DOI: 10.3901/JME.2020.04.258

变截面轴中弹性波传播特性试验研究*

魏义敏¹ 潘 骏¹ 杨世锡² 陈文华¹ 赵志伟¹

(1. 浙江理工大学浙江省机电产品可靠性技术研究重点实验室 杭州 310016;

2. 浙江大学机械工程学院 杭州 310027)

摘要: 在对大型旋转机械转轴进行状态监测时, 振源的振动需要通过轴等的传播后进行间接测量, 振动信号在轴中传播时也可能发生变化, 因此有必要对轴中弹性波的传播特性进行研究。轴中弹性波的传播特性则受到轴本身几何尺寸、形状等因素的影响, 同时转速也可能对弹性波在转轴中的传播特性产生影响。在理论研究的基础上搭建试验系统, 研究变截面轴截面变化形式、端面面积比以及转速对弹性波传播特性的影响。试验结果与理论分析结果吻合, 证明了轴截面面积变化、面积比以及转速对弹性波的传播特性存在影响。

关键词: 弹性波; 变截面轴; 传播特性; 面积比; 转速

中图分类号: TH113

Experimental Study about the Propagation Characteristics of the Elastic Wave in Rod with Non-uniform Cross-section

WEI Yimin¹ PAN Jun¹ YANG Shixi² CHEN Wenhua¹ ZHAO Zhiwei¹

(1. Key Laboratory of Reliability Technology for Mechanical and Electronic Product of Zhejiang Province, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310016;

2. School of Mechanical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract: Certain vibration signal of the rotating shaft can only be measured after transmitting through a component such as shaft when applying Condition Monitoring to a rotating machine. Frequency component of the elastic wave may be changed after propagation along the shaft itself, it's of critical necessary to study the characteristics of elastic wave propagating along the shaft. The elastic wave may be affected by the geometrical dimensions as well as the rotating speed. An experiment system based on the theoretical analysis is constructed to study the influence of the geometrical dimensions and rotating speed to the propagation characteristics of the elastic wave. A good agreement between the results of the experiment and the theoretical ones validates that the geometrical dimensions as well as the rotating speed does have an impact on the elastic wave propagation.

Key words: elastic wave; non-uniform shaft; transfer matrix; propagation characteristic; area ratio; rotating speed

0 前言

在工程实践中, 转轴是最常见的用来传播能量的一个部件, 如发电、汽车、轮船、航空等行业, 对旋转非均一轴的研究一直以来未曾间断^[1-5]。通常, 振动信号被用来获知转轴或者系统当前的运行状态, 但转轴轴振信号成分复杂, 包含大量的干扰噪声,

分析难度大, 且振源处的真实振动信号往往难以获取。振源处的振动可转化成弹性波, 弹性波在传播过程中, 其传播特性会受到介质物理属性、几何尺寸等因素的影响。如能对弹性波在转轴等介质中传播特性的研究, 便能对真实信号有重新认识, 间接获知振源处真实的振动信号^[6]。

转轴一直以来受到广泛的关注。LI 等^[7]采用了希尔伯特-黄变换来对存在疲劳裂纹的转轴信号进行研究, 提供了可自动调节精度的能量-频率-时间分布图; HAM 等^[8]采用增强的有限元方法来解决各种不同的波传播问题, 其优点在于能够处理二维以及三维问题。WHALLEY 等^[9]对波纹状外形的转轴

* 国家青年自然科学基金(51505430)、国家国际科技合作专项 (2015DFA71400)、“机械工程”浙江省高校重中之重(一级)学科优秀青年人才培养基金(ZSTUME01B03)和浙江理工大学科研启动基金 (15022013-Y)资助项目。20190316 收到初稿, 20190925 收到修改稿

系统进行了分析, 对轴直径大小为轴长函数的情形也进行了分析, 研究了轴的位移、斜度、弯矩以及剪切力。针对横截面的宽度和高度随长度的变化而变化的变截面梁, BANERJE 等^[1]采用了动态刚度方法, 从动力学的角度研究了该类梁的自由弯振。对于具有非线性外形以及惯量简支转轴, HOSSEINI 等^[10]利用多尺度方法研究了该类转轴的自由振动。张赣波等^[11]将复杂的船舶推进主轴系, 简化成为多级阶梯轴的连续弹性体模型, 并对其动力学特性展开了研究。对于波在不连续截面将会发生反射、折射以及衍射等现象, 舒歌群等^[12]根据一维扭转波动理论, 建立起了复杂阶梯轴各轴段中扭转弹性波的反射和透射关系, 并对其振动响应的数学表达式进行了研究分析。针对均匀的无限长固体杆, 崔寒茵等^[13]研究了导波在该类杆中的频散和激发特性, 导波所有模式的频散曲线也被快速求取。吴斌等^[14]从力学行为的角度, 对多杆、杆系结构中弹性波传播特性展开了试验研究。有关利用试验手段来研究不同截面变化方式、变截面面积比以及转速对变截面转轴中弹性波的传播特性, 鲜见其他报道。

旋转的转轴的研究成果很多, 弹性波在变截面转轴中的传播特性会受到截面变化方式、面积比、转速等因素的影响^[15-16]。本文将以理论研究为基础搭建试验台, 通过理论分析结合试验的手段, 探求不同截面变化方式、端面面积比的变截面转轴, 在不同的转速下弹性波传播特性的变化规律。

1 理论介绍

1.1 传递矩阵介绍

图 1 为变截面轴的示意图。 $S(x)$ 为变截面转轴在位置 x 处的横截面面积, E 、 ρ 、 γ 、 L 分别为轴材料的弹性模量、密度、泊松比、长度。不同的变截面轴, $S(x)$ 可能具有不同的变化方式。

图 1 变截面轴简图

通常, 在利用弹性波对转轴等介质进行分析时, 假设转轴等介质上所有点的运动状态均可以用一状态矢量 $\mathbf{y} = (u \ \phi \ Q \ M)^T \exp(j\omega t)$, 其中, u 、 ϕ 、 Q 、 M 是广义物理量, $\exp(j\omega t)$ 在计算中可约去故通常省略, 其中 $j = \sqrt{-1}$, ω 为弹性波的角频率。对于转轴来说, 这些变量分别表示对应点的位移、挠度、

力、力矩等。 O 、 P 处的运动状态则可分别利用状态矢量 $\mathbf{y}_O$ 、 $\mathbf{y}_P$ 表示。图 1 中, 设弹性波从 $O(x=0)$ 传入, 沿着变截面轴传播到 $P(x=L)$ 处, 弹性波在该变截面轴中的传播过程可用以下矩阵方程来表示

$$\mathbf{y}_P = \mathbf{T} \mathbf{y}_O \quad (1)$$

式中, $\mathbf{T}$ 被称为传递矩阵。

传递矩阵 $\mathbf{T}$ 表征了变截面轴中弹性波的传播过程, 弹性波的传播特性便也蕴含在传递矩阵中, 通常, 传递矩阵的特征值可用来表征变截面轴中弹性波的传播特性。设传递矩阵 $\mathbf{T}$ 的特征值为 λ_i , 并设

$$\lambda_i = \exp \mu_i = \exp \alpha_i + j \beta_i \quad (2)$$

特征值 μ_i 即表征了弹性波的传播特性, 其中, α_i 称为弹性波的衰减因子, 表征的是弹性波幅值在介质中传播时的衰减程度, 其值越大, 则表示衰减的程度越大, 衰减得也越快。 β_i 为相位角, 表征其弹性波各频率成分在传播过程中的相位差, 如果当 $\beta_i = 0$ 或 $\pm\pi$ 时, 不同的波成分便会相互抵消从而使得其无法通过, 对应频段称为弹性波的阻带, 阻带之外的频带则为通带^[17]。

1.2 计算传递矩阵

获取弹性波的传递矩阵是分析传播特性的基础。获取传递矩阵的常用方法为首先计算得出弹性波的运动方程, 然后利用分离原则, 结合状态矢量, 最后推导出弹性波在转轴中的传递矩阵。

图 2 所示为研究转轴时的两种坐标系图。通常为了更为方便的研究转轴, 需要同时建立固定坐标系和惯性坐标系两个坐标系。图 2 中, xyz 为固定于轴上的固定坐标系, XYZ 为惯性坐标系。 xyz 可以通过对 XYZ 进行旋转得来, 对应的转角如图示^[17]。本文中, 上标(·)和下标(_x)分别表示求对时间 t 的导数及对 x 的偏导数。在图 2 所示的转轴中, 可以求出, 转轴的动能为

图 2 转轴的两种坐标系

$$T_{shaft} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho S (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) dx + \rho I L \Omega^2 + 2 \Omega \int_0^L \rho I \dot{\psi} \theta dx \quad (3)$$

式中, u 、 w 分别表示转轴上的点在固定坐标系中

y -以及 z -方向的横向位移, I 为轴的惯性矩, Ω 为转轴的转速; 对于对称的转轴来说, 满足关系式 $I_y = I_z = I$, 可以求出其势能为

$$U_{shaft} = \frac{1}{2} \int_0^L EI(u_{,xx}^2 + w_{,xx}^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^L F_{ext}(u_{,xx}^2 + w_{,xx}^2) dx \quad (4)$$

式中, F_{ext} 为转轴受到的均布外力^[1]。通常可认为: 轴在转动时其上所有点的运动均为简谐运动, 于是可设 $W(x, t) = [u(x, t) + jw(x, t)] = U(x) \exp j\omega t$ 。应用

广义哈密顿原理 $\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U + W) dt = 0$, 可得^[17]

$$\rho S(x) \ddot{W} + \rho I(x) \Omega \dot{W} + (EI(x) W_{,xx})_{,xx} = m_u \Omega^2 \varepsilon W_u [\sin \Omega t + \cos \Omega t] \quad (5)$$

式(5)即为轴的运动方程, 变截面轴上所有点均满足此运动方程。

本文选取 $y = (U \quad U_{,x} \quad Q \quad M)^T$ 为状态矢量, 对式(5)应用分离原则, 并进行矩阵等式变换, 可得

$$y(L) = \left[G(L) \exp \int_0^L A(x) dx G(0)^{-1} \right] y(0) = T y(0) \quad (6)$$

可知, 传递矩阵 T 为

$$T = G(L) \exp \int_0^L A(x) dx G(0)^{-1} \quad (7)$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\rho S(x)(\omega^2 + \Omega^2) - j\omega \rho I(x) \Omega}{EI} & 0 & -\frac{2I_{,x}}{I} & -\frac{I_{,xx}}{I} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -EI(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EI(x) \end{pmatrix}$$

从式(7)可知, T 的表达式中包含了 I 、 S 、 Ω 等变量, I 、 S 与截面的变化形式以及面积比有关, Ω 为转轴转速。可以看到, 传递矩阵 T 的特征值也可能受到这些变量的影响, 因此本文后续将对这些变量的影响进行分析。为了对传播特性进行研究, 需求出 T 的特征值, 式(7)中包含了指数矩阵, 因此不能直接求解特征值的解析解。通常可采用数值计算的方法来该类问题进行求解。

2 试验台搭建和试验内容

2.1 试验台搭建

根据理论分析中相关条件和要求, 搭建了本试验台。试验台由基座、转轴、三相电动机、变频器、

激振器、数据采集器、力传感器、加速度传感器、光电传感器等组成。具体如图3所示。转轴的旋转通过三相电机来实现, 光电传感器可直接反馈转轴的转速, 通过变频器结合转速反馈值, 可以转轴稳定运行。激振器通过对转轴施加激振力已达到激发弹性波的目的, 而激振力大小则可由力传感器测得, 具体如图4所示。加速度传感器被安置在轴两侧的轴承上, 用来测量弹性波, 数据采集器用来采集各传感器的数据。

图3 试验系统图

图4 激振力施加

试验时, 电机以设定转速带动变截面轴旋转, 激振器给转轴施加激振力, 弹性波被激发后沿着转轴传播, 满足了理论分析中的要求。同时, 数据采集器以同步采集的方式对力传感器、加速度传感器进行了采集, 可保证数据采集的精确性、同步性。

由前述内容可知, 所设计的试验系统具备验证理论分析的相关条件, 可以实现不同截面变化形式、不同端面面积比的转轴在不同转速条件下的试验。

2.2 试验内容

本文中的试验内容包括两个部分: ① 不同截面变化方式、端面面积比与变截面转轴中弹性波的传播特性变化之间的关系; ② 不同转速对弹性波传播特性变化之间的关系。

第一部分试验内容在研究不同截面变化方式时, 设转轴的转速选定为 $\Omega = 3\,000 \text{ r/min}$ (50 Hz)。试验轴选用了两种截面变化方式: 指数截面变化方式 ($r(x) = r_0 \exp 0.346\,6x/L$)、多项式变化方式 ($r(x) =$

$r_0(1+2x/L)^{0.3155}$), 轴长度 $L=0.6$ m, 两根轴的端面面积为 $S(0)/S(L)$ 为 1/2。同时, 对与变截面转轴等体积的均一轴也进行分析, 便于进行对比分析, 均一轴的半径分别为 12.01 mm、12.38 mm; 本文仅以指数变截面和多项式变截面为例进行了分析, 对于本文没有给出的其他截面面积变化方式, 也可以进行同样的分析。在研究不同面积比的影响时, 选用指数变截面方式、横截面面积比 $S(0)/S(L)$ 分别为 1/1、1/2、1/3、1/4 的变截面轴以及与之等体积的均一轴, 均一轴的半径分别为 10.00 mm、12.01 mm、13.49 mm、14.71 mm。第二部分试验在验证转速的影响时, 选用了前述面积比为 1/4 的指数变截面轴以及与之等体积的均一轴作为试验对象。由于试验条件的限制, 仅选取了 0 r/min、1 500 r/min、3 000 r/min 以及 4 500 r/min 等转速, 更高的转速条件下, 亦可进行类似的分析。

转轴材料均为钢材, 弹性模量 E 为 2.06×10^{11} Pa, 泊松比 γ 为 0.3, 密度为 ρ 为 $7.8 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 。试验时, 弹性波在变截面轴中从如图 1 所示的 $O(x=0)$ 处被激振器激发, 然后传播到 $P(x=L)$ 处, 试验将对位置 O 和 P 处的弹性波进行测量以研究弹性波在该过程中的传播特性。

3 数值分析与试验结果对比

本节将对数值仿真以及试验的结果对进行分析对比, 以对传播特性进行研究。针对上一节中给出的变截面轴, 首先利用数值方法, 研究了截面变化方式、端面面积比、转轴转速与弹性波传播特性改变之间的关系; 在进行数值分析以后, 对应的开展了相关试验。

3.1 面积比及截面变化形式

首先进行了数值分析, 将第 2 节所述的端面面积比 $S(0)/S(L)$ 分别为 1/1、1/2、1/3、1/4 的轴的相关参数以及设定的转速值(恒定为 $\Omega=3\,000$ r/min (50 Hz)), 代入式(7), 由于式(7)中包含了指数矩阵, 无法直接求得其特征值的解析解, 本文将借助 Matlab 数值工具计算出传递矩阵 T , 并计算得出其特征值。具体如图 6 所示。

图 5 为端面面积比为 1/1、1/2、1/3、1/4 的变截面转轴在 3 000 r/min 的转速下的传播常数图。当端面面积比为 1/1 时, 第一个阻带不存在, 图中没有画出。图中有三种不同的标识符, 每种标识符代表一种面积比的结果, 而具有相同标示符的一组实线和虚线表示的是一对共轭的衰减因子或相位角。图 5 中给出了 0~5 kHz 频率范围内的传播常数,

考虑到较高频率的阻带所对应的能量分布较低, 因此本文将重点分析弹性波的第一个阻带, 其余的阻带将在后续研究中继续研究。

图 5 同转速不同端面面积比下弹性波的传播常数图

从图 5 可知: 端面面积比 1/2、1/3、1/4 的变截面转轴对应的第一个阻带频率分别为: [925, 1 010]、[902, 1 183]、[861, 1 303]。阻带范围内的弹性波无法通过转轴。由此可知: 随着端面面积比的增大, 第一个阻带带宽将变宽, 且各阻带对应下边界逐渐降低、上边界逐渐升高, 整个阻带的中心频率也将变高。

将第 2 节中两种截面变化方式轴的相关参数代入式(7), 借助 Matlab 数值计算工具, 计算得到了传递矩阵的特征值, 两种变化方式的数值仿真结果相同, 具体如图 5 中三角形符号所标示虚实两条曲线所示。可以看到: 在所分析的频带内(0~5 kHz), 本文所选取的两种变截面转轴截面变化方式(指数截面变化、多项式截面变化)对弹性波的传播特性无影响。

针对不同截面变化方式以及面积比的数值分析, 本文开展了相应的试验。考虑到信号成分的复杂性, 试验时选用了如第 2 节所述的端面面积比 $S(0)/S(L)$ 分别为 1/1、1/2、1/3、1/4 的轴以及与它们等体积的均一轴。在对试验数据进行分析时, 本文采取了对变截面轴和与之等体积的均一轴进行频谱对比分析的方法, 直接从频谱所表征能量的高低来研究分析弹性波的传播特性^[17]。试验的分析结果如图 6 所示。

图 6 为不同面积比变截面转轴弹性波的试验阻带图。图 6 中所示细虚线、粗实线分别为变截面轴的位移频谱图以及与之等体积的均一轴的位移频谱图。面积比为 1/1 的转轴无明显阻带因而未画出, 从图 6 中可以看出, 当端面面积比 $S(0)/S(L)=1/2$ 时, 阻带为 [875, 1 100]; 当面积比为 1/3 时, 阻带为

[910,1250];当面积比为1/4时,阻带为[850,1400]。可以看到,试验所得出的阻带带宽,随着面积的增大而不断增大,虽然阻带的下边界没有呈现出逐渐降低的现象,但上边界呈现出升高的趋势,中心频率也不断升高。忽略局部的误差,试验结果能够较好的吻合理论分析的结果。误差产生的原因一方面是由于理论模型中轴为无限长,试验中轴为有限长,另一方面,为了分析的简便,试验只针对第一个阻带进行了分析。此外,试验中亦无法直接测量轴的振动,而只能通过轴承座间接测量,这也是误差的来源之一。

(a) $S(0)/S(L)=1/2$ 时的阻带

(b) $S(0)/S(L)=1/3$ 时的阻带

(c) $S(0)/S(L)=1/4$ 时的阻带

图6 不同面积比变截面转轴弹性波的试验阻带图

3.2 转轴转速

首先进行转速的数值分析,将选定的面积比 $S(0)/S(L)=1/4$ 的转轴的几何参数以及转速值 (0 r/min、1 500 r/min、3 000 r/min、4 500 r/min) 代入式(7),同样借助 Matlab 计算工具对传递矩阵的特征值进行了数值求解。结果如图7所示。

图7为面积比为 $S(0)/S(L)=1/4$ 的转轴在 $\Omega=0$ Hz、25 Hz、50 Hz 以及 75 Hz 下的传播常数图。图7给出了 0~5 kHz 频率范围内的通带阻带值。同样,考虑到较高频率的阻带所对应的能量分布较低,此处也只对第一个阻带进行分析。从图7可知,当转轴转速 Ω 分别为 0 r/min、1 500 r/min、3 000 r/min 以及 4 500 r/min 时,对应的第一个阻带分别为 [972,1372]、[948,1371]、[862,1305]、[724,1203]。不难看出,

随着转速的增加,阻带的上下边界均呈现出降低的现象,中心频率也不断降低,阻带带宽逐渐变宽。

图7 不同转速条件下同一变截面轴的传播常数图

试验根据数值仿真的相关要求进行,试验时,同样为了更好地进行对比分析,在对端面面积比 $S(0)/S(L)=1/4$ 进行试验的同时,也对与之同体积的等截面轴在相同的转速条件下进行试验。试验的结果如图8所示。

(a) 当 $\Omega=0$ Hz 时的阻带

(b) 当 $\Omega=25$ Hz 时的阻带

(c) 当 $\Omega=50$ Hz 时的阻带

图 8 不同转速下变截面转轴试验阻带图

从图 8 中可以看出, 当变截面转轴转速 Ω 分别为 0 r/min、1 500 r/min、3 000 r/min、4 500 r/min 时, 对应的第一个阻带分别为 [950, 1350]、[900, 1400]、[800, 1270]、[680, 1250]。可以看到, 阻带的上边界虽然没有呈现出逐渐降低的现象, 但总体表现为降低的趋势。其下边界随着转速的增加逐渐降低, 中心频率也不断降低, 且阻带带宽逐渐变宽。同样地, 由于试验条件与理论模型存在差别等因素, 导致试验的结果与理论分析结果虽然局部存在一定的误差, 但是总体趋势一致、吻合较好, 理论分析的结果得到了试验验证。

4 结论

(1) 在低频段内, 在变截面轴端面面积相同的前提下, 当转轴截面变化方式发生改变后, 转轴中弹性波的传播特性未发生变化。对于其他的截面变化方式, 也可进行类似的分析。

(2) 随着变截面轴端面面积比的增大, 弹性波的第一个阻带带宽将变宽, 且阻带对应下边界逐渐降低、上边界逐渐升高, 整个阻带的中心频率也逐渐升高。

(3) 对于同一变截面转轴来说, 随着其转速的增加, 弹性波第一个阻带的带宽也逐渐变宽, 且其上下边界均逐渐降低, 阻带的中心频率也在不断降低。

本文对端面面积比、转速单一因素变化下研究了对转轴中弹性波的传播特性的变化。对于端面面积比、转轴转速两因素同时作用时引起的弹性波传播特性的改变, 以及对第二以及更高阻带的分析值得进一步研究。

参 考 文 献

- [1] BANERJEE J R, SU H, JACKSON D R. Free vibration of rotating tapered beams using the dynamic stiffness method[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 298(4-5): 1034-1054.
- [2] 吴昭同, 杨世锡. 旋转机械故障特征提取与模式分类新

方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2012.

WU Zhaotong, YANG Shixi. Fault feature extraction and modes classification methods for rotating machinery[M]. Beijing: Science Press, 2012.

- [3] 李先广, 杨勇. 数控滚齿机滚刀主轴振动特性研究[J]. 机械工程学报, 2017, 53(1): 130-139.
- LI Xianguang, YANG Yong. Research on the vibration properties of hob spindle for CNC gear hobbing machine[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(1): 130-139.
- [4] 吕浪, 熊万里, 侯志泉. 面向机电耦合振动抑制的电主轴系统匹配特性研究 [J]. 机械工程学报, 2012, 48(9): 144-154.
- LÜ Lang, XIONG Wanli, HOU Zhiquan. Research on match characteristics of a motorized spindle system to suppress electromechanical coupling vibration[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(9): 144-154.
- [5] 孟龙, 刘孟, 支发林, 等. 机械不平衡及轴瓦间隙对水轮机运行稳定性的影响分析[J]. 机械工程学报, 2016, 52(3): 49-55.
- MENG Long, LIU Meng, ZHI Falin, et al. Analysis of the influence of the mechanical imbalance and the bearing clearance on the operating stability of hydro-power Unit[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(3): 49-55.
- [6] AYERS III J T. Structural damage diagnostics via wave propagation-based filtering techniques [D]. Georgia: Georgia Institute of Technology, 2010.
- [7] LIN L, CHU F. HHT-based AE characteristics of natural fatigue cracks in rotating shafts [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2012, 26(1): 181-189.
- [8] HAM S, BATHE K-J. A finite element method enriched for wave propagation problems [J]. Computers & Structures, 2012, 94-95(3): 1-12.
- [9] WHALLEY R, ABDUL-AMEER A. Contoured shaft and rotor dynamics[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(4): 772-783.
- [10] HOSSEINI S A, KHADEM S E. Free vibrations analysis of a rotating shaft with nonlinearities in curvature and inertia[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(1): 272-288.
- [11] 张赣波, 赵耀. 船舶主推进轴系纵向振动的弹性波解析研究 [J]. 中国造船, 2012, 53(3): 140-150.
- ZHANG Ganbo, ZHAO Yao. Elastic wave analysis on longitudinal vibration of marine propulsion shafting[J]. Shipbuilding of China, 2012, 53(3): 140-150.
- [12] 舒歌群, 郝志勇. 阶梯轴中扭转弹性波主动控制研究

- [J]. 机械工程学报, 2001, 37(12): 47-50.
- SHU Gequn, HAO Zhiyong. Investigation on active control of torsional elastic wave in stepped shaft system[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2001, 37(12): 47-50.
- [13] 崔寒茵, 师芳芳, 籍顺心, 等. 沿均匀无限介质中固体杆传播的导波特性的研究[J]. 声学学报, 2010, 35(4): 446-454.
- CUI Hanyin, SHI Fangfang, JI Shunxin, et al. Guided wave in a rod surrounded by an infinite solid medium[J]. Acta Acustica, 2010, 35(4): 446-454.
- [14] 吴斌, 张善元, 杨桂通. 杆系结构弹性波传播的实验研究[J]. 固体力学学报, 1998, 19(2): 47-55.
- WU Bin, ZHANG Shanyuan, YANG Guitong. The experimental study on the elastic wave propagation of framed rods[J]. Chinese Journal of Acoustics. 1998, 19(2): 47-55.
- [15] GAN C, WEI Y, YANG S. Longitudinal wave propagation in a rod with non-uniform cross-section[J]. Journal of Sound and Vibration, 2014, 333(2): 434-445.
- [16] GAN C, WEI Y, YANG S. Longitudinal wave propagation in a multi-step rod with variable cross-section[J]. Journal of Vibration and Control, 2016, 22(3): 837-852.
- [17] TOSO M. Wave propagation in rods, shells, and rotating shafts with non-uniform geometry[D]. Maryland: University of Maryland, 2004.
-
- 作者简介: 魏义敏, 男, 1986 年出生, 博士, 讲师。主要研究方向为振动传播机理、设备状态监测和故障诊断、机电产品可靠性设计与试验。
E-mail: yiminwei@126.com
- 陈文华(通信作者), 男, 1963 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为机电产品可靠性技术研究。
E-mail: chenwh@zstu.edu.cn