DOI: 10.3901/JME.2020.03.106

含润滑间隙和曲轴转子-轴承结构的平面柔性多连杆机构多体动力学建模与动态误差分析*

郑恩来¹ 储磊¹ 蒋书运² 朱松青³ 康敏¹ 史金飞³

(1. 南京农业大学工学院 南京 210031;

2. 东南大学机械工程学院 南京 211189;

3. 南京工程学院机械工程学院 南京 211167)

摘要: 为预测多连杆高速精密压力机的动态精度,有必要建立多连杆机构的动力学模型。传统模型仅考虑间隙和构件柔性等因素,通常忽略了曲轴转子-轴承系统结构的影响,导致多连杆高速精密压力机的动态分析精度下降。本文提出了一种含润滑间隙和曲轴转子-轴承结构平面柔性多连杆机构多体动力学建模与仿真方法并构建了滑块与曲轴两者之间的动态尺寸链,该方法同时考虑了间隙,连杆和曲轴的柔性以及轴承的刚度等因素。仿真结果表明,在空载和冲裁两种工况下,基于含润滑间隙和曲轴转子-轴承结构平面柔性多连杆机构多体动力学模型的动态响应比传统模型更接近实验结果,验证了所提出方法的有效性。实验结果表明,在空载工况下,滑块在下死点位置存在剧烈加速度波动,而冲裁工况下,滑块在下死点位置产生冲击峰。曲轴转子-轴承结构的存在加剧了滑块位移偏离误差,润滑油的存在对整个机构起到了缓冲作用,但并不能显著提高滑块的运动精度。下滑块与连杆之间运动副间隙处润滑油膜不足以抵消运动副元素之间的碰撞和冲击,导致润滑油膜在运行过程中破裂,销轴与轴承衬套之间只存在一种永久接触状态。此外,研究了间隙尺寸、打击力以及轴承的接触角对机构动态误差的影响规律。

关键词: 多连杆机构; 间隙; 润滑; 柔性; 多体动力学

中图分类号: TH113

Multi-body Dynamic Modeling and Error Analysis of Planar Flexible Multi-link Mechanism with Lubricated Revolute Clearance Joints and Crankshaft-bearing Structure

ZHENG Enlai¹ CHU Lei¹ JIANG Shuyun² ZHU Songqing³ KANG Min¹ SHI Jinfei³

(1. College of Engineering, Nanjing Agricultural University, Nanjing 210031;

2. School of Mechanical Engineering, Southeast University, Nanjing 211189;

3. School of Mechanical Engineering, Nanjing Institute of Technology, Nanjing 211167)

Abstract: To predict the dynamic precision of multilink high-speed precision presses (MLHSPPs), it is essential to develop a dynamic model of the multilink mechanism (MLM). Previous models only considered the effect of the clearance, flexible linkages and crankshaft, and often neglected the effect of supporting bearings' stiffness on the crankshaft system, which lowers the dynamic analysis accuracy of the MLM for MLHSPPs. In this work, a computational methodology for modeling and simulation of planar flexible MLM with lubricated clearance joints and spindle-bearing structure is proposed considering the effect of clearance, flexibility of crankshaft and linkage, and bearing stiffness together, and its corresponding dynamic dimension chain between the slider and crankshaft is constructed. It is demonstrated that the simulated dynamic responses from the flexible model with lubricated clearance joints and spindle-bearing structure under no-load and blanking conditions agree better with the experimental data than those from traditional ones, and the effectiveness of the proposed methodology is verified. The measured results show that the acceleration of slider under no-load condition has severe fluctuations at the position of bottom dead center, while that under blanking condition produces a shock

* 国家自然科学基金(51405238), 中央高校基本科研业务费重大专项 (KYTZ201603)资助项目。20190311 收到初稿, 20190918 收到修改稿

peak. The existence of crankshaft-bearing structure aggravates the displacement deviation of slider. The lubricating oil acted as a cushion for MLM, but it cannot improve the motion accuracy of slider. The lubricating oil film in the revolute clearance joint between slider and linkage is insufficient to counteract the impact between bushing and pin, which causes the rupture of lubricating film during operation. The motion of the pin center for revolute joint between lower slider and link was characterized by only one permanent contact state. Furthermore, the effect of the clearance size, the blanking force and the contact angle of the bearing on the dynamic deviation errors are also investigated.

Key words: multilink mechanism; clearance; lubrication; flexibility; multibody dynamic

0 前言

多连杆高速超精密压力机作为“少无切削类”高效工作母机,能够解决薄壁零件冲裁和深拉伸工艺过程中撕裂起皱、废品率高、模具使用寿命低以及噪声和振动大等问题^[1],符合洁净生产和绿色生产的要求,广泛应用于汽车制造、航空航天、家电、IT 等行业。由于相对运动要求、制造和装配误差、磨损等因素,实际机构中不可避免地存在运动副间隙。在多连杆机构运动过程中,特别是在高速、冲击工况下,间隙的存在破坏了理想机构模型,改变了连接件的受力,引起振动、噪声和磨损,导致机构产生振动误差。

在研究运动副间隙对机构动态响应特性影响的过程中,形成了三种典型的间隙模型:一状态模型(间隙杆模型)^[2]、二状态模型(等效弹簧阻尼模型)^[3]以及三状态模型(碰撞冲击模型)^[4,5],并在航空航天领域的机构动力学分析中获得了广泛应用^[6-9]。在此基础上,为研究销轴与轴承之间形成的楔入与挤压油膜对机构动态响应特性的影响,基于流体动力学理论形成了含间隙与润滑机构动力学模型。ALSHAER 等^[10]和 FLORES 等^[11-14]为含间隙与润滑机构建模的代表人物,文献^[15-18]丰富并应用了该模型。在传动执行机构运转过程中,特别是在高速、冲击工况下,与运动副间隙误差相比,构件的弹性变形对机构传动精度影响同样显著,于是形成了含间隙柔性机构的动力学模型,其中柔性体的建模方法主要为有限元法。例如:基于有限元法,BAUCHAU 等^[19]和 KHEMILI 等^[20]建立了含间隙柔性曲柄滑块机构的动力学模型,研究了柔性与间隙对其动态性能的影响。DUPAC 和 BEALE 研究了含间隙柔性曲柄滑块机构的动态响应,并基于李雅普诺夫(Lyapunov)方程分析了其稳定性^[21]。一状态模型虽简单但误差最大,三状态模型最为复杂但最精确。现有三类间隙模型还不完善,特别是柔性关节间隙模型的广义描述一直未得到解决,还需从理论和实验角度深入分析间隙作用机理,特别是间隙中的碰撞问题,包括碰撞力的描述、碰撞能量的耗散、

摩擦等影响,以便提出更加精细的间隙模型。此外,目前尚未见报道有关于考虑主轴-轴承系统耦合效应的多连杆机构的动力学模型。

本文提出一种考虑曲轴-轴承系统效应的含润滑间隙柔性多连杆机构多体动力学模型建模与仿真方法,预测并分析了多连杆机构滑块的动态误差影响规律,为多连杆高速精密压力机的结构设计与优化提供了理论基础。

1 多连杆机构多体动力学建模

高速精密压力机多连杆机构实体模型见图 1,该机构由曲柄滑块和肘杆机构两部分串联组成。当曲轴 2 绕着中心 O 旋转,滑块 4 将经过连杆 3 沿着导轨作左右往复移动。因肘杆 5 和 6 与滑块 4 铰接在一起,这导致下滑块 7 和上滑块 8 在竖直方向上做往复运动。多连杆高速精密压力机的动态性能主要由下滑块 7 的动态精度决定。因此,建立多连杆机构的动力学模型对压力机的动态精度预测和结构优化显得极其重要。

图 1 多连杆传动机构实体模型

1.1 理想多连杆机构动力学模型

理想平面多连杆机构的动力学模型见图 2,不考虑各个杆件的弹性变形,且各个铰链都是理想的,由于机构的对称性,只选择右半机构作为研究对象。

为便于描述机构的运动副约束,选择建立的参考基和连体基如表 1 所示。

图2 理想多连杆机构动力学模型

表1 参考基和连体基

参考基	$O-e$	曲柄2	C_2-e_2
连杆3	C_3-e_3	导向滑块4	C_4-e_4
连杆5	C_5-e_5	连杆6	C_6-e_6
主滑块7	C_7-e_7	副滑块8	C_8-e_8

定义刚体的笛卡儿位形坐标为

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1^T \cdots \mathbf{q}_8^T]^T \quad (1)$$

式中, $\mathbf{q}_i = (\mathbf{r}_i^T \ \theta_i)^T = (x_i \ y_i \ \theta_i)^T$, $\mathbf{r}_i$ 为位置矢量, 代表部件 i 的质心坐标; θ_i 为部件 i 的转角。对于滑块而言, θ_i 恒为零; 而对于连杆, θ_i 为部件 $i-1$ 和部件 i 铰接点连线与 x 轴正方向逆时针的角度。

定义机构部件铰链处的约束方程为

$$\Phi_{21} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{S}_{21} = 0 \quad (2a)$$

$$\Phi_{32} = \mathbf{r}_3 + \mathbf{A}_3 \mathbf{S}_{32} - \mathbf{r}_2 - \mathbf{A}_2 \mathbf{S}_{23} = 0 \quad (2b)$$

$$\Phi_{43} = \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3 - \mathbf{A}_3 \mathbf{S}_{34} = 0 \quad (2c)$$

$$\Phi_{64} = \mathbf{r}_6 + \mathbf{A}_6 \mathbf{S}_{64} - \mathbf{r}_4 = 0 \quad (2d)$$

$$\Phi_{76} = \mathbf{r}_7 - \mathbf{r}_6 - \mathbf{A}_6 \mathbf{S}_{67} = 0 \quad (2e)$$

$$\Phi_{54} = \mathbf{r}_5 + \mathbf{A}_5 \mathbf{S}_{54} - \mathbf{r}_4 = 0 \quad (2f)$$

$$\Phi_{85} = \mathbf{r}_8 - \mathbf{r}_5 - \mathbf{A}_5 \mathbf{S}_{58} = 0 \quad (2g)$$

式中, $\mathbf{A}_i$ 是旋转变换矩阵, $\mathbf{S}_{ij}$ 为部件 i 和部件 j 的铰链在连体基 $C_i - e_i$ 中的坐标。

旋转变换矩阵 $\mathbf{A}_i$ 和坐标 $\mathbf{S}_{ij}$ 可表示为

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \quad (3a)$$

$$\mathbf{S}_{ij} = \begin{cases} (-l_{s_i} \ 0)^T, & i > j \\ (l_i - l_{s_i} \ 0)^T, & i < j \end{cases} \quad (3b)$$

式中, l_{s_i} 为部件 $i-1$ 与部件 i 的铰链中心距部件 i 质心之间的距离, l_i 为部件 i 的长度。

移动副约束可视为绝对位置约束

$$\Phi_4 = (y_4 - y_4^0 \ \theta_4)^T = 0 \quad (4a)$$

$$\Phi_7 = (x_7 - x_7^{(0)} \ \theta_7)^T = 0 \quad (4b)$$

$$\Phi_8 = (x_8 - x_8^{(0)} \ \theta_8)^T = 0 \quad (4c)$$

式中, $x_7^{(0)}$ 和 $x_8^{(0)}$ 为常数, 分别表示主滑块 7 与连杆 6 铰接处, 副滑块 8 与连杆 5 铰接处在参考基中的水平位置。

连杆 2 的驱动约束为

$$\Phi_2 = \theta_2 - \omega_2 t = 0 \quad (5)$$

理想多连杆机构总体约束可表示为

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{21}^T \\ \Phi_{32}^T \\ \Phi_{43}^T \\ \Phi_{64}^T \\ \Phi_{76}^T \\ \Phi_{54}^T \\ \Phi_{85}^T \\ \Phi_4^T \\ \Phi_7^T \\ \Phi_8^T \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (6)$$

因机构部件个数为 7 个, 系统形位坐标个数为 21 个, 完整约束为 21 个。约束 Φ 对时间求导可得到速度约束为

$$\dot{\Phi} = \Phi_q \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t = 0 \quad (7)$$

式中, $\Phi_q = \Phi_q(\mathbf{q}, t)$ 为约束雅可比矩阵, 表达为

$$\Phi_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_{21}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial q_{21}} \end{bmatrix} \quad (8)$$

速度约束方程中 $\Phi_t = \Phi_t(\mathbf{q}, t)$ 可表示为

$$\Phi_t = \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \ \cdots \ \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial t} \right]^T \quad (9)$$

速度约束方程对时间求导可得到加速度约束方程, 可表示为

$$\ddot{\Phi} = \Phi_q \ddot{\mathbf{q}} + (\Phi_q \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} + \Phi_{qt} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_{iq} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_{tt} = 0 \quad (10)$$

式(10)也可以表示为

$$\Phi_q \ddot{\mathbf{q}} = \gamma \quad (11)$$

其中: $\gamma = -[(\Phi_q \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} + \Phi_{qt} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_{iq} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_{tt}]$ 。

受约束理想多连杆机构多体动力学数学模型可以表示为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}^r & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^r \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (12)$$

式中, $\mathbf{M}^r$ 为形位坐标对应的质量矩阵, $\mathbf{F}^r$ 为形位

坐标对应的外力, λ 为拉格朗日乘子。

$$\mathbf{M}^r = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1^r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_2^r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{M}_n^r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_i^r = \begin{pmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & J_i \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}^r = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1^r \\ \mathbf{F}_2^r \\ \vdots \\ \mathbf{F}_n^r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_i^r = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_i g \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.2 含润滑间隙柔性多连杆机构多体动力学模型

运动副间隙的存在, 将使运动副元素之间产生冲击和碰撞, 导致机构的传动精度下降。为缓和运动副元素之间冲击与碰撞, 常利用润滑系统将使销轴与衬套之间产生一层润滑油膜。当压力机进行冲裁操作时, 上下模具之间产生的冲压力将造成肘杆 6 显著变形。滑块 7 的质量远大于机构其它构件的质量, 滑块 7 的重力和惯性力也将导致肘杆 6 产生变形, 降低机构的传动精度。因为滑块 8 起到平衡块的作用, 与肘杆 6 相比, 肘杆 5 的柔性影响可以忽略。此外, 为研究曲轴-轴承系统结构对下滑块 7 的动态精度影响, 曲轴 2 和连杆 3 之间的润滑间隙和曲轴的柔性影响需要考虑。因此, 含润滑间隙平面柔性多连杆机构的多体动力学模型如图 3 所示, 机构的结构参数如表 2 所示。

图 3 含润滑间隙柔性多连杆机构动力学模型

1.2.1 旋转干间隙铰链模型

理想的旋转铰链, 销和衬套的中心始终重合, 只发生相对旋转。在实际旋转铰链中, 销和衬套之间存在间隙, 致使两者之间的中心偏离。当轴销接触到衬套时, 引起冲击并产生接触力。

旋转间隙铰链模型见如图 4 所示, 销轴与衬套两者中心之间的偏心矢量 $\mathbf{e}_1$ 可表示为

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{r}_i^p - \mathbf{r}_j^p = (\mathbf{r}_i + \mathbf{A}_i \mathbf{s}_i') - (\mathbf{r}_j + \mathbf{A}_j \mathbf{s}_j') \quad (13)$$

式中, $\mathbf{r}_i$ 和 $\mathbf{r}_j$ 为部件 i 和 j 的质心在参考基准坐标系中的矢量, $\mathbf{s}_i'$ 和 $\mathbf{s}_j'$ 为销轴与衬套中心在各自连体坐标系原点中的矢量, $\mathbf{A}_i$ 和 $\mathbf{A}_j$ 为矢量在连体局部坐标系往总体参考基准坐标系的转换矩阵。

沿着偏心矢量方向的单位矢量为

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 / \|\mathbf{e}_1\| \quad (14)$$

销轴和衬套接触点在参考基准坐标系中的位置矢量可表达为

$$\mathbf{r}_m^Q = \mathbf{r}_m + \mathbf{A}_m \mathbf{s}_m + R_m \mathbf{n} \quad (m = i, j) \quad (15)$$

式中, R_m 为销轴与衬套的半径, $R_i = R_j$, $R_j = R_B$ 。

图 4 旋转干间隙铰链模型

当销轴和衬套发生碰撞时, 由于局部变形, 两者之间的穿透深度为

$$\delta = \|\mathbf{e}_1\| - c \quad (16)$$

式中, c 为衬套与销轴两者之间的半径差, $c = R_B - R_P$ 。

销轴与衬套两者之间的相对接触速度为

$$\dot{\delta} = \dot{\mathbf{r}}_j^Q - \dot{\mathbf{r}}_i^Q = v_n \mathbf{n} + v_t \mathbf{t} \quad (17)$$

式中, v_n 和 v_t 分别为接触点处的法向和切向速度。

偏心矢量与水平方向之间的夹角为

$$\alpha = \arctan(e_{1x} / e_{1y}) \quad (18)$$

当穿透深度 $\delta < 0$ 时, 衬套和销之间不发生接触; 反之, 两个部件之间接触并产生接触力。根据 LANKARANI 和 NIKRAVESH 提出的接触力模型^[22], 接触力分为弹性和耗散分量两部分。基于 Hertz 接触理论并结合了滞后阻尼功能的接触力模型为

$$F_n = K_n \delta^n + D_n \dot{\delta} \quad (19)$$

接触刚度系数 K_n 可表示为

$$K_n = \frac{4\sqrt{(R_B R_P)/(R_B + R_P)}}{3\pi((1-\mu_B)/(\pi E_B) + (1-\mu_P)/(\pi E_P))} \quad (20)$$

阻尼系数 D_n 可表示为

$$D_n = 3K_n(1-c_e)\delta^{(-)}/4\dot{\delta}^{(-)} \quad (21)$$

式中, c_e 为碰撞恢复系数, $\delta^{(-)}$ 为碰撞前的相对接触速度。

为克服由于切线速度改变而出现摩擦力突变造成的数值困难, 应用修正库仑摩擦力, 表示为^[11]

$$F_t = -c_f c_d F_n \quad (22)$$

式中, c_f 为摩擦系数, c_d 为动态修正因子。

动态修正因子可表示为

$$c_d = \begin{cases} 0 & v_t \leq v_0 \\ (v_t - v_0)/(v_1 - v_0) & v_0 < v_t \leq v_1 \\ 1 & v_t > v_1 \end{cases} \quad (23)$$

式中, v_1 和 v_0 为销轴与衬套两者之间相对切向速度的给定上下限。

1.2.2 旋转润滑间隙铰链模型

旋转润滑间隙铰链包括销轴、衬套以及润滑油, 见图 5 所示。润滑间隙铰链中的偏心矢量表达式与干间隙铰链相同, 区别在于转换矩阵不同, 可表示为

$$A_k = \begin{bmatrix} \cos \phi_k & -\sin \phi_k \\ \sin \phi_k & \cos \phi_k \end{bmatrix} \quad (k=i, j) \quad (24)$$

式中, ϕ_k 为部件 k 的连体坐标系的旋转角。

图5 旋转润滑间隙铰链模型

润滑间隙铰链的单位偏心矢量与干间隙类似。

偏心矢量的长度为

$$e_1 = \sqrt{e_1^T e_1} \quad (25)$$

偏心率可以定义为

$$\varepsilon = e_1 / c \quad (26)$$

偏心矢量对时间进行微分可得到

$$\dot{e}_1 = \dot{r}_j^p + \dot{A}_j s_j^p - \dot{r}_i^p - \dot{A}_i s_i^p \quad (27)$$

同样地, 偏心率对时间进行微分可得

$$\dot{\varepsilon} = \dot{e}_1 / c \quad (28)$$

偏心矢量与水平方向之间的夹角 γ 可表示为

$$\gamma = \arctan(n_y / n_x) \quad (29)$$

夹角 γ 对时间进行微分可得

$$\dot{\gamma} = (n_x \dot{n}_y - \dot{n}_x n_y) / n^2 \quad (30)$$

销轴与衬套之间的最小油膜厚度为

$$h_{\min} = c(1-\varepsilon) \quad (31)$$

因销轴长度与衬套的直径之比小于 0.5, 佐默费尔德将其视为无限短类型。基于佐默费尔德条件, 无限短润滑间隙铰链的径向和切向力可表示为^[23]

$$F_r = -\frac{\pi \mu L^3 R_p}{c^2} \frac{\dot{\varepsilon}(1+2\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \quad (32a)$$

$$F_t = \frac{\pi \mu L^3 R_p}{c^2} \frac{\varepsilon(\omega - 2\dot{\gamma})}{2(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \quad (32b)$$

1.2.3 柔性连杆动力学模型

多连杆高速精密压力机在工作时连杆的变形对滑块运动影响不容忽视, 必须采用柔性多体模型替代刚体模型。本文提出采用绝对节点坐标法直接在惯性系中描述柔性体的位形。

柔性连杆单元如图 6 所示, 单元 i 上任意一点 P 的位置矢量 r 由绝对节点坐标 e 和型函数 S 表示

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = S e \quad (33)$$

式中, r_1 、 r_2 分别为坐标的水平 and 竖直分量。

图6 柔性连杆单元

型函数 S 可表示为

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & s_2 l & 0 & s_3 & 0 & s_4 l & 0 \\ 0 & s_1 & 0 & s_2 l & 0 & s_3 & 0 & s_4 l \end{bmatrix} \quad (34)$$

式中, $\xi = x/l$, $s_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$, $s_2 = \xi - 2\xi^2 + \xi^3$, $s_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3$, $s_4 = \xi^3 - \xi^2$, x 是点 P 变形前在局

部坐标系中的坐标, l 为单元长度。

绝对节点坐标 $\mathbf{e}$ 的表达式为

$$\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4 \ e_5 \ e_6 \ e_7 \ e_8]^T \quad (35)$$

式中, e_i 为位置矢量, $[e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4]^T$ 为单元起始节点的坐标, $e_1 = r_1|_{x=0}$, $e_2 = r_2|_{x=0}$, $e_3 = \partial r_1 / \partial x|_{x=0}$, $e_4 = \partial r_2 / \partial x|_{x=0}$; $[e_5 \ e_6 \ e_7 \ e_8]^T$ 为末端节点坐标, $e_5 = r_1|_{x=l}$, $e_6 = r_2|_{x=l}$, $e_7 = \partial r_1 / \partial x|_{x=l}$, $e_8 = \partial r_2 / \partial x|_{x=l}$ 。

单元 i 的质量矩阵为

$$\mathbf{M}_i = \rho A l \int_0^1 \mathbf{S}^T \mathbf{S} d\xi \quad (36)$$

式中, ρ 为连杆单元密度, A 为连杆单元横截面积, l 为单元长度。

对于主动力只有重力的单元, 单元受的体积力 $\mathbf{f}$ 可表示为

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho g \end{bmatrix} \quad (37)$$

单元 i 的广义外力为

$$\mathbf{Q}_i = A l \int_0^1 \mathbf{S}^T \mathbf{f} d\xi \quad (38)$$

通常单元轴向变形远远小于弯曲变形, 假设单元内轴向变形是常量, 单元平均轴向变形定义为

$$\bar{\mathbf{f}} = \sqrt{\mathbf{e}^T \bar{\mathbf{S}}_i \mathbf{e}} \quad (39)$$

式中, $\bar{\mathbf{S}}_i = \int_0^1 \mathbf{S}_{el} d\xi$, $\mathbf{S}_{el} = (\partial \mathbf{S} / \partial \xi)^T (\partial \mathbf{S} / \partial \xi) \cdot l^2$ 。

与单元轴向变形有关的刚度矩阵表示为

$$\mathbf{K}_i = \frac{1}{2} E A l \int_0^1 (\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{el} \mathbf{e}) \mathbf{S}_{el} d\xi - \frac{1}{2} E A l \int_0^1 \mathbf{S}_{el} d\xi \quad (40)$$

式中, E 为连杆单元的弹性模量。

与单元弯曲变形有关的刚度矩阵表示为

$$\mathbf{K}_i = \frac{1}{f^4} E I \mathbf{S}_i - \frac{2}{f^6} E I (\mathbf{e}^T \mathbf{S}_i \mathbf{e}) \bar{\mathbf{S}}_i \quad (41)$$

式中, $\mathbf{S}_i = l^{-3} \int_0^1 (\partial^2 \mathbf{S} / \partial \xi^2)^T (\partial^2 \mathbf{S} / \partial \xi^2) d\xi$, I 为单元的惯性矩。

单元 i 总体刚度矩阵为

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_i + \mathbf{K}_i \quad (42)$$

单元 i 的动力学模型为

$$\mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_i \mathbf{e} = \mathbf{Q}_i \quad (43)$$

定义 $\mathbf{p}$ 为连杆的总体坐标阵, $\mathbf{e}_{(i)}$ 表示第 i 个单元的绝对节点坐标, 两者之间的关系为

$$\mathbf{e}_{(i)} = \mathbf{B}_i \mathbf{p} \quad (44)$$

式中, n 为单元数, $\mathbf{B}_i = [\mathbf{0}_{8 \times (4i-4)} \ \mathbf{E}_{8 \times 8} \ \mathbf{0}_{8 \times (4n-4i)}]$, $\mathbf{p} = [e_1 \ \cdots \ e_{4n+4}]^T$, $\mathbf{0}_{8 \times (4i-4)}$ 表示 $8 \times (4i-4)$ 的零矩阵, $\mathbf{E}_{8 \times 8}$ 表示 8×8 的单位矩阵, $\mathbf{0}_{8 \times (4n-4i)}$ 表示 $8 \times (4n-4i)$ 的零矩阵。

连杆的动力学模型为

$$\mathbf{M}^f \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}^f \mathbf{p} = \mathbf{Q}^f \quad (45)$$

式中, $\mathbf{M}^f$ 为连杆的质量矩阵, $\mathbf{M}^f = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{B}_i$,

$\mathbf{K}^f$ 为刚度矩阵, $\mathbf{K}^f = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{B}_i$, $\mathbf{Q}^f$ 为广义外力,

$$\mathbf{Q}^f = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i^T \mathbf{Q}_i。$$

表 2 含润滑间隙柔性多连杆机构仿真参数

参数	数值	参数	数值
曲轴的偏心距 l_2 /m	0.0178	连杆 5 的长度 l_5 /m	0.1075
曲轴的质量 m_2 /kg	17.3	连杆 5 的质量 m_5 /kg	3.12
曲轴的转动惯量 J_2 /(kg·m ²)	0.0174	连杆 5 的转动惯量 J_5 /(kg·m ²)	0.0174
连杆 3 的长度 l_3 /m	0.1965	连杆 6 的长度 l_6 /m	0.1075
连杆 3 的质量 m_3 /kg	4.11	连杆 6 的质量 m_6 /kg	0.88
连杆 3 的转动惯量 J_3 /(kg·m ²)	0.0351	连杆 6 的转动惯量 J_6 /(kg·m ²)	0.0599
滑块 4 的质量 m_4 /kg	6.42	滑块 7 的质量 m_7 /(kg)	121.43
滑块 8 的质量 m_8 /kg	107.05	切向速度的上界 v_1 /(mm/s)	50
连杆 7 和滑块 8 之间的销轴半径 R_p /m	0.07	柔性连杆单元的数目	4
柔性连杆单元节点数目	5	切向速度的下界 v_0 /(mm/s)	10
碰撞恢复系数 c_e	0.9	销轴的泊松比 μ_p	0.29
衬套的泊松比 μ_B	0.38	衬套的弹性模量 E_B /GPa	0.5
销轴的弹性模量 E_p /GPa	206.8	摩擦系数 c_f	0.01
连杆的密度 ρ_l /(kg/m ³)	7800	连杆的弹性模量 E_l /(N/m ²)	2.1×10^{11}
连杆的横截面积 A_l /m ²	0.0027	连杆的直径惯性矩 I_l /m ⁴	2.25×10^{-6}
冲裁力的脉冲宽度 τ /s	0.00417	冲裁载荷的最大力 $F_{\max}$ /kN	10
润滑油粘度 μ /(m ² /s)	8.7×10^{-5}	轴承衬套的厚度 L /mm	0.33

2 曲轴-轴承系统动力学建模

如图 7 所示, 曲轴-轴承系统由主轴、角接触球轴承以及同步带轮等组成。采用刚性圆盘、弹性梁以及轴承单元建立曲轴-轴承系统的有限元模型如图 8 所示。

2.1 同步带轮模型

曲轴系统上的同步带轮可视为刚性圆盘单元。假定刚性圆盘的阻尼可以忽略, 基于拉格朗日方法同步带轮的动力学方程可表示为^[24]

$$\mathbf{M}^d \ddot{\mathbf{q}} - \omega_2 \mathbf{G}^d \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}^d \quad (46)$$

式中, $\mathbf{M}^d$ 为刚性圆盘的质量矩阵, $\mathbf{G}^d$ 为陀螺矩阵, $\mathbf{F}^d$ 为外界力矢量, $\mathbf{q}$ 为位移矢量, m_D 为同步带轮的质量, e_c 为同步带轮质心与几何中心的距离, J_D 为同步带轮绕中心轴的转动惯量, I_D 为同步带轮绕直径的转动惯量, u , v 和 w 为沿着 x , y 和 z 三个方向的位移, θ_y 和 θ_z 为沿着 y 和 z 轴的转角, ω_2 为曲轴的输入速度。

$$\mathbf{M}^d = \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_D \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^d = \begin{bmatrix} m_D e_c \omega_2^2 \cos \omega_2 t \\ m_D e_c \omega_2^2 \sin \omega_2 t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^b = T_1 \begin{bmatrix} m_{a1} & & & & & & & & & \\ 0 & m_1 + 504 & & & & & & & & S \\ 0 & 0 & m_1 + 504 & & & & & & & Y \\ 0 & 0 & -(m_2 + 14m_7) & m_5 + 14m_8 & & & & & & M \\ 0 & m_2 + 14m_7 & 0 & 0 & m_5 + 14m_8 & & & & & \\ m_{a2} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{a1} & & & & \\ 0 & m_3 - 504 & 0 & 0 & -(m_4 + 14m_7) & 0 & m_1 + 504 & & & \\ 0 & 0 & m_3 - 504 & m_4 + 14m_7 & 0 & 0 & 0 & m_1 + 504 & & \\ 0 & 0 & -(m_4 + 14m_7) & m_6 + 14m_9 & 0 & 0 & 0 & m_2 + 14m_7 & m_5 + 14m_8 & \\ 0 & m_4 + 14m_7 & 0 & 0 & m_6 + 14m_9 & 0 & -(m_2 + 14m_7) & 0 & 0 & m_5 + 14m_8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_C^b = T_1 \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & \\ 0 & m_1 & & & & & & & & S \\ 0 & 0 & m_1 & & & & & & & Y \\ 0 & 0 & -m_2 & m_5 & & & & & & M \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & m_5 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{a1} & & & & \\ 0 & m_3 & 0 & 0 & -m_4 & 0 & m_1 & & & \\ 0 & 0 & m_3 & m_4 & 0 & 0 & 0 & m_1 & & \\ 0 & 0 & -m_4 & m_6 & 0 & 0 & 0 & m_2 & m_5 & \\ 0 & m_4 & 0 & 0 & m_6 & 0 & -m_2 & 0 & 0 & m_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^b = T_2 \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & S \\ 0 & 36 & 0 & & & & & & & Y \\ 0 & -m_7 & 0 & 0 & & & & & & M \\ 0 & 0 & -m_7 & m_8 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 36 & -m_7 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -36 & 0 & 0 & m_7 & 0 & 36 & 0 & & \\ 0 & -m_7 & 0 & 0 & -m_9 & 0 & m_7 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -m_7 & m_9 & 0 & 0 & 0 & m_7 & m_8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -J_D \\ 0 & 0 & 0 & J_D & 0 \end{bmatrix}.$$

2.2 曲轴转子模型

每一段曲轴转子可视为铁木辛柯弹性梁单元。基于哈密顿原理, 梁的动力学方程的矩阵形式为

$$\mathbf{M}^b \ddot{\mathbf{q}} - \omega_2 \mathbf{G}^b \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}^b + \mathbf{K}_p^b - \omega_2^2 \mathbf{M}_C^b) \mathbf{q} = \mathbf{F}^b \quad (47)$$

式中, $\mathbf{M}^b$ 为曲轴段的质量矩阵, $\mathbf{M}_C^b$ 为相对于离心力的质量矩阵, $\mathbf{G}^b$ 为陀螺矩阵, $\mathbf{K}^b$ 为刚度矩阵, $\mathbf{K}_p^b$ 为由于轴向载荷产生的刚度矩阵, $\mathbf{F}^b$ 为离散和集中力矢量, A_c 为曲轴段的横截面面积, ρ_c 为曲轴的密度, E_c 为曲轴的弹性模量, I_c 为曲轴段绕直径的转动惯量, G_c 为曲轴段的切变模量, l 为曲轴段的长度, k_s 为横向剪切形状因子。

2.3 角接触球轴承接触刚度计算模型

多连杆高速精密压力机系统中曲轴转子部件的润滑油道仅存在于曲轴的中心处, 曲轴结构上的角接触球轴承不受润滑油影响。当力作用于轴承时, 轴承内外圈曲率中心之间距离发生改变, 见图 9。假设外圈不产生位移量, 球心在惯性力和附加力矩的共同作用下由初始位置移动到最终位置。

$$\mathbf{K}^b = T_3 \begin{bmatrix} k_1 & & & & & & & & \\ 0 & 12 & & & S & & & & \\ 0 & 0 & 12 & & & Y & & & \\ 0 & 0 & -6l & k_2 & & & M & & \\ 0 & 6l & 0 & 0 & k_2 & & & & \\ -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 & & \\ 0 & -12 & 0 & 0 & -6l & 0 & 12 & & \\ 0 & 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 0 & 12 & \\ 0 & 0 & -6l & k_3 & 0 & 0 & 0 & 6l & k_2 \\ 0 & 6l & 0 & 0 & k_3 & 0 & -6l & 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_P^b = T_4 \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ 0 & k_4 & & & S & & & & \\ 0 & 0 & k_4 & & & Y & & & \\ 0 & 0 & -3l & k_5 & & & M & & \\ 0 & 3l & 0 & 0 & k_5 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -k_4 & 0 & 0 & -3l & 0 & k_4 & & \\ 0 & 0 & -k_4 & 3l & 0 & 0 & 0 & k_4 & \\ 0 & 0 & -3l & k_6 & 0 & 0 & 0 & 3l & k_5 \\ 0 & 3l & 0 & 0 & k_6 & 0 & -3l & 0 & 0 & k_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}^b = [q_x l / 2, q_y l / 2 - m_z / (1 + \Phi), q_z l / 2 + m_y / (1 + \Phi), -q_z l^2 / 12 + \Phi m_y l / 2(1 + \Phi), q_y l^2 / 12 + \Phi m_z l / 2(1 + \Phi),$$

$$q_x l / 2, q_y l / 2 + m_z / (1 + \Phi), q_z l / 2 - m_y / (1 + \Phi), q_z l^2 / 12 + \Phi m_y l / 2(1 + \Phi), -q_y l^2 / 12 + \Phi m_z l / 2(1 + \Phi)]^T$$

$$m_1 = 156 + 294\Phi + 140\Phi^2, m_2 = (22 + 38.5\Phi + 17.5\Phi^2)l, m_3 = 54 + 126\Phi + 70\Phi^2, m_4 = -(13 + 31.5\Phi + 17.5\Phi^2)l$$

$$m_5 = (4 + 7\Phi + 3.5\Phi^2)l^2, m_6 = -(3 + 7\Phi + 3.5\Phi^2)l^2, m_7 = (3 - 15\Phi)l, m_8 = (4 + 5\Phi + 10\Phi^2)l^2, m_9 = (-1 - 5\Phi + 5\Phi^2)l$$

$$m_{a1} = 140(1 + \Phi)^2, m_{a2} = 70(1 + \Phi)^2, \Phi = 12E_c I_c / (k_s A_c G_c l^2), T_1 = \rho_c A_c l / (420(1 + \Phi)^2), T_2 = \rho_c I_c / (30(1 + \Phi)^2 l)$$

$$T_3 = E_c I_c / ((1 + \Phi)l^3), T_4 = P / (30(1 + \Phi)l), k_1 = A_c (1 + \Phi)l^2 / I_c, k_2 = (4 + \Phi)l^2, k_3 = (2 - \Phi)l^2, k_4 = 36 + 60\Phi + 30\Phi^2$$

$$k_5 = (4 + 5\Phi + 2.5\Phi^2)l^2, k_6 = -(1 + 5\Phi + 2.5\Phi^2)l^2$$

图 7 曲轴转子-轴承系统的结构

图 8 曲轴转子-轴承系统有限元模型

表 3 曲轴转子-轴承系统仿真参数

参数	数值	参数	数值
滚珠数	10	轴承的节圆直径/mm	85
滚珠质量/kg	3.6273×10^{-2}	横向剪切形状因子	0.9
滚珠直径/mm	11.9062	曲轴的密度/(kg/m ³)	7.87×10^3
曲轴的弹性模量/(N/m ²)	2.15×10^{11}	滚珠的泊松比	0.29
曲轴的切变模量/(N/m ²)	0.8×10^{11}	轴承内外圈的泊松比	0.32
滚珠的弹性模量/(N/m ²)	2.14×10^{11}	轴承内外圈的弹性模量/(N/m ²)	2.37×10^{11}
极惯性矩/(kg·m ²)	26	直径惯性矩/(kg·m ²)	17.3
同步带轮质量/kg	200		

当曲轴轴承的外圈相对固定, 内圈的运行角速度为 ω , 滚动体 k 的位置角为 φ_k , 滚动体的数量为

N , 在内、外圈滚道和保持架约束下, 滚动体不仅绕着轴承轴线做角速度为 ω_{mk} 的公转, 同时绕着自

图9 角接触球轴承内外圈曲率中心位移关系

身轴线做角速度为 ω_{bk} 的自转。

角接触球轴承滚动体的离心力和陀螺力矩可表示为

$$F_{ck} = \frac{\pi}{12} \rho d^3 D_m \omega^2 \left(\frac{\omega_{mk}}{\omega} \right)_k \quad (48a)$$

$$M_{gk} = J_b \omega^2 \left(\frac{\omega_{bk}}{\omega} \right)_k \left(\frac{\omega_{mk}}{\omega} \right)_k \sin \alpha_k \quad (48b)$$

式中, d 为滚珠的直径, ρ 为滚动体的密度, J_b 为滚动体的转动惯量, $J_b = \pi \rho d^5 / 60$, α_k 为滚动体 k 的自转轴与轴承轴线两者之间所形成的夹角, $\alpha_k = \arctan(\sin \theta_{ok} / (\cos \theta_{ok} + \lambda))$, D_m 为轴承的中径, λ 为滚动体直径与轴承中径的比值, d / D_m 。

基于滚道控制理论, 本文中曲轴系统中角接触球轴承假定为外圈滚道控制, 即滚动体在滚道外圈上的自转角速度为 0, 两者之间的运动仅为纯滚动。

$$F_{ik} = 0 \quad (49a)$$

$$F_{ok} = 2M_{gk} / d \quad (49b)$$

如图 10 所示, 滚动体的力平衡方程为

$$Q_{ik} \sin \theta_{ik} - Q_{ok} \sin \theta_{ok} - F_{ok} \cos \theta_{ok} = 0 \quad (50a)$$

$$Q_{ik} \cos \theta_{ik} - Q_{ok} \cos \theta_{ok} + F_{ok} \sin \theta_{ok} + F_{ck} = 0 \quad (50b)$$

式中, Q_{ik} 和 Q_{ok} 为轴承内外圈与滚动体之间的接触力, $Q_{ik} = K_i \delta_{ik}^{3/2}$, $Q_{ok} = K_o \delta_{ok}^{3/2}$; δ_{ik} 和 δ_{ok} 为轴承内外圈与滚动体之间的变形, K_i 和 K_o 为轴承内外圈与滚动体之间的接触刚度, θ_{ik} 和 θ_{ok} 分别为滚动体与内外圈滚道之间的接触角, 并存在如下关系

$$\sin \theta_{ik} = (U_{ik} - U_k) / \Delta_{ik}, \sin \theta_{ok} = U_k / [(f_o - 0.5)D] \quad (51a)$$

$$\cos \theta_{ik} = (V_{ik} - V_k) / \Delta_{ik}, \cos \theta_{ok} = V_k / [(f_o - 0.5)D] \quad (51b)$$

根据三角形勾股定理, 角接触球轴承的位置几何方程为

$$(U_{ik} - U_k)^2 + (V_{ik} - V_k)^2 - \Delta_{ik}^2 = 0 \quad (52a)$$

$$U_k^2 + V_k^2 - \Delta_{ok}^2 = 0 \quad (52b)$$

式中, Δ_{ik} 和 Δ_{ok} 分别为变形后内圈滚道曲率中心与滚动体中心, 外圈滚道曲率中心与滚动体中心之间的距离, $\Delta_{ik} = (f_i - 0.5)d + \delta_{ik}$, $\Delta_{ok} = (f_o - 0.5)d$ 。

在外部载荷作用下, 轴承内圈曲率中心最终位置坐标可表示为

$$U_{ik} = B_d \sin \theta + \delta_x - \gamma_z r_{ic} \cos \varphi_k + \gamma_y r_{ic} \sin \varphi_k \quad (53a)$$

$$V_{ik} = B_d \cos \theta + \delta_y \cos \varphi_k + \delta_z \sin \varphi_k \quad (53b)$$

式中, B_d 为轴承未变形时内、外圈曲率中心的距离, $B_d = (f_o + f_i - 1)d$, θ 为未变形时轴承的接触角, φ_k 为第 k 个滚动体、轴承中心两点连线与 y 轴所形成的夹角, $\varphi_k = 2\pi k / N$, δ_x , δ_y , δ_z , γ_y 和 γ_z 分别为角接触球轴承内外圈之间的位移 $\delta_x = \delta_{ik}^x - \delta_{ok}^x$, $\delta_y = \delta_{ik}^y - \delta_{ok}^y$, $\delta_z = \delta_{ik}^z - \delta_{ok}^z$, $\gamma_y = \gamma_y^i - \gamma_y^o$, $\gamma_z = \gamma_z^i - \gamma_z^o$, $r_{ic} = D_m / 2 - (f_i - 0.5)d \cos \theta$ 。

联立式(50a), (50b), (53a)以及(53b), 将滚动体与套圈滚道之间的接触形式视为赫兹空间点接触形式, 利用牛顿-拉普森方法可以获得参数 U_k , V_k , δ_{ik} 和 δ_{ok} 。

由于曲轴转子与轴承内圈的相互作用, 导致内圈有微小位移量。假设轴承外圈为理想模型, 不产生位移。考虑滚动体对轴承内圈的相互作用, 轴承内圈的力平衡方程为

$$F_x = \sum_{k=1}^N (Q_{ik} \sin \theta_{ik}) \quad (54a)$$

$$F_y = \sum_{k=1}^N (Q_{ik} \cos \theta_{ik}) \cos \varphi_k \quad (54b)$$

$$F_z = \sum_{k=1}^N (Q_{ik} \cos \theta_{ik}) \sin \varphi_k \quad (54c)$$

$$M_y = \sum_{k=1}^N r_{ic} (Q_{ik} \sin \theta_{ik}) \sin \varphi_k \quad (54d)$$

$$M_z = - \sum_{k=1}^N r_{ic} (Q_{ik} \sin \theta_{ik}) \cos \varphi_k \quad (54e)$$

于是, 轴承对曲轴转子的动态支撑刚度为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial \delta_x} & \frac{\partial F_x}{\partial \delta_y} & \frac{\partial F_x}{\partial \delta_z} & \frac{\partial F_x}{\partial \gamma_y} & \frac{\partial F_x}{\partial \gamma_z} \\ \frac{\partial F_y}{\partial \delta_x} & \frac{\partial F_y}{\partial \delta_y} & \frac{\partial F_y}{\partial \delta_z} & \frac{\partial F_y}{\partial \gamma_y} & \frac{\partial F_y}{\partial \gamma_z} \\ \frac{\partial F_z}{\partial \delta_x} & \frac{\partial F_z}{\partial \delta_y} & \frac{\partial F_z}{\partial \delta_z} & \frac{\partial F_z}{\partial \gamma_y} & \frac{\partial F_z}{\partial \gamma_z} \\ \frac{\partial M_y}{\partial \delta_x} & \frac{\partial M_y}{\partial \delta_y} & \frac{\partial M_y}{\partial \delta_z} & \frac{\partial M_y}{\partial \gamma_y} & \frac{\partial M_y}{\partial \gamma_z} \\ \frac{\partial M_z}{\partial \delta_x} & \frac{\partial M_z}{\partial \delta_y} & \frac{\partial M_z}{\partial \delta_z} & \frac{\partial M_z}{\partial \gamma_y} & \frac{\partial M_z}{\partial \gamma_z} \end{bmatrix} \quad (55)$$

根据上述弹性轴段、刚性圆盘、轴承单元的分

析, 整理得到曲轴转子-轴承系统的运动方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(t) \quad (56)$$

其中, $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$ 分别为质量、阻尼和刚度矩阵。

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^b + \mathbf{M}^d, \quad \mathbf{C} = \mathbf{G}^b + \mathbf{G}^d + \mathbf{C}^s, \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}^b + \mathbf{K}_p^b + \mathbf{K}_{b2} - \omega^2 \mathbf{M}_C^b$$

图 10 轴承滚珠的力平衡关系

最后, 通过 Newmark 法数值积分法可求曲轴转子-轴承系统的动态响应。

$$\mathbf{M}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{x}}^{(i)} + \mathbf{C}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{x}}^{(i)} + \mathbf{K} \Delta \mathbf{x}^{(i)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}(\mathbf{x})^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}(t) \quad (57)$$

式中, ${}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{x}}^{(i)}$, ${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{x}}^{(i)}$, ${}^{t+\Delta t} \mathbf{x}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{x}^{(i)}$ 分别为曲轴转子-轴承系统在时间 $t + \Delta t$ 第 i 次迭代时加速度、速度以及位移响应; ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}(t)$ 为在时间 $t + \Delta t$ 时外界作用力; ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}(\mathbf{x})^{(i-1)}$ 为在时间 $t + \Delta t$ 第 $i-1$ 次迭代时内力。

曲轴-轴承系统的结构参数如表 3 所示。当曲轴转子的输入转速为 200 r/min 和安装在曲轴上的轴承接触角为 40° 时, 曲轴转子上轴段 11 处的仿真和实验位移量如图 11 所示。

(a) 水平方向

(b) 竖直方向

图 11 轴段 11 的位移量

由图可知, 曲轴转子轴段 11 的水平和竖直仿真位移量与实验结果几乎保持一致, 验证了曲轴转子-轴承系统模型的正确性。水平方向的位移量的峰值分别为 0.929 9 mm 和 -0.945 3 mm, 竖直方向的位移量峰值分别为 0.043 39 mm 和 -0.043 92 mm, 水平方向的位移量大于竖直方向的两倍。

3 模型验证

多连杆机构滑块的动态响应主要受机构和曲轴-轴承系统两部分影响, 可由含润滑间隙的柔性多连杆机构和曲轴转子系统的响应叠加而成。机构的尺寸链见图 3 所示, 考虑曲轴-轴承系统耦合效应的含润滑间隙柔性多连杆机构的尺寸链可表示为

$$L_{SB}(t) = L_{BC}(t) + L_{SC}(t) \quad (58)$$

式中, $L_{SB}(t)$ 、 $L_{BC}(t)$ 和 $L_{SC}(t)$ 分别为滑块与轴承座中心, 轴承座中心与曲轴中心, 滑块与曲轴中心之间的尺寸。

如图 12 所示, 冲裁工况下作用于滑块的载荷可近似为三角波脉冲, 数学表达式可描述为^[25]

$$F(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < T_0 \\ F_{\max} t / 2\tau & T_0 \leq t < T_0 + 2\tau \\ F_{\max} (3\tau - t) / \tau & T_0 + 2\tau \leq t < T_0 + 3\tau \\ 0 & T_0 + 3\tau \leq t < T_0 + T \end{cases} \quad (59)$$

式中, T_0 为脉冲函数的周期, τ 为脉冲宽度相关的变量, $F_{\max}$ 为冲裁力的幅值。

图 12 冲裁工况下载荷

为测量多连杆机构中滑块的位置变化规律并验证所提出的多体动力学模型的正确性, 搭建了滑块的动态响应测试平台, 见图 13 所示。该平台由一个位置磁铁, L 形固定架, 波导管以及电子室等组成。由位置磁铁和波导管产生两个相互交叉的磁场, 位置磁铁由 L 形固定架固定在滑块上。当位置磁铁沿着波导管移动时, 波导管中产生了一个应变脉冲信号并由应变脉冲探测器监测。因为信号传递时间与位置磁铁和电子室两者之间的距离成正比,

移动磁铁环的位置将可通过测量传递时间来精确获取。最后,滑块的位置信号将实时存储并显示在电脑上。

图13 滑块动态响应测试系统

当间隙尺寸为 0.1 mm 和安装在曲轴上的轴承接触角为 40° , 曲轴的输入转速为 200 r/min , 冲裁力为 10 kN , 将表2和3中参数代入, 得到考虑曲轴-轴承系统耦合效应下含润滑间隙柔性多连杆机构滑块分别在空载和冲裁两种工况下的理论与实验动态响应特性及两者之间误差, 如图14和15所示。

由图可知, 在空载工况下, 滑块在下死点位置存在剧烈加速度波动, 而冲裁工况下, 滑块在下死点位置产生冲击峰。图14所示, 在空载工况下, 含干间隙平面柔性多连杆机构动力学模型滑块的下死点位置为 0.104 m , 含干间隙和曲轴系统平面柔性多连杆机构动力学模型的滑块下死点位置为 0.1041 m , 而含润滑间隙和曲轴系统的多连杆机构滑块下死点位

置为 0.1042 m , 实验获得的多连杆机构滑块下死点位置为 0.1045 m 。图15所示, 在冲裁工况下, 含干间隙平面柔性多连杆机构动力学模型滑块的下死点位置为 0.1032 m , 含干间隙和曲轴系统平面柔性多连杆机构动力学模型的滑块下死点位置为 0.1034 m , 而含润滑间隙和曲轴系统的多连杆机构滑块下死点位置为 0.1035 m , 实验获得的多连杆机构滑块下死点位置为 0.1035 m 。仿真结果表明, 曲轴-轴承系统的存在加剧了滑块的位移偏离, 严重影响多连杆高速压力机的动态精度。此外, 在空载工况下, 基于含干间隙柔性、含干间隙与曲轴系统柔性以及含润滑间隙与曲轴系统柔性多连杆机构三种模型的仿真位移和实验结果两者之间误差的均方根值分别为 0.4102 mm , 0.3998 mm 和 0.3577 mm ; 仿真速度与实验结果两者之间误差的均方根值为 3.1 mm/s , 2.6 mm/s 和 2.5 mm/s ; 加速度误差均方根值分别为 1.8227 m/s^2 , 1.6816 m/s^2 和 1.6464 m/s^2 。冲裁工况下, 基于含干间隙柔性、含干间隙与曲轴系统柔性以及含润滑间隙与曲轴系统柔性多连杆机构三种模型的仿真位移和实验结果两者之间误差在下死点位置处的峰值分别为 0.3883 mm , 0.2276 mm 和 0.05171 mm ; 仿真速度与实验结果两者之间误差在下死点位置处的峰值为 0.2719 m/s , 0.2695 m/s 和 0.2558 m/s ; 仿真加速度与实验结果两者之间误差在下死点位置处峰值分别为 423.2 m/s^2 , 380.7 m/s^2 和 361.4 m/s^2 。

图14 空载工况下滑块仿真与实验动态响应特性及两者之间误差

图 15 冲载工况下滑块仿真与实验动态响应特性及两者之间误差

基于含干间隙柔性、含干间隙与曲轴系统柔性以及含润滑间隙与曲轴系统柔性多连杆机构三种模型的仿真位移和实验结果两者之间误差的均方根值分别为 0.437 4 mm, 0.411 4 mm 和 0.319 6 mm; 仿真速度与实验结果两者之间误差的均方根值为 0.027 3 m/s, 0.027 3 m/s 和 0.027 1 m/s; 加速度误差均方根值分别为 29.997 m/s², 30.008 1 m/s² 和 42.535 7 m/s²。因此, 空载和冲载工况下基于含润滑间隙和曲轴系统的多连杆机构多体动力学模型的滑块位移、速度以及加速度响应比其它模型更接近实验结果, 验证了模型的正确性和有效性。运动副间隙处润滑油膜对多连杆机构的运动能够起到一定缓冲作用, 但并不能显著提高滑块的运动精度。

图 16 销轴的中心运动轨迹

销轴的中心运动轨迹如图 16 所示。由图可知, 空载工况下多连杆机构中间隙关节的销轴始终与衬套保持接触, 销轴的最大侵入深度为 0.356 mm, 销轴中心的运动特征为在转角 30° 到 90° 范围内只有一个永久接触状态。同样地, 冲载工况下间隙关节中的销轴也始终与衬套保持接触, 整个周期中销轴的最大侵入深度为 0.388 mm。因此, 在压力机多连杆机构运行过程中, 运动副间隙处所形成的润滑油膜不足以抵消运动副元素之间的碰撞, 造成润滑油膜在运行过程中破裂, 销轴与轴承衬套之间只存在一种永久接触状态。

4 动态误差影响因素分析

影响多连杆高速精密压力机动态精度的因素主要有运动副间隙尺寸大小、冲载力以及轴承的接触角等, 有必要分析其对压力机动态误差的影响规律。

4.1 间隙尺寸大小的影响

当曲轴输入转速为 200 r/min 和安装在曲轴上的轴承接触角为 40°, 在空载工况下, 考虑曲轴-轴承系统耦合效应下含润滑间隙平面柔性多连杆机构不同间隙尺寸下滑块的动态响应特性及其偏离理想刚性模型的误差如图 17 所示。

图 17 不同间隙尺寸下滑块动态响应偏离误差

图 17 所示, 间隙尺寸大小对平面多连杆机构的动态响应特性影响非常明显。当间隙尺寸从 0.05 mm 增加至 0.2 mm, 偏离理想刚性模型的位移轨迹误差均方根值分别为 0.066 9 mm, 0.095 5 mm, 0.122 mm 和 0.171 mm。速度偏离误差的均方根值分别为 1.581 mm/s, 1.771 mm/s, 1.963 mm/s 和 2.19 mm/s; 加速度偏离误差的均方根值分别为 1.861 m/s², 1.942 m/s², 2.052 m/s² 和 2.215 m/s²。结果表明, 随着间隙的不断增大, 滑块动

态响应的偏离误差均方根值也增大, 位移偏离误差比速度和加速度偏离误差对间隙尺寸改变更敏感。

4.2 冲裁力的影响

当曲轴输入转速为 200 r/min 和安装在曲轴上的轴承接触角为 40°, 间隙尺寸大小为 0.1 mm, 考虑曲轴-轴承系统耦合效应下含润滑间隙平面柔性多连杆机构在不同冲裁力下滑块的动态响应特性及其偏离理想刚性模型的误差如图 18 所示。

图 18 不同冲裁力下滑块动态响应偏离误差

由图 18 可知, 随着冲裁力的不断增大, 滑块的动态响应偏离误差也逐渐增加, 偏离误差曲线在下死点位置存在冲击峰。当冲裁力从 10 kN 增加至 25 kN, 位移偏离误差在下死点位置处的峰值分别为 0.092 17 mm, 0.141 9 mm, 0.142 7 mm 和 0.177 1 mm; 位移偏离误差的均方根值分别为 0.452 mm, 0.463 mm, 0.482 mm 和 0.489 mm。滑块速度偏离误差在下死点位置处的峰值分别为 30.04 mm/s, 32.92 mm/s, 33.91 mm/s 和 36.46 mm/s; 速度偏离误差的均方根值分别为 0.271 7 m/s, 0.340 8 m/s, 0.364 4 m/s 和 0.374 6 m/s。

滑块加速度的偏离误差在下死点位置处的峰值分别为 51.08 m/s², 54.32 m/s², 62.79 m/s² 和 66.21 m/s²; 加速度偏离误差的均方根值分别为 941.4 m/s², 1275 m/s², 1392 m/s² 和 1434 m/s²。

4.3 轴承接触角的影响

当曲轴输入转速为 200 r/min, 间隙尺寸大小为 0.1 mm, 空载工况下, 考虑曲轴-轴承系统耦合效应下含润滑间隙平面柔性多连杆机构在不同轴承接触角下滑块的动态响应特性及其偏离理想刚性模型的误差如图 19 所示。

图 19 不同接触角下滑块动态响应偏离误差

图 19 所示, 当角接触球轴承的接触角从 15° 增加至 60° , 滑块偏离理想刚性模型的位移轨迹误差均方根值分别为 0.393 mm, 0.257 mm, 0.431 mm 和 0.439 mm。速度偏离误差的均方根值分别为 1.657 mm/s, 1.71 mm/s, 1.69 mm/s 和 1.69 mm/s; 加速度偏离误差的均方根值分别为 1.8929 m/s^2 , 1.893 m/s^2 , 1.8914 m/s^2 和 1.8924 m/s^2 。结果表明, 随着接触角的不断增大, 滑块位移偏离误差均方根值先减小后增大, 然而速度和加速度偏离误差均方根值几乎为常数, 速度和加速度偏离误差对接触角变化不敏感。为了提高滑块的工作精度, 曲轴-轴承系统的角接触球轴承的接触角推荐选用 25° 。

5 结论

(1) 本文提出了一种含润滑间隙和曲轴转子-轴承结构的平面柔性多连杆传动机构多体动力学建模与仿真的方法, 同时考虑了润滑间隙、曲轴与连杆的柔性以及轴承刚度的影响。结果表明, 基于所提出的多连杆机构动力学模型的滑块动态响应比其它传统模型更接近实验结果, 验证了该方法的正确性。曲轴转子-轴承结构的存在加剧了滑块的位置轨迹偏离误差, 严重影响多连杆高速压力机的动态精度。

(2) 运动副间隙处润滑油膜对多连杆机构的运动能够起到一定缓冲作用, 但并不能显著提高滑块的运动精度。运动副间隙处所形成的润滑油膜不足以抵消运动副元素之间的碰撞, 造成润滑油膜在运行过程中破裂, 销轴与轴承衬套之间只存在一种永久接触状态。

(3) 随着间隙尺寸和冲裁力的不断增大, 滑块的动态响应偏离误差均方根值也增大, 位移偏离误差比速度和加速度偏离误差对间隙尺寸改变更敏感; 冲裁工况下, 滑块动态响应偏离误差曲线在下死点位置处存在冲击峰, 冲击峰值也随着冲裁力的增加而增加。

(4) 随着接触角的不断增大, 滑块位移偏离误差均方根值先减小后增大, 然而速度和加速度偏离误差均方根值几乎为常数, 速度和加速度偏离误差对接触角变化不敏感。为了提高滑块的工作精度, 曲轴-轴承系统结构上的角接触球轴承的接触角推荐选用 25° 。本文的研究结果对多连杆高速精密压力机的设计与优化均具有极强的指导意义和参考价值。

参 考 文 献

- [1] 王磊. 高速压力机的动态精度分析与误差补偿[D]. 南京: 东南大学, 2012.
- [2] WANG Lei. Dynamic accuracy analysis and error compensation of high speed precision press[D]. Nanjing: Southeast University, 2012.
- [3] BENATI M, MORRO A. Formulation of equations of motion for a chain of flexible links using Hamilton's principle[J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 1994, 116(1): 81-88.
- [4] DUBOWSKY S. On predicting the dynamic effects of clearance in one-dimensional closed loop systems[J]. Journal of Engineering for Industry, 1974, 96(1): 324-329.
- [5] SOONG K, THOMPSON S. A theoretical and experimental investigation of the dynamic response of a slider-crank mechanism with radial clearance in the gudgeon-pin joint[J]. Journal of Mechanism Design, 1990, 112(2): 183-189.
- [6] 赵子坤. 含间隙机构动力学仿真与实验研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2009.
- [7] ZHAO Zikun. Dynamic analysis and experiment research of mechanism with clearance[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2009.
- [8] 张慧博, 陈子坤, 魏承等. 考虑多间隙的航天机构传动关节振动特性分析[J]. 机械工程学报, 2017, 53(11): 44-53.
- [9] ZHANG Huibo, CHEN Zikun, WEI Cheng, et al. Vibration characteristics analysis of joint with multiple clearances in space mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(11): 44-53.
- [10] 肖航, 杨巧龙, 任守志等. 大型套接式展收机构接头设计分析及刚度试验研究[J]. 机械工程学报, 2018, 54(7): 1-10.
- [11] XIAO Hang, YANG Qiaolong, REN Shouzhi, et al. Design analysis and stiffness test of a large telescopic deployable mechanism joint[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(7): 1-10.
- [12] 赵强强, 郭俊康, 洪军. 基于连杆机构旋转法则的平面单环闭链结构装配误差不确定性分析[J]. 机械工程学报, 2018, 54(11): 29-38.
- [13] ZHAO Qiangqiang, GUO Junkang, HONG Jun. Uncertainty analysis of assembly error of planar single-loop mechanisms based on the rotatability laws of linkages[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(11): 29-38.
- [14] 丁建中, 王春洁. 含铰链间隙板式卫星天线展开精度分析[J]. 北京航空航天大学学报, 2016, 42(12): 2625-2631.
- [15] DING Jianzhong, WANG Chunjie. Deployment accuracy analysis of planar satellite antenna with joint clearances[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2016, 42(12): 2625-2631.

- [10] ALSHAER B J, SHIVASWAMY S, NAGARAJAN H, et al. Dynamics of a multibody mechanical system with lubricated long journal bearings[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2005, 127(3): 493-499.
- [11] FLORES P, AMBRÓSIO J, CLARO J C P, et al. A study on dynamics of mechanical systems including joints with clearance and lubrication[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2006, 41(3): 247-261.
- [12] FLORES P, AMBRÓSIO J, CLARO J C P, et al. Dynamics of multibody systems with spherical clearance joints[J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2006, 240(1): 240-247.
- [13] FLORES P, AMBRÓSIO J, CLARO J C P, et al. Lubricated revolute joints in rigid multibody systems[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2009, 56(3): 277-295.
- [14] FLORES P, LANKARANI H M. Spatial rigid-multibody systems with lubricated spherical clearance joints: modeling and simulation[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2010, 60(1-2): 99-114.
- [15] TIAN Q, ZHANG Y Q, CHEN L P, et al. Simulation of planar flexible multibody systems with clearance and lubricated revolute joints[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2010, 60(4): 489-511.
- [16] TIAN Q, ZHANG Y Q, CHEN L P, et al. Dynamics of spatial flexible multibody systems with clearance and lubricated spherical joints[J]. *Computers & Structures*, 2009, 87(13-14): 913-929.
- [17] TIAN Q, SUN Y L, LIU C, et al. ElastoHydroDynamic lubricated cylindrical joints for rigid-flexible multibody dynamics[J]. *Computers & Structures*, 2013, 114-115: 106-120.
- [18] TIAN Q, XIAO Q F, SUN Y L, et al. Coupling dynamics of a geared multibody system supported by ElastoHydro Dynamic lubricated cylindrical joints[J]. *Multibody System Dynamics*, 2015, 33(3): 259-284.
- [19] BAUCHAU O A, RODRIGUEZ J. Modeling of joints with clearance in flexible multibody systems[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, 39(1): 41-63.
- [20] KHEMILI I, ROMDHANE L. Dynamic analysis of a flexible slider-crank mechanism with clearance[J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2008, 27(5): 882-898.
- [21] DUPAC M, BEALE D G. Dynamic analysis of a flexible linkage mechanism with cracks and clearance[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2010, 45(12): 1909-1923.
- [22] LANKARANI H M, NIKRAVESH A. A contact force model with hysteresis damping for impact analysis of multibody systems[J]. *Journal of Mechanical Design*, 1990, 112(3): 369-376.
- [23] MACHADO M, COSTA J, SEABRA E, et al. The effect of the lubricated revolute joint parameters and hydrodynamic force models on the dynamic response of planar multibody systems[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 69(1-2): 635-654.
- [24] CAO Y, ALTINTAS Y. A general method for the modeling of spindle-bearing systems[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2004, 126(6): 1089-1104.
- [25] CHEHAB A G, NAGGAR M H EI. Response of block foundations to impact loads[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 276(1-2): 293-310.

作者简介: 郑恩来, 男, 1986 年出生, 博士, 副教授, 硕士研究生导师。主要研究方向为多体系统动力学与振动控制。

E-mail: enlaizheng@njau.edu.cn

康敏(通信作者), 男, 1965 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为复杂机电系统动力学与智能控制。

E-mail: kangmin@njau.edu.cn