DOI: 10.3901/JME.2020.03.001

机构拓扑学理论的基本思想与数学方法—— 从方法论角度回顾几种原创性理论与方法*

杨廷力¹ 沈惠平¹ 刘安心² 杭鲁滨³

(1. 常州大学现代机构学研究中心 常州 213164;

2. 南京航空航天大学金城学院 南京 211156;

3. 上海工程技术大学机械工程学院 上海 201620)

摘要: 机构拓扑学的核心内容包括: 基于非逻辑思维提出的基本概念(拓扑结构、运动特征等), 由基本概念导出的机构拓扑学基本公式, 以及由逻辑推理提出的拓扑综合方法。基本概念及其数学表示, 是引入/建立机构拓扑学可运算数学方法的依据(对螺旋理论与线性变换两种方法, 是引入了线性运算方法; 对位移子群方法, 是建立了非线性符号运算方法; 对方位特征集方法, 是建立了线性符号运算方法); 机构拓扑学的基本概念、基本公式和拓扑综合方法的主要特点具有对应性(由于螺旋理论与线性变换的线性运算与运动位置有关, 又与定坐标系有关, 结构综合得到瞬时机构, 需进行非瞬时性判定; 由于位移子群的非线性符号运算与运动位置无关, 可得到非瞬时机构, 但与定坐标系有关, 且未能涵盖子流形机构; 由于方位特征集的线性符号运算与运动位置无关, 可得到非瞬时机构, 又由于与定坐标系无关, 得到机构存在的几何条件具有一般性)。总之, 基于螺旋理论、线性变换与位移子群的三种方法都与定坐标系有关, 属于代数学方法, 而基于方位特征集的方法与定坐标系无关, 属于内蕴几何学方法。因此, 由非逻辑思维提出的基本概念及其数学表示是建立原创性机构拓扑学系统理论与方法的基石。

关键词: 机构拓扑学; 拓扑结构; 运动特征; 基本方程; 拓扑综合; 机构组成原理

中图分类号: TG156

Basic Ideas and Mathematical Methods of Mechanism Topology Theory ——Review of Several Original Mechanism Topology Theories in a Methodological Perspective

YANG Tingli¹ SHEN Huipng¹ LIU Anxin² HANG Lubin³

(1. Research Center for Advanced Mechanism Theory, Changzhou University, Changzhou 213164;

2. Jincheng College, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211156;

3. School of Mechanical Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620)

Abstract: The essential contents of mechanism topology theory include some basic concepts proposed based on non-logical thinking, basic topological equations established based on these basic concepts and corresponding topological synthesis method proposed based on logical reasoning. Basic concepts and their mathematical representations are the bases for establishment of a computable mathematical method for mechanism topology (e.g. linear operations are introduced for screw theory based method and linear transformation method, non-linear symbolic operations are introduced for displacement subgroup method, linear symbolic operations are introduced for position and orientation set method) and the key factors to differentiate the performance of different topological synthesis methods (e.g. instantaneous mechanisms may be obtained but it is necessary to judge whether the obtained mechanism is an instantaneous one for screw theory based method and the linear transformation method since their linear operations are dependent on the mechanism's motion position, while sub-manifold mechanisms are not covered for displacement subgroup method even though non-instantaneous mechanisms are obtained since its non-linear symbolic operations are independent of the mechanism's motion position, non-instantaneous mechanisms are obtained for position and orientation set method since its linear symbolic operations are independent of the mechanism's motion position). The screw theory based method, the linear transformation method and the

* 国家自然科学基金资助项目(51475050, 51375062, 51365036, 51975062)。
20190102 收到初稿, 20191008 收到修改稿

displacement subgroup method are algebraic methods since their operations are dependent on the fixed coordinate system. While the position and orientation set method is an intrinsic geometric method since its operations are independent on the fixed coordinate system. In a word, the research shows that the basic concepts proposed based on non-logical thinking and their mathematical representations are the cornerstones for establishment of original mechanism topology theories and methods.

Key words: mechanism topology; topological structure; kinematic characteristics; basic equations; topological synthesis; mechanism composition theory

0 前言

1875 年, 德国学者 REULEAUX 首次提出了运动链、运动副与构件, 以及构型综合等概念及其符号表示方法, 使机构学开始从“力学的衍生体”独立出来, 并在第一次工业革命的推动下, 发展成为一门独立学科。

近几十年, 现代机械与机器人技术发展的推动, 使传统机构学进一步发展成为与现代计算技术密切结合的包括机构拓扑学、运动学与动力学的一门独立的现代学科。

在现代机构学中, 机构拓扑学是机构学成为一门独立学科的基础, 这源于以下原因。

(1) 机构拓扑学为机构拓扑结构设计(发明新机构)提供系统理论与有效方法, 是机构概念设计的核心内容, 也是构建机构学的基石。

(2) 基于机构拓扑学揭示的机构组成原理与拓扑特征, 可为构建机构拓扑学、运动学与动力学的统一建模的系统理论与实用方法提供理论基础。

一般地, 建立原创性的系统理论与方法, 包括: 对研究对象的系统分析, 提出物理模型; 基于非逻辑思维提出基本概念及其数学表示, 并引入/建立数学方法; 再由逻辑思维导出基本公式及其运算规则, 以及提出解决问题的一般方法。

机构拓扑学是在拓扑结构层面, 揭示机构的内在规律, 并建立相关的系统理论与方法, 且要求以下几点。

(1) 仅基于机构的拓扑结构, 即可确定机构连续运动的拓扑特征, 这些特征也是与运动(动力)学性能密切相关的非线性特征。如机构连续运动的自由度(DOF)、独立位移方程数、方位特征及其维数等。

(2) 机构拓扑学应具有可运算性。

最近 20 年, 机构拓扑学取得了突破性进展, 提出了多种理论与方法。其中, 基于螺旋理论的方法^[1-6], 基于位移子群/子流形的方法^[7-15], 基于线性变换的方法^[16-21]和基于方位特征集的方法^[22-37]等具有原创性与系统性。机构学界关注这些研究进展, 也提出了值得进一步思考的问题, 如, 基于螺旋理论的与基于线性变换的两种方法的非瞬时性判定^[15, 28, 38-39]、位移子群

/子流形方法的复杂性与必要性^[14, 28, 38]、方位特征集方法的正确性与严密性等^[3, 31, 37]。

本文试从方法论角度, 回顾与探索这些理论与方法的提出与形成过程的规律性。

(1) 构成机构拓扑学系统理论的是基于非逻辑思维提出的基本概念(拓扑结构、运动特征与自由度等), 由基本概念导出的机构拓扑学基本公式, 以及由逻辑推理提出的机构拓扑综合方法。

(2) 基于非逻辑思维提出的基本概念及其数学表示, 是引入/建立数学方法的依据。

(3) 基于非逻辑思维提出的基本概念及其数学表示, 也是建立机构拓扑学基本公式与提出拓扑综合方法的基石。

本文内容安排: 第 1 节提出机构拓扑学的物理模型, 第 2 节提出机构的拓扑结构及其数学表示, 第 3 节提出机构的运动特征及其数学表示, 以及引入/建立的数学方法, 第 4 节提出机构拓扑学的基本公式及其运算规则, 第 5 节提出机构拓扑结构综合方法, 第 6 节为结论。

1 机构拓扑学的物理模型

对研究对象进行系统的定性分析, 由非逻辑思维提出所研究的基本问题, 即建立物理模型。

机构拓扑学物理模型是研究机构的拓扑结构、运动特征与运动确定性(DOF、驱动副选定准则等)三者之间的映射关系, 如图 1a 所示^[22-25, 30, 34]。尤如, 运动学物理模型是尺度参数、运动输入与运动输出三者之间的映射关系(图 1b), 以及动力学物理模型是惯性参数、输入扭矩与工作阻力以及真实运动状态三者之间的映射关系(图 1c)。

图 1 机构学的物理模型

由机构拓扑学物理模型, 提出三个基本概念。

(1) 机构的拓扑结构及其数学表示。该概念涉及基于拓扑三要素(运动副类型、构件之间的联接关

系、运动副轴线的几何约束类型)描述的拓扑结构及其数学表示, 及其运动过程不变性; 既与运动位置无关, 又与定坐标系无关, 从而使机构拓扑学具有可运算性^[22-25, 30, 34]。

(2) 机构的运动特征及其数学表示。机构的运动特征是指机构运动输出构件(如串联机构末端构件、并联机构动平台等)瞬时运动的速度特征与连续运动的方位特征及其数学表示, 以及引入/建立的数学方法, 并仅由拓扑结构借助数学方法, 确定机构的方位特征^[22-25, 30, 34]。

(3) 机构的自由度。自由度(DOF)是机构具有运动确定性的驱动输入数目, 也是运动学与动力学的重要参数之一^[22-25, 30]。它是百年前的机构学家基于非逻辑思维提出的重要的基本概念之一。

为此, 分别讨论这些基本概念的数学定义及其数学表示, 及其引入/建立相应的数学方法。

2 机构的拓扑结构及其数学表示

基于螺旋理论的、线性变换的和位移子群的三种方法给出了机构拓扑结构的符号表示, 它们与定坐标系和运动位置有关, 并用于拓扑结构综合。

基于方位特征集的方法(简称 POC 方法)给出了基于拓扑三要素描述的机构拓扑结构的定义及其符号表示, 且具有运动过程不变性(不含奇异位置), 即与运动位置和定坐标系无关, 可使机构拓扑结构具有可计算性, 从而为揭示机构的拓扑结构、运动特征与 DOF 三者之间的映射关系提供了依据。

2.1 拓扑结构三要素

用于描述机构拓扑结构的三要素分别如下。

(1) 运动副类型。P 副、R 副与 H 副为三种基本类型, 而多自由度运动副(如 C 副、S 副和 E 副等)都可用这三种基本类型和“构件对运动副轴线的几何约束类型”表示^[22-25, 27, 30-31, 34]。

(2) 机构拓扑单元之间的联接关系。基于杆、副为单元的组成原理, 用邻接矩阵表示其联接关系; 基于回路为单元的组成原理, 用回路矩阵(或树系统)表示其联接关系; 基于单开链(SOC)为单元的组成原理, 只用串联与并联表示其联接关系, 如图 2 所示, 其中, 点表示构件, 边表示运动副^[22-25, 27, 30, 33-34]。

图 2 基于 SOC 单元的机构组成原理

(3) 轴线的几何约束类型。构件对运动副轴线的几何约束类型: 即, 平行、同轴、相交于一点、垂直、共面与交叉等 6 种基本类型^[2-25, 27, 30, 34], 如图 3 所示。表 1 给出了与这 6 种基本类型对应的部分子单开链(Sub-SOCs), 而它们恰是机构降秩(即降低机构的独立位移方程数 ξ) 的几何背景。

图 3 运动副轴线的几何约束类型

表 1 轴线几何约束类型的 Sub-SOCs^[27, 30, 34]

轴线几何约束类型	Sub-SOCs
轴线平行	$R \parallel R; R \parallel H; H \parallel H$ 等
轴线共轴	$R R; R P; H R; H H$ 等
轴线交于一点	$\overline{RRR}; \overline{RR}; \overline{R \perp R}$ 等
轴线垂直	$R \perp R; R \perp P; H \perp P$ 等
平行于同一平面	$\diamond(P, P, P)$ 等
轴线空间交叉	$R-R; R-P; R-H; H-H$ 等

2.2 机构拓扑结构的符号表示及其不变性

(1) 拓扑结构的符号表示。基于拓扑三要素, 仅用 3 种基本运动副(P 副、R 副与 H 副)和 6 种“轴线几何约束类型”, 以及 SOC 单元的串联与并联联接关系, 可描述任意空间机构的拓扑结构, 并用相应的符号表示^[22-25]。

例如, 图 4a 所示串联机构的符号表示为

$$\text{SOC}\{-R_1(\perp P_2) \parallel R_3 - \overline{R_4 R_5} -\}$$

式中, $R_1(\perp P_2) \parallel R_3$ 表示 $R_1 \perp P_2$, 且 $R_1 \parallel R_3$ 。

图 4 机构的拓扑结构及其符号表示

又如, 图 4b 所示并联机构的符号表示如下: 四

条支路的拓扑结构

$$4 - \text{SOC}\{-R_{i1}(\perp P_{i2}) \parallel R_{i3} - \overbrace{R_{i4}R_{i5}} -\} \quad i=1\sim 4$$

动平台 $R_{i4}, R_{i5} (i=1\sim 4)$ 轴线相交于一点 O' ; 而定平台 $R_{11} \parallel R_{21}, R_{31} \parallel R_{41}$, R_{11} 与 R_{31} 为空间任意交叉。

(2) 拓扑结构的运动过程不变性。一般的, 机构拓扑结构具有运动过程不变性(不包括奇异位置), 如图5所示, 既与运动位置无关, 也与定坐标系无关(即不需要建立定坐标系)^[24-25, 30, 34]。

因此, 机构拓扑结构的符号表示可视为一种几何表示方法。

图5 拓扑结构的运动过程不变性

2.3 主要特点

(1) 基于拓扑三要素描述的拓扑结构及其符号表示, 具有运动过程不变性(不含奇异位置), 既与运动位置无关, 又与定坐标系无关。

(2) 对应于“轴线的几何约束类型”的 Sub-SOCs(表1)是机构降秩的几何背景。

(3) 本文所述机构拓扑学研究对象是基于拓扑三要素表示的所有机构, 但不包括 Bennett 机构等一类特殊过约束机构。

3 机构的运动特征及其数学表示

机构的运动特征包括速度特征与方位特征。速度特征是指与构件固结的动坐标系原点移动速度的存在性及其方向, 以及动坐标系角速度的存在性及其方向, 用于描述瞬时运动的线性特征; 而方位特征是指与构件固结的动坐标系原点的有限移动的存在性及其方向特征, 以及动坐标系有限转动的存在性及其方向特征, 用于描述连续运动的非线性特征。

确定方位特征的基本思想: 首先, 选定速度特征, 再证明存在与速度特征对应的有限位移的方位特征, 并给出方位特征定义及其数学表示。

3.1 基于螺旋理论的运动特征

(1) 速度分析。一般地, 固联在构件上的动坐标系 $o'x'y'z'$ 相对于定坐标系 $oxyz$ 的速度为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中 $\boldsymbol{\omega}$ ——角速度;

$\mathbf{v}$ ——动坐标系原点 o' 相对于定坐标系的移动速度, 与基点 o' 的位置有关。

(2) 速度特征。基于螺旋理论的方法, 直接取速度(式(1))表示其速度特征, 并以运动螺旋 ($\mathcal{S} = (\mathbf{s}, \mathbf{s} \times \mathbf{r})$) 的6个 Plucker 坐标分量表示

$$\mathcal{S} = [L, M, N, P, Q, R] \quad (2)$$

(3) 方位特征。直接取速度表示其速度特征(螺旋系), 引入线性运算方法, 可得到机构的速度特征, 即串联机构末端构件或并联机构动平台的速度特征, 但需要进行非瞬时性判定, 以确保存在与速度特征对应的连续运动的方位特征, 并给出了基于任意微小位移的约束螺旋系不变性的非瞬时性判定方法^[2, 4]。

(4) 主要特点如下: ① 直接取速度(式(1))表示其速度特征(式(2)), 引入线性运算, 与运动位置和定坐标系有关; ② 由于与位置有关, 需要进行非瞬时性判定; ③ 由于与定坐标系有关, 机构的运动副轴线大多按照便于计算的方位配置。

3.2 基于线性变换的运动特征

(1) 速度特征。该方法取直接速度空间(式(1))表示其速度特征, 记为

$$[\mathbf{v} \ \boldsymbol{\omega}]^T = [J][\dot{\mathbf{q}}] \quad (3)$$

(2) 方位特征。直接取速度空间表示其速度特征, 引入线性运算方法, 可得到机构的速度特征, 但需要进行非瞬时性判定, 以确保存在与速度特征对应的连续运动的方位特征, 并给出了非瞬时性的直观判定方法^[17-18]。

(3) 主要特点如下: ① 直接取速度(式(1))表示速度特征(式(3)), 引入线性运算, 与运动位置和定坐标系有关; ② 由于与位置有关, 需要非瞬时性判定; ③ 由于与定坐标系有关, 机构的运动副轴线大多按照便于计算的方位配置。

图6 R副的速度分析

3.3 基于位移子群/子流形的运动特征

3.3.1 基于位移子群的运动特征

(1) R副的运动特征。用 Lie 代数表示的 R 副(图6a)的运动速度为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\boldsymbol{\omega}| \cdot \rho (\mathbf{e}_R \times \mathbf{e}_\rho) \\ |\boldsymbol{\omega}| \mathbf{e}_R \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中 $\boldsymbol{\omega}$ ——R 副的角速度;

e_R ——单位矢量;

v ——R 副轴线外一点 o' (即基点)的移动速度, $(e_R \times e_\rho)$ 为其单位矢量。

直接取 R 副的速度(式(4))表示其速度特征。

由于 R 副的速度(式(4))是其转角的三角函数, 由其指数映射可知: 轴线外一点 o' 速度的积分是在垂直于轴线的平面内的圆周; 角速度的积分是在垂直于轴线的平面内的转角。因此, 确保存在与速度特征对应的连续运动的方位特征, 并用位移子群 $\{R(N, u)\}$ 表示之^[7, 10]。

(2) 凡用 R 副速度的指数映射能得到其有限位移的机构, 称为位移子群机构。位移子群机构的 12 种方位特征, 分别用 12 个位移子群表示之^[7, 10], 它们对应的方位特征(未计子群 $\{E\}$)分别如下。

1) 仅存在移动的 3 种位移子群: $\{T(u)\}, \{T(P)\}, \{T\}$, 与指数映射无关。

2) 只存在一个方向转动的 6 种位移子群: $\{R(N, u)\}, \{H(N, u, p)\}, \{C(N, m, u)\}, \{G(P)\}, \{Y(w, p)\}, \{X(w)\}$, 由指数映射确保存在与速度特征对应的方位特征。

3) 只存在轴线相交于同一点的一个 3 维转动的位移子群 $\{S(N)\}$ 。

4) 一个 6 维运动的位移子群 $\{D\}$ 。

由文献[10]之表 1 可知, 位移子群表示的方位特征, 与定坐标系有关, 与运动位置无关。

(3) 建立了位移子群“并”与“交”的非线性符号运算规则(表格形式的“并”与“交”, 各有 107 个运算规则)^[7, 9, 14]。为避免位移子群的运算结果不属于位移子群, 就用“位移子群”的封闭性, 强制排除这类运算结果; 除此之外, “位移子群”并未显示出其他独特的作用。

(4) 由位移子群“并”与“交”的非线性符号运算, 可得到串联机构末端构件或并联机构动平台的位移子群, 但这是一个较复杂的非线性符号运算过程。

(5) 不能用指数映射确保存在与速度特征对应的方位特征的机构, 称为子流形机构; 也就是位移子群机构未能涵盖具有两个转动的、一个转动和一个移动的、转动维数多于移动维数的, 以及五维的子流形机构等。

3.3.2 基于位移子流形的运动特征

(1) 文献[15]提出用微分流形对位移子群方法进行扩展, 其扩展之一的思想如下, 直接取约束刚体的速度(式(1))表示其速度特征, 再利用速度特征的某些性质(如连续性等), 证明与速度特征对应的方位特征(子流形)的存在性, 但未给出该证明

方法的一般过程, 也未能举例说明其详细步骤。

(2) 文献[15]对位移子群方法的扩展之二, 提出了与位移子群相关联的三类子流形如下。

1) 基于位移子群和一个二维转动($U(0, x, y)$), 提出了 10 种子流形。

2) 基于位移子群之间的“交”, 提出了 25 种子流形。

3) 去掉位移子群的部分结构, 提出了低维的 12 种“商子流形”。

但是, 未给出这三类子流形的存在性证明, 更未能给出生成子流形的一般方法及其得到的子流形的所有类型。

顺便说明, 由于机构降秩的几何背景是“轴线的几何约束类型”(第 2.1 节)及其 Sub-SOCs 类型(表 1), 而上述与位移子群关联的三类子流形, 只是考虑了表 1 所示降秩几何背景的少数 Sub-SOCs 类型。

例如, 对文献[15]的表 II, 为补进二维转动, 就增加一个 U 副, 即表 1 中的 $\{SOC\{-\overline{R} \perp R-\}\}$, 但表 1 中的 $\{SOC\{-\overline{RR}-\}\}$ 与表 1 中的 $\{SOC\{-R-R-\}\}$ 更具有一般性。

又如, 对文献[15]的表 III 与表 VI, 都是用位移子群运算得到的, 仅相当于引入表 1 中的 $SOC\{-R \parallel R-\}$, 表 1 中的 $SOC\{-R \perp P-\}$ 等。

(3) 文献[15]提出了子流形的“并”与“交”运算公式, 但尚未给出子流形的非线性符号运算规则。

因此, 子流形方法还有待完善与发展。

3.4 基于 POC 集的运动特征

3.4.1 运动副的运动特征

(1) 运动副的速度特征。取运动副速度的单位矢量集表示其速度特征^[23-27, 30-31, 34]。

例如, 取 R 副速度(式(4))的单位矢量集(图 6b)表示其速度特征

$$E_R = \begin{bmatrix} (e_R \times e_\rho) \\ e_R \end{bmatrix}$$

(2) 运动副的方位特征。由速度特征(单位矢量集)导出方位特征^[23-27]。

例如, 由于 R 副的速度特征(单位矢量集)与运动位置无关, 其速度特征可表示其连续运动的方位特征, 并记为 R 副的 POC 集

$$M_R = \begin{bmatrix} t^1(\perp(R, \rho)) \\ r^1(\parallel R) \end{bmatrix}$$

POC 集是与拓扑结构相关联的形式, 其元素的方位是相对于运动副轴线的。

特别说明, 笔者曾将单位矢量集改记为速度特征集, 再导出 POC 集^[24, 31, 34], 本文略去这一过程。

类似的,可定义 P 副与 H 副的 POC 集,如表 2 所示^[22-25, 27, 30, 34],但尚未标出非独立元素。

表 2 运动副的 POC 集

P 副	R 副	H 副
$\begin{bmatrix} t^1(\parallel P) \\ r^0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} t^1(\perp(R, \rho)) \\ r^1(\parallel R) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} t^1(\parallel H) & t^1(\perp(H, \rho)) \\ r^1(\parallel H) \end{bmatrix}$

3.4.2 机构的运动特征

(1) 机构的速度特征。

1) 串联机构的速度特征。串联机构(图 7)末端构件的速度为

$$\begin{cases} \omega = \sum_{i=1}^n \omega_{i,i-1} | e_{R_i} \\ v_{o'} = \sum_{i=1}^n v_{i,i-1} | e_{P_i} + \sum_{i=1}^n \omega_{i,i-1} | \rho_{d_i-o'} | (e_{R_i} \times e_{\rho_i}) \end{cases} \quad (5)$$

式中 ω ——末端构件的角速度;

$\omega_{i,i-1}$ ——第 i 个运动副两构件的相对角速度;

e_{R_i} ——第 i 个运动副轴线方向的单位矢量;

n ——构件数;

$v_{o'}$ ——末端构件上基点 o' 的移动速度;

$v_{i,i-1}$ ——第 i 个 P 副两构件的相对移动速度;

e_{P_i} ——第 i 个 P 副轴线方向的单位矢量;

$\rho_{d_i-o'}$ ——第 i 个运动副轴线上一点 d_i 到基点 o' 的径矢;

e_{ρ_i} ——第 i 个径矢方向的单位矢量。

取末端构件速度(式(5))的单位矢量集为其速度特征,并记为

$$V_S^e = \begin{bmatrix} e_1^t & e_2^t & e_3^t \\ e_1^r & e_2^r & e_3^r \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中 V_S^e ——末端构件速度的单位矢量集;

e_k^r ——固联在末端构件上的动坐标系的第 k 个角速度分量的单位矢量, $k=1, 2, 3$;

e_k^t ——末端构件基点 o' 的第 k 个移动速度分量的单位矢量, $k=1, 2, 3$ 。

由式(5)可知,末端构件速度的单位矢量集(式(6))是所有运动副速度的单位矢量集的“并”,由线性相关性确定,且只与拓扑结构有关(不含奇异位置),并记为

$$V_S^e = \bigcup_{i=1}^m V_{J_i}^e \quad (7)$$

式中 V_S^e ——末端构件速度的单位矢量集;

$V_{J_i}^e$ ——第 i 个运动副速度的单位矢量集;

m ——运动副数。

由于拓扑结构具有运动过程不变性(不含奇异位置),与位置和定坐标系无关(第 2.2 节),故末端

构件速度的单位矢量集只与拓扑结构有关,与运动位置无关。因此,可确保存在与速度特征(单位矢量集)对应的连续运动的方位特征,称为 POC 集。

图 7 串联机构的速度分析

2) 并联机构的速度特征。类似的,并联机构动平台速度的单位矢量集是所有支路末端构件速度的单位矢量集的“交”,由线性相关性确定,且只与拓扑结构有关,与运动位置无关(第 2.2 节),并记为

$$V_{Pa}^e = \bigcap_{j=1}^{(v+1)} V_{b_j}^e \quad (8)$$

式中 V_{Pa}^e ——动平台速度的单位矢量集;

$V_{b_j}^e$ ——第 j 条支路末端构件速度的单位矢量集;

v ——支路数。

因此,可确保存在与动平台速度的单位矢量集对应的连续运动的方位特征(POC 集)^[23-27, 30-31, 34]。

(2) 机构的方位特征。

由式(7)、(8)已知,速度的单位矢量集具有运动过程不变性,从而确保存在与单位矢量集对应的方位特征集(POC 集)。

定义 POC 集为

$$M = \begin{bmatrix} t_1^1(\text{dir}) & t_2^1(\text{dir}) & t_3^1(\text{dir}) \\ r_1^1(\text{dir}) & r_2^1(\text{dir}) & r_3^1(\text{dir}) \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中 M ——POC 集;

$r_k^1(\text{dir})$ ($k=1, 2, 3$)——第 k 个角速度分量的单位矢量对应的有限转动;

$t_k^1(\text{dir})$ ($k=1, 2, 3$)——第 k 个移动速度分量的单位矢量对应的有限移动;

dir——相对于运动副轴线的方位。

例如,对图 8 平面串联机构($\text{SOC}\{-R_1 \parallel R_2-\}$),由式(7)可知末端构件速度的单位矢量集为

$$V_S^e = \begin{bmatrix} (e_{R_1} \times e_{\rho_1}) & (e_{R_2} \times e_{\rho_2}) & 0 \\ 0 & 0 & e_{R_2}^r \end{bmatrix} \quad \text{则由式(9),}$$

该单位矢量集对应的 POC 集为

$$M_S = \begin{bmatrix} t_1^1(\perp(R_1, \rho_1)) & t_2^1(\perp(R_2, \rho_2)) & t_3^0 \\ r_1^0 & r_2^0 & r_3^1(\parallel R_2) \end{bmatrix}$$

图8 平面串联机构(SOC{-R₁ || R₂-})

(3) POC 集的线性符号运算。

由 POC 集的定义与串联机构 POC 方程,建立了 POC 集“并”的 12 个线性符号运算规则及 2 个非线性判据;由 POC 集的定义与并联机构 POC 方程,建立了 POC 集“交”的 12 个线性符号运算规则及 2 个非线性判据。经线性符号运算,可得到串联机构末端构件与并联机构动平台的 POC 集^[23-27, 30-31, 34]。

3.4.3 POC 集的维数

POC 集的独立元素数称为维数 $\dim\{M\}$, 且有

$$\dim\{M\} \leq \text{DOF} \quad (10)$$

并约定 POC 集的非独立元素置于大括号内。

3.4.4 POC 集的基本类型

POC 集有 15 种基本类型,如表 3 所示(t^0 表示构件不存在移动, r^0 表示构件不存在转动),但尚未标出非独立元素。

顺便说明,表 3 也给出了 POC 集与位移子群之间的对应关系,但 POC 集的几何条件更具有一般性。

3.4.5 主要特点

(1) 取速度的单位矢量集表示速度特征,且与运动位置无关,可确保存在与速度特征对应的方位特征(POC 集)。

(2) 建立了 POC 集的“并”与“交”的线性符号运算规则,且与运动位置和定坐标系无关。

(3) 基于 POC 集的线性符号运算,可得到串联机构末端构件或并联机构动平台的 POC 集,这是一个较简单的线性符号运算过程。

由第 3.1~3.4 节可知,基于非逻辑思维提出的基本概念(拓扑结构、运动特征等)的不同定义及其数学表示,是形成不同理论与方法的起始点,也是引入/建立数学方法的依据,如表 4 所示。

对基于螺旋理论与基于线性变换的方法,是引入线性运算方法;对基于位移子群与基于 POC 集的方法,是分别建立相应的数学方法,因为其元素(12 个位移子群,POC 集)及其运算规则都是自行定义与

建立的。

表3 POC 集的基本类型^[25]

DOF	POC 集			
1	$\begin{bmatrix} t^1(\text{dir}) \\ r^0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} t^0 \\ r^1(\text{dir}) \end{bmatrix}$		
	$\{T(u)\}$	$\{R(N, u)\}$		
2	$\begin{bmatrix} t^2(\text{dir}) \\ r^0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} t^1(\text{dir}) \\ r^1(\text{dir}) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} t^0 \\ r^2(\text{dir}) \end{bmatrix}$	
	$\{T(P)\}$	$\{C(N, m, p)\}$	子流形	
3	$\begin{bmatrix} t^3 \\ r^0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} t^2(\text{dir}) \\ r^1(\text{dir}) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} t^1(\text{dir}) \\ r^2(\text{dir}) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} t^0 \\ r^3 \end{bmatrix}$
	$\{T\}$	$\{G(P)\}$	子流形	$\{S(M)\}$
4	$\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\text{dir}) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} t^2(\text{dir}) \\ r^2(\text{dir}) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} t^1(\text{dir}) \\ r^3 \end{bmatrix}$	
	$\{X(w)\}$	子流形	子流形	
5	$\begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\text{dir}) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} t^2(\text{dir}) \\ r^3 \end{bmatrix}$		
	子流形	子流形		
6	$\begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix}$			
	$\{D\}$			

4 机构拓扑学的基本公式

4.1 基于螺旋理论的拓扑学基本公式

4.1.1 串联机构运动特征方程

串联机构末端构件相对于机架的运动螺旋系由式(11)确定^[4-5]

$$T_s = \bigcup T_{j_i} \quad (11)$$

式中 T_s ——末端构件相对于机架的运动螺旋系;

T_{j_i} ——第 i 个运动副两构件的相对运动螺旋系。

4.1.2 并联机构运动特征方程

将运动螺旋系的“交”运算转化为约束螺旋系的“并”运算的方法,其基本思想如下^[4-5]。

(1) 由式(11),确定第 j 条支路的末端构件的运动螺旋系 T_{b_j} 。

(2) 由螺旋系的互易积 $T_{b_j} \circ T_{b_j}^r = 0$,确定第 j 条支路末端构件的约束螺旋系 $T_{b_j}^r$ 。

(3) 由式(12),确定动平台的约束螺旋系 T_{Pa}^r

$$T_{Pa}^r = \bigcup_{j=1}^{(v+1)} T_{b_j}^r \quad (12)$$

(4) 由螺旋系的互易积 $T_{Pa} \circ T_{Pa}^r = 0$,确定动平台的运动螺旋系 T_{Pa} 。

表 4 机构拓扑结构与运动特征及其数学表示

螺旋理论	线性变换	位移子群/子流形	方位特征集
拓扑结构			
拓扑综合过程考虑拓扑结构诸要素；拓扑结构与定坐标系和运动位置有关。		拓扑结构具有运动过程不变性；与运动位置和定坐标系无关。	
速度特征			
直接取速度表示速度特征		取速度的单位矢量集表示速度特征	
$T=[L,M,N,P,Q,R]$	$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = [J][\dot{\boldsymbol{q}}]$	$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho} (\boldsymbol{e}_R \times \boldsymbol{e}_\rho) \\ \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{e}_R \end{bmatrix}$	$E_M = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}'_1 & \boldsymbol{e}'_2 & \boldsymbol{e}'_3 \\ \boldsymbol{e}''_1 & \boldsymbol{e}''_2 & \boldsymbol{e}''_3 \end{bmatrix}$
线性运算；与运动位置和定坐标系有关		线性符号运算；只与拓扑结构有关，与运动位置和定坐标系无关	
方位特征			
基于非瞬时性判定，存在对应的有限位移	由指数映射，确保存在对应的位移子群 $\{E\}, \{T(\boldsymbol{u})\}, \{R(N, \boldsymbol{u})\}, \{H(N, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho})\},$ $\{T(P)\}, \{C(N, m, \boldsymbol{u})\}, \{T\}, \{G(P)\},$ $\{Y(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\rho})\}, \{S(N)\}, \{X(\boldsymbol{w})\}, \{D\}$		由于单位矢量集与位置无关，确保存在对应的 POC 集 $M = \begin{bmatrix} t_1(\text{dir}) & t_2(\text{dir}) & t_3(\text{dir}) \\ r_1(\text{dir}) & r_2(\text{dir}) & r_3(\text{dir}) \end{bmatrix}$
主要特点			
线性运算	非线性符号运算 (表格形式或综合判 据)未涵盖子流形机构		线性符号运算
与运动位置有关		与运动位置无关	
与定坐标系有关		与定坐标系无关	
数学方法			
代数方法 (与定坐标系有关)		内蕴几何学方法 (与定坐标系无关)	

4.1.3 并联机构 DOF 公式

近十多年, 基于螺旋理论提出了多种并联机构 DOF 公式, 但已证明可化为统一形式^[32]

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(\nu+1)} \text{rank}(S_{b_j}) + \text{rank}(S_{Pa}) \quad (13)$$

式中 F ——自由度数;

f_i ——第 i 个运动副的 DOF;

m ——运动副数;

ν ——独立回路数;

$\text{rank}(S_{b_j})$ ——第 j 条支路末端构件运动螺旋系的秩;

$\text{rank}(S_{Pa})$ ——动平台运动螺旋系的秩。

4.1.4 主要特点

(1) 螺旋系的线性运算与运动位置有关, 又与定坐标系有关。

(2) 由于与运动位置有关, 得到瞬时 DOF, 需要判定其非瞬时性。

4.2 基于线性变换的拓扑学基本公式

4.2.1 串联机构运动特征方程

串联机构末端构件速度空间, 由式(14)确定^[16, 18]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}_s = \bigcup_{i=1}^m \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{J_i} \\ \boldsymbol{\omega}_{J_i} \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

式中 $\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}_s^T$ ——末端构件的速度空间;

$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{J_i} \\ \boldsymbol{\omega}_{J_i} \end{bmatrix}^T$ ——第 i 个运动副两构件的相对速度空间。

4.2.2 并联机构运动特征方程

并联机构动平台的速度空间由式(15)确定^[16, 18]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}_{Pa}^T = \bigcap_{j=1}^{(\nu+1)} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{b_j} \\ \boldsymbol{\omega}_{b_j} \end{bmatrix}^T \quad (15)$$

式中, $\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}_{Pa}^T$ ——动平台的速度空间;

$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{b_j} \\ \boldsymbol{\omega}_{b_j} \end{bmatrix}^T$ ——第 j 条支路末端构件的速度空间。

4.2.3 并联机构 DOF 公式

并联机构 DOF 公式为^[17-18]

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(\nu+1)} \text{rank}(R_{A_j}) + \text{rank}\left(\bigcap_{j=1}^{(\nu+1)} R_{A_j}\right) \quad (16)$$

式中 $\text{rank}(R_{A_j})$ ——第 j 条支路末端构件速度空间的秩;

$\text{rank}\left(\bigcap_{j=1}^{(\nu+1)} R_{A_j}\right)$ ——动平台速度空间的秩。

特别说明, 当动平台的速度空间含有非独立元素时(如平面 4R 机构的连杆为动平台), 则需要给出确定其独立元素数目的一般方法^[18]。

另外, 又由式(14)~(16)导出了机构过约束度公式和冗余度公式^[18]。

4.2.4 主要特点

(1) 速度空间的线性运算, 与位置有关, 又与定坐标系有关。

(2) 由于速度空间与运动位置有关, 得到瞬时

DOF, 需要判定其非瞬时性, 判定方法见第 3.2 节。

4.3 基于位移子群的拓扑学基本公式

4.3.1 串联机构运动特征方程

串联机构位移子群的“并”运算公式为^[7, 10]

$$L_S = \{L_{S_i}\} \cup \{L_{S_j}\} \quad (17)$$

式中 L_S ——串联机构的位移子群;

L_{S_i}, L_{S_j} ——串联机构的子机构的位移子群。

非线性符号运算规则如下: ① 表格形式的 107 个“并”运算规则(详见[9]之表 2); ② 利用综合判据的“并”运算, 但尚未见到明确的综合判据及其详细步骤。

4.3.2 并联机构运动特征方程

对并联机构, 位移子群的“交”运算公式为^[7, 10]

$$L_{Pa} = \{L_{b_i}\} \cap \{L_{b_j}\} \quad (18)$$

式中 L_{Pa} ——并联机构动平台的位移子群;

L_{b_i}, L_{b_j} ——支路末端构件的位移子群。

非线性符号运算规则如下: ① 表格形式的 107 个“交”运算规则(详见[9]之表 2); ② 利用综合判据的“交”运算, 但尚未见到明确的综合判据及其详细步骤。

4.3.3 基于位移子群的 DOF 公式

并联机构 DOF 公式为^[13-14]

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} \dim(A_j^{mlf}) + \dim\left(\bigcap_j A_j^{mlf}\right) \quad (19)$$

式中 A_j^{mlf} ——第 j 条支路末端构件的位移子群;

$\dim(A_j^{mlf})$ ——位移子群 A_j^{mlf} 的维数(独立元素数)。

应注意到, 当并联机构动平台的运动特征含有非独立元素时(如平面 4R 机构的连杆), 需要给出确定独立元素数目的一般方法。

4.3.4 主要特点

(1) 位移子群的非线性符号运算(表格形式或综合判据)与位置无关, 但与定坐标系有关。

(2) 由于与运动位置无关, 得到整周 DOF。

(3) 式(17)~(19)不能用于子流形机构, 由于尚未给出子流形“并”与“交”的运算规则(第 3.3.2 节)。

4.4 基于 POC 集的拓扑学基本公式

4.4.1 串联机构方位特征方程

(1) 串联机构 POC 方程^[22-25, 27, 30, 34]。

串联机构末端构件的 POC 集, 由式(20)确定

$$M_S = \bigcup_{i=1}^m M_{J_i} = \bigcup_j M_{\text{sub-SOC}_j} \quad (20)$$

式中 M_S ——末端构件的 POC 集;

M_{J_i} ——第 i 个运动副的 POC 集, 如表 2 所示;

$M_{\text{sub-SOC}_j}$ ——串联机构包含的第 j 个 sub-SOC 的 POC 集, 而文献[27, 30, 34]给出了如表 1 所示的 sub-SOCs 的 POC 集。

应注意到, 所有运动副的 POC 集对应于末端构件上同一个基点 o' 。

(2) 运算规则。

POC 集“并”的 12 个线性符号运算规则

$$[r^1 \cup r^1], [r^1 \cup r^2], [r^2 \cup r^2], [r^1 \cup r^3], [r^2 \cup r^3], [r^3 \cup r^3] \\ [t^1 \cup t^1], [t^1 \cup t^2], [t^2 \cup t^2], [t^1 \cup t^3], [t^2 \cup t^3], [t^3 \cup t^3]$$

例如

$$[r^1(\parallel R_i)] \cup [r^2(\parallel \diamond(R_{i+1}, R_{i+2}))] =$$

$$\begin{cases} [r^2(\parallel \diamond(R_{i+1}, R_{i+2}))] & R_i \parallel \diamond(R_{i+1}, R_{i+2}) \\ [r^3] & R_i \parallel \diamond(R_{i+1}, R_{i+2}) \end{cases}$$

2 个非线性判据: 按照式(10), POC 集独立元素的选取原则^[25, 30]。

4.4.2 并联机构运动特征方程^[22-25, 27, 30, 34]

(1) 并联机构动平台 POC 集, 由式(21)确定

$$M_{Pa} = \bigcap_{j=1}^{v+1} M_{b_j} \quad (21)$$

式中 M_{Pa} ——动平台 POC 集;

M_{b_j} ——对应于动平台上同一个基点 o' , 第 j 条支路的 POC 集($M_{b_j} \supseteq M_{Pa}$)。

(2) 运算规则。

POC 集“交”的 12 个线性符号运算规则

$$[r^1 \cap r^1], [r^1 \cap r^2], [r^2 \cap r^2], [r^1 \cap r^3], [r^2 \cap r^3], [r^3 \cap r^3] \\ [t^1 \cap t^1], [t^1 \cap t^2], [t^2 \cap t^2], [t^1 \cap t^3], [t^2 \cap t^3], [t^3 \cap t^3]$$

例如

$$[r^2(\parallel \diamond(R_{i1}, R_{i2}))]_{b_i} \cap [r^2(\parallel \diamond(R_{j1}, R_{j2}))]_{b_j} =$$

$$\begin{cases} [r^2(\parallel \diamond(R_{i1}, R_{i2}))]_{Pa} & (\diamond(R_{i1}, R_{i2})) \parallel (\diamond(R_{j1}, R_{j2})) \\ [r^1(\parallel (\diamond(R_{i1}, R_{i2}) \cap \diamond(R_{j1}, R_{j2})))]_{Pa} & (\diamond(R_{i1}, R_{i2})) \parallel (\diamond(R_{j1}, R_{j2})) \end{cases}$$

2 个非线性判据: 按照式(10), POC 集独立元素的选取原则^[25, 30]。

但式(21)仅是确定动平台 POC 集的必要条件, 还应考虑: ① POC 集维数(独立元素数目)不大于 DOF(式(10))^[22-25, 27, 34]; ② 消极运动副的判定^[22-25, 27, 34]; ③ 整体几何条件对“交”运算的约束^[30, 34]。

例如, 对 3-RPS 并联机构(图 9), 动平台上任一点为基点 o' , 若 3 个 R 副轴线不共面(图 9a), 则动平台有 3 个移动和 3 个转动; 若 3 个 R 副轴线共面(图 9b), 由于 3 个 S 副只能在垂直于定平台的平面内运动, 则动平台失去了定平台法线方向的转动, 故只有 3 个移动和 2 个转动^[30, 34]。又由于机构 DOF=3, POC 集只能有 3 个独立元素(式(10)), 其余为非独立元素。因

此, POC 集的 3 个独立元素可有多种选取方案^[30, 34]。

(a) 3 个 R 副轴线不共面

(b) 3 个 R 副轴线共面

图 9 3-RPS 并联机构

4.4.3 空间机构 DOF 公式

(1) 空间多回路机构 DOF 公式为^[26, 29]

$$\begin{cases} F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{L_j} \\ \xi_{L_j} = \dim\{(\bigcap_{i=1}^j M_{b_i}) \cup M_{b_{j+1}}\} \end{cases} \quad (22)$$

式中 M_{b_i} ——第 i 条支路的 POC 集;

ξ_{L_j} ——第 j 个独立回路的独立位移方程数。

该公式的主要特点: ① 得到整周 DOF; ② 可用于空间多回路机构与并联机构; ③ 由该公式, 提出了驱动副判定准则与消极运动副判定准则^[26, 29]。

4.4.4 AKC 的耦合度公式

由基于 Assur 运动链的机构组成原理可知, 机构运动(动力)学分析可转化为它所包含的 Assur 运动链(AKC)的运动(动力)学分析, 且每个 AKC 是可独立求解的单元^[30, 33-34]; 又由基于单开链(SOC)单元的机构组成原理可知, AKC 可分解为依次联接的 ν 个 SOC(图 2), 则 AKC 的耦合度为^[25, 30, 33-35]

$$\begin{cases} \kappa = \frac{1}{2} \min \left\{ \sum_{j=1}^v |A_j| \right\} \\ A_j = \sum_{i=1}^{m_j} f_i - \xi_{L_j} \end{cases} \quad (23)$$

式中 κ ——AKC 的耦合度;

$\min\{\bullet\}$ ——AKC 分解为有序 ν 个 SOC(A_j) 的多种方案中的最小值;

m_j ——第 j 个 SOC $_j$ 的运动副数;

f_i ——运动副的 DOF;

ξ_{L_j} ——第 j 个独立回路的独立位移方程数, 由 DOF 公式(式(22))确定。

耦合度的物理意义如下: AKC 运动(动力)学分析转化为它所包含的有序 SOC 的运动(动力)学分析及其联立求解, 且联立求解的未知数数目大幅度降低, 恰等于 AKC 的耦合度 κ , 从而建立了基于 SOC 单元的机构拓扑学、运动学与动力学的系统理论与方法^[33-34, 36]。

4.4.5 机构的拓扑特征

基于式(20)~(23), 进一步揭示的机构拓扑特征如表 5 所示^[30, 34], 它们与机构运动学与动力学等性能密切相关, 可用于机构拓扑结构类型的性能分析、分类及其类型优选(第 5.4 节); 亦可作为已知条件, 用于机构运动学与动力学分析^[40]。

4.4.6 主要特点

(1) POC 集的线性符号运算, 与运动位置无关, 又与定坐标系无关。

(2) 由于 POC 集与位置无关, 得到整周 DOF。

本节核心内容如表 6 所示, 并由基本公式(表 6)与基本概念(表 4)的比较可知, 基本概念及其数学表示决定了基本公式的主要特点。

表 5 机构的拓扑特征

拓扑特征	基本公式(准则)
1 POC 集	$M_S = \bigcup_{i=1}^m M_{J_i} = \bigcup_j M_{sub-SOC_j}$ $M_{Pa} = \bigcap_{i=1}^{v+1} M_{b_i}$
2 POC 集的维数	$\dim\{M_{mech}\} \leq \text{DOF}$
3 DOF	$\begin{cases} F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{L_j} \\ \xi_{L_j} = \dim\{(\bigcap_{i=1}^j M_{b_i}) \cup M_{b_{j+1}}\} \end{cases}$
4 独立位移方程数	$\xi_{mech} = \sum_{j=1}^v \dim\{(\bigcap_{i=1}^j M_{b_i}) \cup M_{b_{j+1}}\}$
5 过约束数	$N_{ov} = 6v - \xi_{mech}$
6 冗余自由度	$D_{red} = F - \dim(M_{Pa})$
7 消极运动副	消极运动副判定准则
8 驱动副	驱动副选定准则
AKC 类型的判定准则	
9 AKC 类型及其数目	$\begin{cases} \sum_{j=1}^v A_j = 0 \\ A_j = \sum_{i=1}^{m_j} f_i - \xi_{L_j} \end{cases}$
10 AKC 耦合度	$\kappa = \frac{1}{2} \min \left\{ \sum_{j=1}^v A_j \right\}$
11 DOF 类型	DOF 类型判定准则
12 运动解耦性	运动解耦原理与判定准则

表 6 机构拓扑学基本公式及其主要特点

螺旋理论	线性变换	位移子群/子流形	方位特征集
基本公式			
(1) 运动螺旋系的“并” $T_S = \bigcup T_{S_j}$ $T_{S_j} \circ T_{S_j} = 0$	(1) 速度空间的“并” $\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}_S = \bigcup \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}_{S_j}$	(1) 位移子群的“并” $L_S = \{L_A\} \cup \{L_B\}$	(1) 串联机构 POC 方程 $M_S = \bigcup_{i=1}^m M_{J_i}$
线性运算		表格形式的 107 个“并”运算规则，或利用综合判据，但尚未涵盖子流形机构。	12 个线性符号“并”运算规则与 2 个非线性判据；独立元素选择原则
(2) 约束螺旋系的“并” $T_{Pa}^r = \bigcup T_{S_j}^r$ $T_{Pa}^r \circ T_{Pa}^r = 0$	(2) 速度空间的“交” $\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}_{Pa} = \bigcap \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}_{b_j}$	(2) 位移子群的“交” $L_{Pa} = \{L_A\} \cap \{L_B\}$	(2) 并联机构 POC 方程 $M_{Pa} = \bigcap_{j=1}^{v+1} M_{b_j}$
线性运算		表格形式的 107 个“交”运算规则，或利用综合判据，但尚未涵盖子流形机构	12 个线性符号“交”运算规则与 2 个非线性判据；独立元素选择原则
(3) DOF 公式 $F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} \text{rank}(S_{b_j}) + \text{rank}(S_{Pa})$	(3) DOF 公式 $F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} \text{rank}(R_{A_j}) + \text{rank}\left(\bigcap_{j=1}^{(v+1)} R_{A_j}\right)$	(3) DOF 公式 $F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(v+1)} \dim(A_j^{mlf}) + \dim\left(\bigcap_j^{(v+1)} A_j^{mlf}\right)$	(3) DOF 公式 $\begin{cases} F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{L_j} \\ \xi_{L_j} = \dim\left\{\left(\bigcap_{i=1}^j M_{b_i}\right) \cup M_{b_{j+1}}\right\} \end{cases}$
线性运算		主要特点	(4) 耦合度公式 $\begin{cases} \kappa = \frac{1}{2} \min \left\{ \sum_{j=1}^v A_j \right\} \\ A_j = \sum_{i=1}^{m_j} f_i - \xi_{L_j} \end{cases}$
与运动位置有关	与定坐标系有关	非线性符号运算 (表格形式或综合判据)尚未涵盖子流形机构	线性符号运算
		与运动位置无关	与定坐标系无关
数学方法			
代数方法 (与定坐标系有关)		内蕴几何学方法 (与定坐标系无关)	

5 并联机构拓扑综合方法

5.1 基于螺旋理论的拓扑综合方法

5.1.1 基本思想^[4-5]

(1) 由预定设计目标，确定并联机构动平台的运动螺旋系，并由互易积，得到动平台约束螺旋系。

(2) 基于预定的设计目标与动平台约束螺旋系，经线性运算(式(12))，确定支路约束螺旋系，支路数目，以及支路之间的几何关系等；再经互易积，确定支路运动螺旋系。

(3) 对支路运动螺旋系的螺旋进行线性组合(式(11))，确定支路运动链的拓扑结构，包括运动副类型及其数目，运动副轴线之间的几何关系，以及它们的排列次序等。

(4) 基于预定的设计目标，支路组合方案与支路之间的几何关系，生成多种并联机构。

(5) 由于螺旋系与运动位置有关，结构综合得

到瞬时机构，需要非瞬时性判定。为此，可用任意微小位移的约束系不变性进行判定^[2,4]，或用虚拟运动链的整周 DOF 存在的充分条件进行判定^[5]。

5.1.2 主要特点

(1) 运动螺旋系“交”运算转化为约束螺旋系的“并”运算。

(2) 由于螺旋系与运动位置有关，得到瞬时机构，需要进行非瞬时性判定。

(3) 由于螺旋系与定坐标系有关，运动副轴线大多按照便于计算的方位进行配置，有可能使机构存在的几何条件失去一般性。

5.2 基于线性变换与进化形态学的综合方法

5.2.1 基本思想^[18]

(1) 以设计目标集表示对拓扑综合的预定要求，以结构元素集表示机构的拓扑结构，用提出的拓扑综合方法，可得到满足预定要求的多种结构类型。

设计目标集包括：支路与并联机构(PM)的 DOF，支路与 PM 的连通度，机构的过约束数，冗

余度等。

结构元素集包括：支路结构类型(即运动副类型、数目、尺度参数为 0 或非 0、轴线之间的相互平行或垂直，以及排列次序等)；支路数目与支路组合方案；支路在两平台装配的几何条件等。

(2) 拓扑综合方法的理论依据：连通度公式、DOF 公式(式(16))、过约束度公式、冗余度公式，以及速度空间的“并”与“交”公式(式(14)、(15))等。

(3) 由于设计目标集与结构元素集组合方案的爆炸性，引入进化形态学的多目标优化方法。对第 t 步得到的结构元素集，经形态学算子(组合、突变、移植和选择)与进化规则，得到第 $t+1$ 步的结构元素集等，并最终得到满足设计目标的多种结构类型。由于进化形态学具有较强的可变性，已得到连通度为 2~6 的支路库。

(4) 由于速度空间与运动位置有关，结构综合得瞬时机构，需要进行非瞬时性判定，并提出了用直观方法判定其非瞬时性。

(5) 基于 Jacobian 矩阵描述速度空间的输入与输出之间对应关系，并联机构(PM)可分为五类：最大正则 PM、完全各项同性 PM、非耦合 PM，降耦 PM 与耦合 PM。

5.2.2 主要特点

(1) 基于线性变换与进化形态学相结合的多目标优化的结构综合方法。

(2) 由于线性变换与运动位置有关，得到瞬时机构，需要进行非瞬时性判定。

(3) 由于线性变换与定坐标系有关，运动副轴线大多按照便于计算的方位配置，有可能使机构存在的几何条件失去一般性。

5.3 基于位移子群/子流形的拓扑综合方法

5.3.1 基本思想^[10-11]

(1) 由预定的设计目标，确定并联机构动平台的位移子群/子流形。

(2) 基于位移子群/子流形的“交”运算(式(18))，由动平台的位移子群/子流形，确定支路的位移子群/子流形。并由位移子群/子流形的“并”运算(式(17))，确定与其对应的支路的拓扑结构类型。但尚未给出具有明确步骤的支路结构综合的系统方法。

(3) 基于位移子群/子流形的“交”运算(式(18))，由动平台的位移子群/子流形，确定支路在两平台装配的几何条件。

(4) 由支路的结构类型及其装配几何条件，生成非瞬时并联机构。

5.3.2 主要特点

(1) 位移子群的非线性符号运算有两种形式：

① 利用表格形式的运算规则；② 基于综合判据的运算，但尚未给出明确的综合判据及其判定步骤。

(2) 由于位移子群与运动位置无关，结构综合得到非瞬时机构。

(3) 由于位移子群与定坐标系有关，运动副轴线大多按照便于运算的方位配置，有可能使机构存在的几何条件失去一般性。

(4) 尚未给出子流形“并”与“交”的运算规则，子流形机构的拓扑综合方法有待进一步完善与发展。

5.4 基于 POC 集的拓扑综合方法

5.4.1 基本思想^[22-25, 30, 34]

以基本功能要求(POC 集与 DOF)与性能要求为拓扑设计的预定目标，用提出的拓扑综合方法，可得到多种拓扑结构类型，并进行结构类型的性能分析、分类及其优选，其理论依据如下：① 拓扑学基本方程(式(20)~(23))；② 与运动学和动力学性能密切相关的机构的拓扑特征(表 5)。

5.4.2 主要步骤^[25, 30, 34]

(1) 设计目标。包括基本功能要求(POC 集与 DOF)，某些性能要求(表 5)。

(2) 支路拓扑综合。由并联机构 POC 方程(式(21))，确定支路 POC 集的多种方案；基于串联机构 POC 方程(式(20))，确定支路运动副类型与数目，以及可能包含的“轴线的几何约束类型”的 Sub-SOCs，可得到众多简单支路；再利用拓扑等效原理，生成众多复杂支路。

(3) 支路组合方案。确定支路数目(由并联机构 POC 方程(式(21))确定最少支路数，并考虑到所有驱动副位于同一平台，冗余支路数等)；由支路数目与性能要求(表 5)，提出支路组合的多种方案。

(4) 支路装配方案。基于并联机构 POC 方程(式(21))与 DOF 公式(式(22))，以及性能要求(表 5)，确定支路在两平台装配的几何条件，及其对应的多种装配方案。

(5) 基于拓扑特征(表 5)的结构类型性能分析及其分类，以便于优选结构类型。

5.4.3 主要特点

(1) 拓扑设计。包括由结构综合得到多种结构类型，基于拓扑特征的结构类型的性分析及其分类，以及类型优选。

(2) 与运动位置无关，得到非瞬时机构。

(3) 与定坐标系无关，得到机构存在的几何条件具有一般性。

本节小结如表 7 所示。由拓扑综合方法(表 7)，基本公式(表 6)与基本概念(表 4)的比较可知，基本概念决定了拓扑综合方法的主要特点。

表 7 机构拓扑综合方法及其主要特点

螺旋理论	线性变换	位移子群/子流形	方位特征集
拓扑综合方法			
基于拓扑学 3 个基本公式(式(11)~(13))及其线性运算的拓扑综合方法; 运动螺旋的'交'运算转化为约束螺旋的'并'运算。	基于设计目标集与拓扑学 3 个基本公式(式(14)~(16))及其线性运算, 并与进化形态学相结合的多目标优化的拓扑综合方法。	基于拓扑学 3 个基本公式(式(17)~(19))及其非线性符号运算(表格形式或综合判据)的拓扑综合方法; 用于位移子群机构, 尚未涵盖子流形机构。	基于拓扑学的 4 个基本公式(式(20)~(23))及其线性符号运算和机构拓扑特征(表 5)的拓扑综合方法; 基于机构拓扑特征(表 5)的结构类型的性能分析、分类及其类型优选。
主要特点			
线性运算		非线性符号运算	线性符号运算
与运动位置有关, 得到瞬时机构; 需要非瞬时性判定。		与运动位置无关, 得到非瞬时机构。	
与定坐标系有关, 机构存在的几何条件可能失去一般性。			与定坐标系无关, 机构存在的几何条件具有一般性。
数学方法			
代数方法 (与定坐标系有关)			内蕴几何学方法 (与定坐标系无关)

6 结论

(1) 机构拓扑学的系统理论与方法, 包括: 提出物理模型 (拓扑结构、运动特征与运动确定性三者之间的映射关系); 基于非逻辑思维提出基本概念 (拓扑结构、运动特征等) 及其数学表示, 并引入/建立数学方法; 再由逻辑思维导出机构拓扑学基本公式及其运算规则, 并揭示机构连续运动的拓扑特征 (如整周 DOF、方位特征及其维数、独立位移方程数、AKC 耦合度、运动输入-输出解耦性等); 以及提出机构拓扑设计的一般方法。

(2) 基于拓扑三要素(运动副、构件之间的联接关系、轴线的几何约束类型)描述的机构的拓扑结构及其符号表示, 具有运动过程不变性(不含奇异位置), 与运动位置无关, 又与定坐标系皆无关, 从而为机构拓扑学的可运算性方法提供了理论基础。

(3) 基于非逻辑思维提出的基本概念(拓扑结构、运动特征等)及其数学表示, 是引入/建立机构拓扑学的不同数学方法的依据, 从而形成不同的系统理论与方法。螺旋理论与线性变换两种方法, 直接取速度表示速度特征, 引入线性运算方法, 运算与运动位置有关, 又与定坐标系有关; 位移子群方法亦直接取速度表示速度特征, 并由指数映射确保存在相应的方位特征, 从而建立了非线性符号运算方法, 运算与运动位置无关, 但与定坐标系有关; 方位特征集方法取速度的单位矢量集表示速度特征, 并由其运动过程不变性确保存在相应的方位特征, 从而建立了线性符号运算方法, 运算与运动位置无关, 又与定坐标系无关。

总之, 引入/建立现代数学方法应显示它在机构拓扑学的基本概念及其数学表示和建立基本公式及其运算规则等方面的突出作用, 仅停留在使用现代数学的名词是不够的; 而对已有的研究成果, 以改用现代数学名词实现所谓“创新与获奖”更是不可取的。

(4) 基于非逻辑思维提出的基本概念及其数学表示(表 4), 是构建机构拓扑学的基石; 由基本概念建立了机构拓扑学基本公式及其运算规则(表 6), 又进一步提出了机构拓扑综合方法(表 7); 由这三个表的比较易知, 基本概念、基本公式与拓扑综合方法的主要特点对应相同, 因此, 拓扑综合方法可分两大类: ① 与定坐标系有关的代数学方法, 螺旋理论、线性变换与位移子群等方法等属于此类方法, 其结构综合得到的机构存在的几何条件可能失去一般性; ② 与定坐标系无关的内蕴几何学方法, 而 POC 集方法等属于此类方法, 其结构综合得到的机构存在的几何条件具有一般性。

(5) 基于 POC 集的方法属于内蕴几何学方法, 乃源于: ① 机构拓扑的几何化符号表示具有运动过程不变性(不含奇异位置), 且与定坐标无关; ② 由速度的单位矢量集导出的方位特征集具有运动过程不变性(不含奇异位置), 且与定坐标无关; ③ 速度的单位矢量集之间的线性相关性只与拓扑结构有关, 从而使导出的 POC 集的“并”与“交”为线性符号运算, 与运动过程无关(不含奇异位置), 又与定坐标系无关。

(6) 由非逻辑思维提出的以单开链为单元的机构组成原理也是机构拓扑学的核心内容之一, 为建立以单开链为单元的机构拓扑学、运动学与动力学的系统理论与方法提供了理论基础。顺便说明, 在

机构学发展过程中,德国学者提出了基于杆-副单元的、俄国学者提出了基于 ASSUR 组的,以及美国学者提出了基于回路单元(树与连杆)的组成原理,及其相应的机构拓扑学、运动学与动力学的系统理论与方法^[33-36]。

综上所述,机构拓扑学的不同的原创性系统理论与方法,源于由非逻辑思维提出的基本概念(拓扑结构、运动特征等)的不同定义及其数学表示,也就是对研究对象的不同的理解方式,而未来一定会出现新的理解方式及其相应的新的系统理论与方法。

参 考 文 献

- [1] FRISOLI A, CHECCACCI D, SALSEDO F, et al. Synthesis by screw algebra of translating in-parallel actuated mechanisms[M]. Dordrecht: Kluwer, 2000.
- [2] HUANG Zhen, LI Qingchuang. General methodology for type synthesis of symmetrical lower-mobility parallel manipulators and several novel manipulators [J]. Int. J. Robotics Research, 2002, 21(2): 131-145.
- [3] HUANG Zhen, LI Qinchuan. Type synthesis of symmetrical lower-mobility parallel mechanisms using the constraint-synthesis method[J]. Int. J. Robotics, 2003, 22(1): 59-79.
- [4] HUANG Zhen, LI Qinchuan, DING Huafeng. Theory of parallel mechanisms[M]. Dordrecht: Springer, 2012.
- [5] KONG Xianwen, GOSSELIN C. Type synthesis of 3T1R 4-DOF parallel manipulators based on screw theory[J]. IEEE Trans. Rob. Autom., 2004, 20(2): 181-190.
- [6] KONG Xianwen, GOSSELIN C. Type synthesis of parallel mechanisms[M]. Springer, 2007.
- [7] HERVE J. Analyse structurelle des mécanismes par groupe des déplacements[J]. Mech. Mach. Theory, 1978, 13: 437-450.
- [8] HERVE J. Design of parallel manipulators via the displacement group[C]// Proc. of the 9th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Milan, Italy, 1995: 2079-2082.
- [9] FANGHELLA P, GALLETTI C. Metric relations and displacement groups in mechanism and robot kinematics [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1995, 117: 470-478.
- [10] HERVE J. The Lie group of rigid body displacements, a fundamental tool for mechanism design[J]. Mech. Mach. Theory, 1999, 34: 719-730.
- [11] LI Qinchuan, HUANG Zhen, HERVE J. Type synthesis of 3R2T 5-DOF parallel mechanisms using the lie group of displacements[J]. IEEE Trans. Rob. Autom., 2004, 20: 173-180.
- [12] HUYNH P, HERVE J. Equivalent kinematic chains of three degree-of-freedom tripod mechanisms with planar-spherical bonds[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2005, 127: 95-102.
- [13] RICO J, AGUILERA L, GALLARDO J, et al. A more general mobility criterion for parallel platforms[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2006, 128: 207-219.
- [14] RICO J, CERVANTES J, ROCHA J, et al. Mobility of single loop linkages: A final word[C]// Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, 2007: DETC2007-34936.
- [15] MENG J, LIU G F, LI Z X. A geometric theory for analysis and synthesis of Sub-6 DOF parallel manipulators[J]. IEEE Trans. Rob., 2007, 23: 625-649.
- [16] GOGU G. Structural synthesis of fully-isotropic translational parallel robots via theory of linear transformations[J]. Eur. J. Mech. A Solids, 2004, 23: 1021-1039.
- [17] GOGU G. Mobility of mechanisms: A critical review[J]. Mech Mach Theory, 2005, 40: 1068-1097.
- [18] GOGU G. Structural synthesis of parallel robots: Part 1: Methodology[M]. Dordrecht: Springer, 2008.
- [19] GOGU G. Structural synthesis of parallel robots: Part 2: Translational topologies with two and three degrees of freedom[M]. Dordrecht: Springer, 2009.
- [20] GOGU G. Structural synthesis of parallel robots: Part 3: Topologies with planar motion of the moving platform[M]. Dordrecht: Springer, 2010.
- [21] GOGU G. Structural synthesis of parallel robots: Part 4: Other topologies with two and three degrees of freedom[M]. Dordrecht: Springer, 2012.
- [22] 杨廷力, 金琼, 刘安心, 等. 基于单开链单元的欠秩并联机器人机构型综合的一般方法[J]. 机械科学与技术, 2001, 20(3): 321-325.
YANG Tingli, JIN Qiong, LIU Anxin, et al. A general method for type synthesis of rank-deficient parallel robot mechanisms based on SOC unit[J]. Machine Science and Technology, 2001, 20(3): 321-325.
- [23] 杨廷力, 金琼, 刘安心, 等. 基于单开链单元的三平移并联机器人机构型综合及其分类[J]. 机械工程学报, 2002, 38(8): 31-36.
YANG Tingli, JIN Qiong, LIU Anxin, et al. Structural synthesis and classification of the 3-DOF translation parallel robot mechanisms based on the unites of single-open chain[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2002, 38(8): 31-36.
- [24] JIN Qiong, YANG Tingli. Theory for topology synthesis of parallel manipulators and its application to three-dimension-translation parallel manipulators[J].

- Transactions of the ASME J. of Mechanical Design, 2004, 126: 625-639.
- [25] 杨廷力. 机器人机构拓扑结构学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2004.
- YANG Tingli. Theory of topological structure for robot mechanisms[M]. Beijing: China Machine Press, 2004.
- [26] YANG Tingli, SUN Dongjin. General formula of degree of freedom for parallel mechanisms and its application[C]// Proc. of ASME 2006 Mechanisms Conference, 2006: DETC2006-99129.
- [27] YANG Tingli, LIU Anxin, LUO Yufeng, et al. Position and orientation characteristic equation for topological design of robot mechanisms[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2009, 131: 021001-1-17.
- [28] 杨廷力, 刘安心, 罗玉峰, 等. 机器人机构结构综合方法的基本思想、特点, 及其发展趋势[J]. 机械工程学报, 2010, 46(9): 1-11.
- YANG Tingli, LIU Anxin, LUO Yufeng, et al. Basic principles, main characteristics and development tendency of methods for robot mechanism structure synthesis[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(9): 1-11.
- [29] YANG Tingli, SUN Dongjin. A general DOF formula for parallel mechanisms and multi-loop spatial mechanisms[J]. ASME Journal of Mechanisms and Robotics, 2012, 4 (1): 011001-1-17.
- [30] 杨廷力, 刘安心, 罗玉峰, 等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- YANG Tingli, LIU Anxin, LUO Yufeng, et al. Theory and application of robot mechanism topology[M]. Beijing: China Science Press, 2012.
- [31] YANG Tingli, LIU Anxin, SHEN Huiping, et al. On the correctness and strictness of the POC equation for topological structure design of robot mechanisms[J]. ASME Journal of Mechanisms and Robotics, 2013, 5(2): 021009-1-18.
- [32] 杨廷力, 沈惠平, 刘安心, 等. 机构 DOF 公式的基本形式、DOF 分析及其物理内涵 ---兼对近十年提出的 DOF 公式的回顾[J]. 机械工程学报, 2015, 41(9): 28-32.
- YANG Tingli, SHEN Huiping, LIU Anxin, et al. Review of the formulas for degrees of freedom in the past ten years[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(3): 69-80.
- [33] YANG Tingli, LIU Anxin, SHEN Huiping, et al. Composition principle based on single-open-chain unit for general spatial mechanisms and its application—in conjunction with a review of development of mechanism composition principles[J]. ASME Journal of Mechanisms and Robotics, 2018, 10: 051005-1-16.
- [34] YANG Tingli, LIU Anxin, SHEN Huiping, et al. Topology design of robot mechanisms[M]. Singapore: Springer, 2018.
- [35] YANG Tingli, YAO Fanghua. Topological characteristics and automatic generation of structural analysis and synthesis of plane mechanisms[C]// Proc. of ASME 1988 Mechanisms Conf., 1988: 179-190.
- [36] 杨廷力. 机械系统基本理论: 结构学, 运动学, 动力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 1996.
- YANG Tingli. Basic theory of mechanical system——structure, kinematic and dynamic[M]. Beijing: China Machine Press, 1996.
- [37] 于靖军, 刘辛军, 丁希仑, 等. 机器人机构学的数学基础[M]. 北京: 机械工业出版社, 2008.
- YU Jingjun, LIU Xinjun, DING Xilun, et al. Mathematical basis of robot mechanics[M]. Beijing: China Machine Press, 2008.
- [38] 王国彪, 刘辛军. 初论现代数学在机构学研究中的作用与影响[J]. 机械工程学报, 2013, 49(3): 1-9.
- WANG Guobiao, LIU Xinjun. Role and influence of modern mathematics in mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(3): 1-9.
- [39] MENG X, GAO F, WU S, et al. Type synthesis of parallel robotic mechanisms: Framework and brief review[J]. Mech. Mach. Theory, 2014(78): 177-186.
- [40] SHEN Huiping, YANG Tingli, LI Ju, et al. Evaluation of topological properties of parallel manipulators based on the topological characteristic indexes[J]. Robotica, 2019(11): 1.

作者简介: 杨廷力, 男, 1940 年出生, 教授, 高级工程师, 博士研究生导师。主要研究方向为机构学与机器人机构学。

E-mail: yangtl@126.com

沈惠平(通信作者), 男, 1965 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为机构学与机器人机构学。

E-mail: shp65@126.com