的机构。无论是机构的结构, 还是参数方程都证明了这一结论是正确的。

相邻杆交错角的作用区间为 R_{41} $(-90^\circ < \alpha < 90^\circ)$ 时, 相邻杆交错角 $-90^\circ < \alpha < 0^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$, 得到右旋型 BNT 机构; 相邻杆交错角 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $-90^\circ < \beta < 0^\circ$, 得到左旋型 BNT 机构。式(20)和式(24)就是 BNT 机构交错角为锐角的通用结构参数和位移参数方程。

表 1 给出了 BNT 机构相邻杆件交错角 4 个作用区间和机构类型的关系。 S_{12} 、 S_{23} 、 S_{34} 和 S_{41} 区间都可以转换成锐角的 R_{41} 区间, 所以 R_{41} 区间可以取代它们, 本质上只有一个 R_{41} 区间。

表 1 BNT 机构相邻杆件交错角作用区间与机构的类型的关系

交错角的区间		α 的范围	β 的范围	相邻杆长与交错角正弦值的比值	外角正切积	内角正切积
S_{12}	右旋型	$90^\circ<\alpha<180^\circ$	$0^\circ<\beta<90^\circ$	$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ 适用于 S_{12} 、 S_{34} 区间	$\tan \frac{\theta_1'}{2} \tan \frac{\theta_2'}{2} = \frac{\sin \frac{\beta + \alpha}{2}}{\sin \frac{\beta - \alpha}{2}}$ 适用于 S_{12} 、 S_{34} 区间	$\tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_2}{2} = \frac{\sin \frac{\beta - \alpha}{2}}{\sin \frac{\beta + \alpha}{2}}$ 适用于 S_{12} 、 S_{34} 区间
(1-2 象限)	左旋型	$0^\circ<\alpha<90^\circ$	$90^\circ<\beta<180^\circ$			
S_{34}	右旋型	$270^\circ<\alpha<360^\circ$	$180^\circ<\beta<270^\circ$			
(3-4 象限)	左旋型	$180^\circ<\alpha<270^\circ$	$270^\circ<\beta<360^\circ$			
S_{23}	右旋型	$90^\circ<\alpha<180^\circ$	$180^\circ<\beta<270^\circ$	$\frac{a}{b} = -\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ 适用于 S_{23} 、 S_{41} 区间， 也适用于 R_{41} 区间	$\tan \frac{\theta_1'}{2} \tan \frac{\theta_2'}{2} = \frac{\cos \frac{\beta + \alpha}{2}}{\cos \frac{\beta - \alpha}{2}}$ 适用于 S_{23} 、 S_{41} 区间， 也适用于 R_{41} 区间	$\tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_2}{2} = \frac{\cos \frac{\beta - \alpha}{2}}{\cos \frac{\beta + \alpha}{2}}$ 适用于 S_{23} 、 S_{41} 区间， 也适用于 R_{41} 区间
(2-3 象限)	左旋型	$180^\circ<\alpha<270^\circ$	$90^\circ<\beta<180^\circ$			
S_{41} 、 R_{41}	右旋型	$270^\circ<\alpha<360^\circ$	$0^\circ<\beta<90^\circ$			
	左旋型	$-90^\circ<\alpha<0^\circ$	$0^\circ<\beta<90^\circ$			
(4-1 象限)	左旋型	$0^\circ<\alpha<90^\circ$	$270^\circ<\beta<360^\circ$			
	右旋型	$0^\circ<\alpha<90^\circ$	$-90^\circ<\beta<0^\circ$			

5 在多环路 BNT 机构中的应用

图 14 是两个环路机架不共线的 5 杆两环右旋型 BNT 机构, 拆去两个环路公用的连架杆 6, 就得到图 15 机架不共线的右旋型 5 杆 Goldberg 机构。连架杆 1、4 和 6 的杆长 $a_1=a_4=a_6=120$ mm, 交错角 $\alpha_1=\alpha_4=\alpha_6=-10^\circ$ 。

图 14 两环 BNT 机构

图15 5杆 Goldberg 机构

环路 I 连杆 b_1 和机架 d_1 的长度为 $b_1=d_1=120$ mm, 交错角 $\beta_1=10^\circ$ 。环路 II 连杆 b_2 和机架 d_2 的长度 $b_2=d_2=120$ mm, 交错角 $\beta_2=10^\circ$ 。因为 $\theta_1=\theta_1^I=\theta_3^I$, $\theta_2=\theta_2^I=\theta_4^I$, $\theta_4=\theta_3^II=\theta_1^II$, $\theta_5=\theta_4^II=\theta_2^II$, $\theta_3=\theta_3^I+\theta_2^II$, 把 $\theta_1=\theta_1^I=70^\circ$ 代入式(24), 得到

$$\tan \frac{70^\circ}{2} \tan \frac{\theta_2}{2} = \frac{\cos \frac{\beta_1 - \alpha}{2}}{\cos \frac{\beta_1 + \alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{10^\circ - (-10^\circ)}{2}}{\cos \frac{10^\circ + (-10^\circ)}{2}} = \frac{\cos 10^\circ}{\cos 0^\circ}$$

求得 $\theta_2=109.1736^\circ \approx 109.17^\circ = \theta_4^I$, 与图 14 和图 15 的实测结果一致。这个结果说明用交错角为锐角建立的相邻构件内角的余弦正切积公式(24)是正确的。

由图15可以非常直观地得出5杆 Goldberg 机构的闭环位移方程, 即

$$\theta_3 - \theta_1 - \theta_5 = 0 \quad (25)$$

$$\theta_2 + \theta_4 = 2\pi - \theta_5^F \quad (26)$$

$$\tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_2}{2} = \frac{\cos \frac{\beta_1 - \alpha}{2}}{\cos \frac{\beta_1 + \alpha}{2}} = k_1 \quad (27)$$

$$\tan \frac{\theta_4}{2} \tan \frac{\theta_5}{2} = \frac{\cos \frac{\beta_2 - \alpha}{2}}{\cos \frac{\beta_2 + \alpha}{2}} = k_2 \quad (28)$$

式(25~(28)为 4 个独立方程, 可以求解 5 个位移参数 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 和 θ_5 。把连架杆件 1 和件 5 作为输入输出构件, 由式(27)和式(28)得到

$$\tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_5}{2} = k_1 k_2 / \left(-\tan \frac{\theta_5^F + \theta_4}{2} \tan \frac{\theta_4}{2} \right) \quad (29)$$

这就是件 1 和件 5 的输入输出函数。因为 $\theta_4=\theta_1^II=360^\circ-\theta_4^I-\theta_5^F=360^\circ-109.17^\circ-109.09^\circ=81.74^\circ$, 计算得到的 θ_4 与图15的 θ_5^II (θ_4)的实测结果相同, 与图14的 θ_3^II (θ_4 、 θ_1^II)的实测结果相同仅有 0.01° 的误差, 这里产生的 0.01° 误差是两次测量之间引起的误差, 显然可以忽略。把环路II的 $\theta_4=81.74^\circ$ 代入式(28), 得

$$\tan \frac{81.74^\circ}{2} \tan \frac{\theta_5}{2} = \frac{\cos \frac{\beta_2 - \alpha}{2}}{\cos \frac{\beta_2 + \alpha}{2}} = \frac{\cos 10^\circ}{\cos 0^\circ}$$

求得 $\theta_5=97.3910^\circ \approx 97.39^\circ$ 。说明用交错角为锐角建立的相邻构件内角的余弦正切积公式(24)和式(28)是正确的。

由图 14 和 15 都可以直观地得出 $\theta_3=\theta_1+\theta_5=70^\circ+97.39^\circ=167.39^\circ \approx 167.40^\circ$ 。说明 5 杆 Goldberg 机构和两环路 BNT 机构的运动学性能是等效的。把 $\theta_1=70^\circ$, $\theta_5^F=169.09^\circ$, $\theta_4=81.74^\circ$ 代入式(29), 则

$$\tan \frac{70^\circ}{2} \tan \frac{\theta_5}{2} = \left(\frac{\cos 10^\circ}{\cos 0^\circ} \right)^2 / \left(-\tan \frac{169.09^\circ + 81.74^\circ}{2} \tan \frac{81.74^\circ}{2} \right)$$

求得 $\theta_5=97.395^\circ \approx 97.39^\circ$ 。 θ_5 的计算值和图 15 的检测值相同, 说明式(29)是正确的。

以上的分析说明, 无论分析单环路BNT和多环路BNT机构, 还是分析多环路BNT机构演变为单环路的 Goldberg 机构、Myard 机构、6 杆 L 型 Goldberg 机构等, 采用内角的余弦正切积公式(24)都使得相邻杆件之间的角位移几何关系变得简单、直观, 清晰, 非常便于应用。

6 结论

在对 BNT 机构杆件交错角的一周 360° 的分析中, 由 S_{12} 和 S_{34} 区各得到 1 组非线性安装的左旋型和右旋型两类机构; 由 S_{23} 和 S_{41} 区各得到 1 组线性安装的左旋型和右旋型两类机构。通过对比发现, 2 组线性安装和 2 组非线性安装仅仅是运动副轴线不对称, 机构的结构是完全对称的, 它们并没有本质区别, 本质上只是 1 组机构。因此, 可以得出一个重要的结论: BNT 机构只有左旋型和右旋型两类基本机构, 它们都是线性对称的, 两种机构是一种运动链, 它们可以用 R_{41} 区间交错角为锐角的结构参数和闭环位移参数方程统一表示。同时还得到下面几个重要的规则。

(1) 交错角的象限选取约束条件为: 相邻杆的交错角不能在作用区间的同一象限选取, 这一约束条件是确保 BNT 机构环路封闭的必要约束之一。

(2) 相邻杆交错角的旋向相反。

(3) BNT 机构只有两种基本类型: 右旋型和左旋型, 这两种基本类型都是线性对称的。

(4) 两类 BNT 机构, 都可以用交错角为锐角的式(20)结构参数方程和式(24)闭环位移方程表示。

(5) 由图 5 和图 3、4, 以及图 6~11 的对比, 可以看出, 相邻杆的夹角用内角表示, 交错角的工作区间采用锐角的 R_{41} (S_{41})区间, 使得机构中各构件的位移参数几何关系简单, 直观, 对分析多环路组成的 BNT 机构将会带来很大的方便。

参 考 文 献

- [1] BENNETT G T. A new mechanism[J]. Engineering, 1903, 76: 777-778.
- [2] BENNETT G T. The skew isogram mechanism[J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1914, 13: 151-173.
- [3] BAKER J E. The composition of Bennett's hyperboloids from the loop itself[J]. Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, 2004, 126: 875-880.
- [4] 黄真, 刘婧芳, 李艳文. 论机构自由度[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
HUANG Zhen, LIU Jingfang, LI Yanwen. Mobility analysis of mechanisms[M]. Beijing: Science Press, 2011.
- [5] 王伟. 基于 Bennett 机构的空间大尺度可展网络的组装与分析[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2011.
WANG Wei. Assembling and analysis of large special deployable networks based on Bennett linkage[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2011.
- [6] HUANG Zhen, LIU Jingfang, ZENG Daxing. A general methodology for mobility analysis of mechanisms based on constraint screw theory[J]. Sci. China Ser. E-Tech. Sci., 2009, 52(5): 1337-1347.
- [7] CHEN Yan, YOU Zhong. On mobile assemblies of Bennett linkages[J]. Proc. Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2008, 464: 1275-1283.
- [8] ZHANG Ketao, DAI J S. Screw-system-variation enabled reconfiguration of the Bennett plano-spherical hybrid linkage and its evolved parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Design, Trans. ASME, 2015, 137(6): 062303.
- [9] DENG Zongquan, HUANG Hailin, LI Bing, et al. Synthesis of deployable/foldable single loop mechanisms with revolute joints[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, ASME, 2011, 3: 031006.
- [10] YANG Fufu, CHEN Yan, KANG Rongjie, et al. Truss transformation method to obtain the non-overconstrained forms of 3D overconstrained linkages[J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 102: 149-166.
- [11] CHEN Yan, PENG Rui, ZHONG You. Origami of thick panels[J]. Science Mag. Org., 2015, 349: 396-400.
- [12] 杨佳鑫, 吕胜男, 丁希仑. 基于 Bennett 机构的柱面拟合可展机构设计及分析[J]. 深空探测学报, 2017, 4(4): 340-345.
YANG Jiaxin, LÜ Shengnan, DING Xilun. Design and analysis of approximate cylindrical deployable mechanism with Bennett linkages[J]. Journal of Deep Space Exploration, 2017, 4(4): 340-345.
- [13] LIU Jingfang, YU Yueqing, HUANG Zen, et al. General order principle for multi-Bennett linkages[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2013, 26(2): 275-281.
- [14] BAKER J E. The Bennett, Goldberg and Myard linkages-in perspective[J]. Mechanism and Machine Theory, 1979, 14(4): 239-253.
- [15] 张启先. 空间机构的分析与综合[M]. 北京: 机械工业出版社, 1984.
ZHANG Qixian. Analysis and synthesis of spatial mechanism[M]. Beijing: China Machine Press, 1984.
- [16] BAKER J E. Kinematic investigation of the deployable Bennett loop[J]. ASME J. Mech. Des, 2007, 129: 602-610.
- [17] SONG C Y, CHEN Yan, CHEN I M. A 6R linkage reconfigurable between the line-symmetric Bricard linkage and the Bennett linkage[J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 70: 278-292.
- [18] HERVÉ J M, DAHAN M. The two kinds of Bennett's mechanisms[C]// Proceedings of the Sixth World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, New Delhi, India, 1983: 116-119.
- [19] CHEN Yan, BAKER J E. Using a Bennett linkage as a connector between other Bennett loops[J]. Proceeding of Institution of Mechanical Engineers, Journal of Multi-body Dynamics, 2005, 219(2): 177-185.
- [20] BAKER J E. Introducing the supplementary Bennett loop[J]. Mechanical Engineering Science, 2010, 225: 472-479.

作者简介: 鹿玲, 女, 1964 年出生, 副教授。主要研究方向为先进制造工艺与机器人技术。

E-mail: luling@ysu.edu.cn

张一同(通信作者), 男, 1945 年出生, 教授。主要研究方向为机构结构理论。

E-mail: ytzhang@ysu.edu.cn

牟德君, 女, 1967 年出生, 副教授。主要研究方向为机构结构理论。

E-mail: djmu@ysu.edu.cn

胡波, 男, 1982 年出生, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为机构结构理论和机器人技术。

E-mail: hubo@ysu.edu.cn

卢文娟, 女, 1983 年出生, 副教授。主要研究方向为机构结构理论。

E-mail: luwenjuan@ysu.edu.cn