

DOI: 10.3901/JME.2020.02.154

## 考虑曲率匹配因素的钢轨砂带打磨宏观 接触压力建模与仿真<sup>\*</sup>

樊文刚<sup>1,2</sup> 王文玺<sup>1,2</sup> 侯广友<sup>1,2</sup> 王煦辉<sup>1,2</sup>

(1. 北京交通大学机械与电子控制工程学院 北京 100044;

2. 北京交通大学载运工具先进制造与测控技术教育部重点实验室 北京 100044)

**摘要:** 钢轨砂带打磨过程本质上表现为接触轮、砂带和钢轨之间的复杂非线性接触作用,其接触应力计算是材料去除、磨削温升及砂带磨损建模研究的基础,然而现有面向内凹接触轮的接触模型并未考虑 Hertz 接触理论的适用性问题和“轮”轨曲率匹配所带来的影响。基于内凹接触轮曲率半径与钢轨廓形曲率半径的几何匹配特性,以及外部接触压力对接触轮橡胶层变形的影响,将钢轨砂带打磨宏观接触分为椭圆形接触、双三角形接触和马鞍形接触三种情况。通过将三维接触问题转化为外包薄层弹性橡胶的圆形刚体与刚性平面间的二维平面接触问题,建立考虑曲率匹配因素的钢轨砂带打磨接触区域边界和应力分布理论计算模型,并开展有限元仿真对比分析。结果表明,仿真模型和理论模型均可得到形态相吻合的椭圆形接触斑、双三角形接触斑和马鞍形接触斑,并且主要参量误差处于钢轨砂带打磨工况允许阈值内,较好地验证了所建理论模型的有效性。所提出的理论模型对现有模型进行了完善并为内凹接触轮钢轨砂带打磨材料去除建模奠定了理论基础。

**关键词:** 钢轨打磨; 砂带; 接触; 曲率匹配

**中图分类号:** TG742

## Macro Contact Pressure Modeling and Simulation for Rail Grinding with Abrasive Belt Based on Curvature Match

FAN Wengang<sup>1,2</sup> WANG Wenxi<sup>1,2</sup> HOU Guangyou<sup>1,2</sup> WANG Xuhui<sup>1,2</sup>

(1. School of Mechanical, Electronic and Control Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044;

2. Key Laboratory of Vehicle Advanced Manufacturing, Measuring and Control Technology,  
Ministry of Education, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044)

**Abstract:** Rail grinding with abrasive belt essentially appears as the complex nonlinear contact interaction among contact wheel, abrasive belt and rail surface, the contact stresses calculation in which is the basis of modeling of material removal, grinding temperature and abrasive belt wear. However, the existing contact model for the concave contact wheel falls to consider the applicability of the Hertz theory and the effect of the "wheel" curvature matching. Based on the geometric matching between the radius curvature of concave wheel and that of rail profile, and also the influence of external contact pressure on rubber deformation of contact wheel, the macro contact of abrasive belt rail grinding is divided into three cases, including oval contact, double triangular contact and saddle contact. Then, this 3D contact problem is translated into 2D plane contact problem between the circular rigid body covered with thin elastic rubber layer and the rigid plane. Finally, the theoretical models for boundary curve and contact stress distribution are developed, and the finite element simulations are also implemented. Results show that almost identical contours of oval contact, double triangular contact and saddle contact can be obtained through the theoretical model and the simulation model, and the errors of main parameters are all within the allowable range of grinding condition for the rail grinding with abrasive belt, which verifies the validity of the proposed theoretical model. The proposed theoretical model has improved the existing model and laid a theoretical foundation for the modeling of grinding material removal for abrasive belt rail grinding using concave wheel.

**Key words:** rail grinding; abrasive belt; contact; curvature match

<sup>\*</sup> 中央高校基本科研业务费重点资助项目(2018JBZ105)。20181218 收到初稿, 20190621 收到修改稿

## 0 前言

钢轨打磨是目前国内外公认的实现各类轨道交通方式(高铁、重载、地铁、有轨电车等)钢轨日常维护保养的通用手段,通过去除钢轨表面损伤和缺陷、矫正钢轨廓形,可有效改善轮轨匹配关系、抑制滚动接触疲劳、延长钢轨服役寿命、降低列车运行噪声、提高列车运行平稳性、安全性以及乘客舒适度,社会和经济效益显著<sup>[1-3]</sup>。常见的钢轨打磨技术主要包括砂轮端面打磨<sup>[4-8]</sup>、砂轮周面打磨<sup>[9-10]</sup>、铣磨复合打磨<sup>[11-13]</sup>、砂轮高速打磨<sup>[14-15]</sup>和砂带打磨<sup>[16-17]</sup>,其中钢轨砂带打磨技术凭借着涂覆磨具特征、柔性接触等因素,已经在打磨效率、打磨质量、集尘以及安全等方面体现出了一定优势。

钢轨砂带打磨基本原理如图 1 所示,接触轮由刚性轮毂和覆盖于其外圆周面的橡胶层组成,在打磨压力作用下驱动砂带与钢轨表面接触实现材料去除。为增大有效接触宽度、进一步提高打磨效率,实际应用中可采用圆周面内凹型接触轮代替平型接触轮,同时根据钢轨打磨需求制定合理的打磨模式,将砂带打磨头沿钢轨横向和纵向分散布置,最终在保障打磨精度的前提下,实现对钢轨目标廓形的包络式打磨。

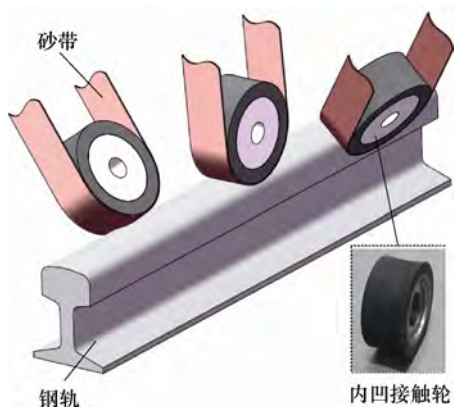


图 1 钢轨砂带打磨基本原理

由原理易知,钢轨砂带打磨本质上是砂带表面磨粒在指定压力分布作用下对钢轨表面进行划擦、耕犁和切削的物理作用过程。而接触轮、砂带和钢轨之间的复杂非线性接触行为,是引发磨削过程中各种相关物理作用的前提条件,决定着这些物理现象的产生和演变。例如,王文玺等<sup>[18-20]</sup>先后基于 Hertz 接触理论,建立了面向平型接触轮钢轨砂带打磨的砂带磨损预测模型、打磨功率预测模型和材料去除率预测模型。吴昌林等<sup>[21-25]</sup>也先后基于 Hertz 接触理论构建了平型接触轮砂带精密磨削的材料去

除模型。而 QI 等<sup>[26-27]</sup>也基于 Hertz 接触理论分别建立了平型接触轮砂带磨削和无接触部件的自由式砂带磨削下的工件表面粗糙度预测模型。此外, JOURANI 等则以单颗磨粒受力出发,建立了局部载荷作用下砂带精磨过程中磨削力比<sup>[28]</sup>、磨削温升<sup>[29-30]</sup>以及表层应力<sup>[30]</sup>分布的数值计算模型。然而,当前常用的三维 Hertz 接触理论仅能解决接触部件表面的两正交主曲率在该曲面同一侧的弹性接触问题,而对于内凹接触轮这类主曲率各自异侧的曲面则无法适用。

本文前期对基于内凹型接触轮的钢轨砂带打磨宏观静态接触行为进行了探索性研究<sup>[31-32]</sup>,以钢轨理想设计廓形为研究对象,设定接触轮内凹曲率半径大于钢轨廓形曲率半径,通过采用赫兹接触理论对钢轨横截面和纵截面两方向微元积分,建立了接触区域边界曲线和应力分布数值计算模型,获得了打磨压力、接触轮直径等参量对接触区域形态和应力分布的影响规律。然而,钢轨的实际廓形曲线并非恒定,其曲率半径的变化会导致接触行为发生改变。同时,赫兹接触理论的使用条件在实际工况中并不容易满足。例如,接触轮材料不完全满足各向同性、分布均匀的要求,接触区域面积与接触轮的尺寸相比不够小等<sup>[33]</sup>。为此,本文在充分考虑接触轮内凹曲率半径与钢轨廓形曲率半径匹配因素的基础上,将建立更为符合工程实际的钢轨砂带打磨宏观接触压力理论模型,实现对接触区域边界曲线和接触应力分布的计算,并通过有限元仿真进行验证。

## 1 钢轨砂带打磨宏观接触分析

钢轨廓形曲线通常由一系列不同曲率半径的圆弧(或可拟合成为圆弧)组合而成,其中 60 GB 和 60 N 廓形如图 2 所示<sup>[34]</sup>,两者关于中心线左右对称。本文尚不考虑砂带表面磨粒的微观尺度特征,而集中于讨论不同曲率匹配因素对钢轨砂带打磨中宏观接

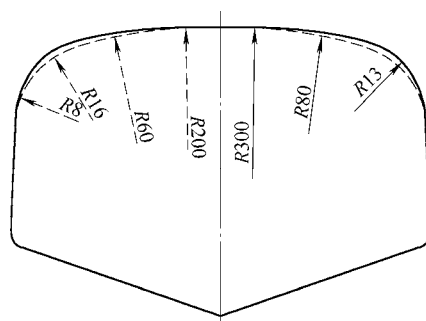


图 2 60 GB(实线)和 60 N(虚线)钢轨廓形(mm)

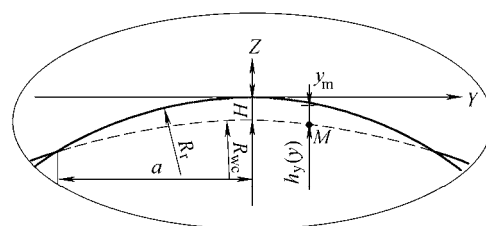
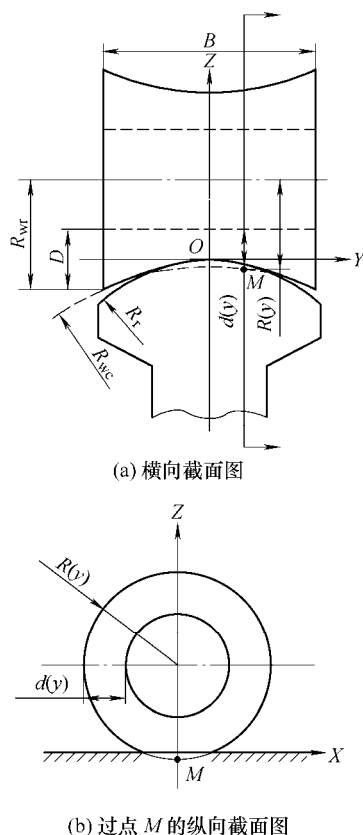
触行为的影响,因此,研究目标便转化为求解内凹型接触轮双曲面与钢轨圆柱面之间的接触问题。

通常,钢轨(材料为 U71Mn)弹性模量为 206 GPa,而接触轮轮毂(材料为铝合金)和橡胶层的弹性模量分别约为 69 GPa 和 7.84 MPa。可以发现,钢轨和接触轮轮毂材料的弹性模量远高于橡胶,相较于橡胶,前面二者便可被视为刚体。因此可假设受力变形主要发生于弹性橡胶层。综上,钢轨砂带打磨宏观接触情况将主要取决于接触轮内凹曲率半径与钢轨廓形曲率半径的几何匹配特性,以及外部接触力对橡胶层变形的影响程度。因此,接触情况可分为  $R_{wc} > R_r$ 、 $R_{wc} < R_r$  且  $F_n < F_0$ 、 $R_{wc} \leq R_r$  且  $F_n \geq F_0$  三类(其中  $R_{wc}$  为接触轮内凹曲率半径,  $R_r$  为钢轨廓形曲率半径,  $F_n$  为接触压力,  $F_0$  为临界接触压力),下面将详细讨论。

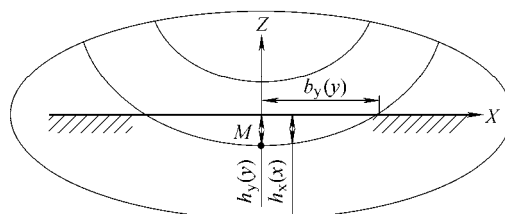
## 2 钢轨砂带打磨宏观接触压力建模

### 2.1 $R_{wc} > R_r$ 情况

如图 3 所示建立直角坐标系,坐标系原点  $O$  位于钢轨廓形曲线中心,  $Y$  轴平行于钢轨横向和接触轮轴线,  $X$  轴平行于钢轨纵向,  $Z$  轴正交于  $X$  轴和  $Y$  轴。图 3a 为接触轮与钢轨廓形接触几何关系沿钢轨横向的截面图,图 3b 为沿钢轨纵向且过点  $M$  的截面图,图 3c 和图 3d 则分别为与上述二者相对应的局部放大图。



(c) 与横截面对应的局部放大图



(d) 与过点  $M$  的纵截面对应的局部放大图

图 3  $R_{wc} > R_r$  接触情况

由图 3a 可见,由于  $R_{wc} > R_r$ , 接触轮与钢轨轨面的接触行为最初仅出现在  $O$  点,并随  $F_n$  的增加而逐步扩展,最终形成一个连续的椭圆接触斑,设长短轴分别为  $2a$ 、 $2b$ 。当接触轮宽度  $B$  和名义半径  $R_{wr}$  已知时,点  $M(0, y)$  处的接触轮半径  $R$  可表示为

$$R(y) = R_{wr} - R_{wc} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{R_{wc}}\right)^2} + \sqrt{R_{wc}^2 - \left(\frac{B}{2}\right)^2} \quad (1)$$

同理,由橡胶层名义厚度  $D$  能计算出点  $M$  处的橡胶厚度  $d$ , 如下

$$d(y) = R(y) - (R_{wr} - D) \quad (2)$$

根据图 3c, 设中心处橡胶层的变形厚度为  $H$ , 则沿  $Y$  方向的橡胶层变形厚度  $h_y$  可表示为

$$h_y(y) = \sqrt{R_r^2 - y^2} - \left[ \sqrt{R_{wc}^2 - y^2} - (R_{wc} - R_r + H) \right] \quad (3)$$

当  $h_y=0$  时,有  $a=y$ , 则  $H$  与  $a$  的关系可表达为

$$H = \sqrt{R_{wc}^2 - a^2} - \sqrt{R_r^2 - a^2} - R_{wc} + R_r \quad 0 \leq a \leq \frac{B}{2} \quad (4)$$

基于式(4)通过描点法对  $H$  函数进行数值拟合,则椭圆接触区的长半主轴可用  $a=mH^n$  描述( $m$  和  $n$  为指数函数拟合参数)。根据  $h_y(y)$ , 接触边界到  $y$  轴的距离  $b_y$  可由式(5)计算

$$b_y(y) = \sqrt{2R(y)h_y(y)} \quad (5)$$

由于边界曲线为轴对称图形,故接触边界  $S$  为

$$S = \begin{cases} \pm b_y(y) & 0 \leq y \leq a \\ \pm b_y(y) & -a \leq y \leq 0 \end{cases} \quad (6)$$

图 4 为由理论模型计算得到的椭圆接触边界曲线和标准椭圆,可以看出模型计算的边界属于标准椭圆范畴。

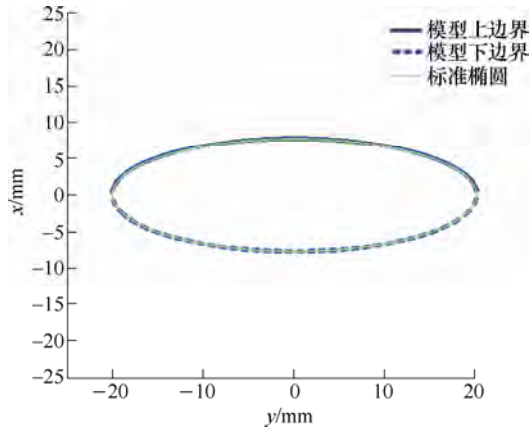


图4 模型获得的接触边界曲线与标准椭圆

( $R_{wc}=300$  mm,  $R_r=80$  mm,  $R_{wr}=90$  mm,  $F_n=200$  N)

进一步, 根据参考文献[35], 沿  $X$  方向的橡胶层变形厚度  $h_x$  可计算如下

$$h_x(x) = h_y(y) - \frac{x^2}{2R(y)} \quad (7)$$

则接触应力可计算为

$$p(x, y) = E^* \frac{h_x(x)}{d(y)} \quad (8)$$

式中,  $E^*$  为橡胶等效弹性模量, 可由弹性模量  $E$  和泊松比  $\nu$  计算为

$$E^* = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (9)$$

因此, 对每个纵截面施加的力为

$$\begin{aligned} dF &= 2 \int_0^{b_y(y)} E^* \frac{h_x(x)}{d(y)} dy dx = \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{E^* R(y)^{\frac{1}{2}} h_y(y)^{\frac{3}{2}}}{d(y)} dy \end{aligned} \quad (10)$$

最终, 总接触压力  $F_n$  可表示为

$$F_n = 2 \int_0^a dF = \frac{8\sqrt{2}}{3} E^* \int_0^a \frac{R(y)^{\frac{1}{2}} h_y(y)^{\frac{3}{2}}}{d(y)} dy \quad (11)$$

式(11)的积分结果包含  $H$ 。因此, 基于式(11)  $H$  与  $F_n$  之间的函数关系亦可进行数值拟合。 $H$  可以表示为  $H=m' \cdot F_n^{n'}$  ( $m'$  和  $n'$  为指数函数拟合参数)。当  $H$  确定后, 接触应力的边界及分布幅值可由式(6)和式(8)确定。

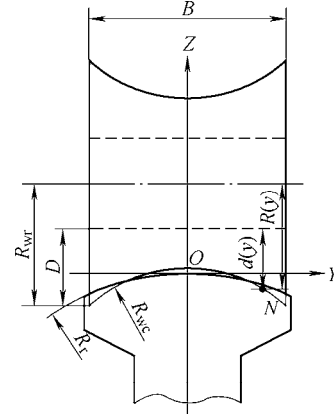
## 2.2 $R_{wc} < R_r$ 且 $F_n < F_0$ 情况

不同于椭圆形接触斑, 当  $R_{wc} < R_r$ , 初始接触点从钢轨廓形曲线中心位置转移到两侧, 如图 5a 所示。由于  $F_n < F_0$ , 接触轮内凹型面与钢轨廓形之间会出现中空地带(间隙), 此时接触区域呈现为左右对称的类三角形接触斑形态。这里, 式(1)、(2)仍分别适用于  $R$  和  $d$  的求解,  $h_y$  的表达式应相应调整为

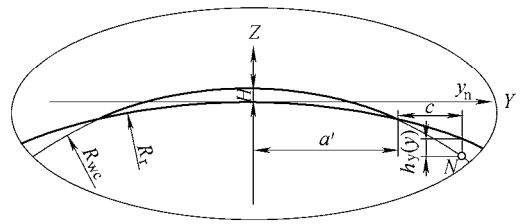
$$\begin{aligned} h_y(y) &= \sqrt{R_{wc}^2 - y^2} - \left[ \sqrt{R_r^2 - y^2} - (R_r - R_{wc} + H) \right] \\ H > 0 \quad a' &\leq y \leq \frac{B}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

令  $a'$  代表双三角接触斑到中心点距离, 当  $h_y=0$  时, 有  $a'=y$ , 则  $H$  与  $a'$  关系可表达为

$$H = \sqrt{R_r^2 - a'^2} - \sqrt{R_{wc}^2 - a'^2} - R_r + R_{wc} \quad 0 \leq a' \leq \frac{B}{2} \quad (13)$$



(a) 横向截面图



(b) 与横截面对应的局部放大图

图5  $R_{wc} < R_r$  且  $F_n < F_0$  接触情况

同样,  $a'$  与  $H$  的函数关系仍可基于式(13)进行数值拟合。对于  $b_y$ 、 $h_x$ 、 $p(x, y)$  和  $dF$  可依次通过式(5)、(7)、(8)和(10)求得。接触边界  $S$  可表达为

$$S = \begin{cases} \pm b_y(y) & a' \leq y \leq \frac{B}{2} \\ \pm b_y(y) & -\frac{B}{2} \leq y \leq -a' \end{cases} \quad (14)$$

图 6 为由理论模型计算得到的接触区域边界曲线, 可以看出其近似于两个三角形,  $b$  为接触斑边界半长,  $c$  为三角形接触斑高。而左右两部分接触区域不连续的根本原因是  $R_{wc}$  过小, 或接触压力太小 ( $F_n < F_0$ ) 以至于橡胶层变形量不足。

总接触压力  $F_n$  可表示为

$$F_n = 2 \int_{a'}^{\frac{B}{2}} dF = \frac{8\sqrt{2}}{3} E^* \int_{a'}^{\frac{B}{2}} \frac{R(y)^{\frac{1}{2}} h_y(y)^{\frac{3}{2}}}{d(y)} dy \quad (15)$$

此外, 接触应力的分布幅值及边界可由式(8)、(14)确定。

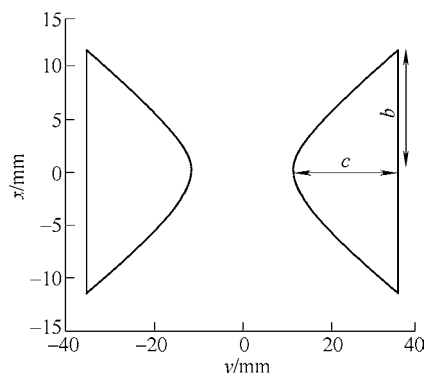


图 6 典型双三角形接触斑边界曲线

( $R_{wc}=300$  mm,  $R_r=500$  mm,  $R_{wr}=90$  mm,  $F_n=280$  N)

### 2.3 $R_{wc} \leq R_r$ 且 $F_n \geq F_0$ 情况

除接触压力外, 其他接触条件与双三角形接触情况相似。随着  $F_n$  不断增加至一个临界值  $F_0$  时, 接触区域的形状从三角形变为马鞍形。这意味着它在点(0,0)处会存在橡胶变形, 如图 7 所示。为得到接触区域边界曲线和应力分布, 将  $h_y$ 、 $S$  和  $F_n$  的表达式相应修改为

$$h_y(y) = \sqrt{R_{wc}^2 - y^2} - \left[ \sqrt{R_r^2 - y^2} - (R_r - R_{wc} + H) \right] \quad (16)$$

$$H < 0 \quad 0 < y \leq \frac{B}{2}$$

$$S = \begin{cases} \pm b_y(y) & 0 \leq y \leq \frac{B}{2} \\ \pm b_y(y) & -\frac{B}{2} \leq y \leq 0 \end{cases} \quad (17)$$

$$F_n = 2 \int_0^{\frac{B}{2}} dF = \frac{8\sqrt{2}}{3} E^* \int_0^{\frac{B}{2}} \frac{R(y)^{\frac{1}{2}} h_y(y)^{\frac{3}{2}}}{d(y)} dy \quad (18)$$

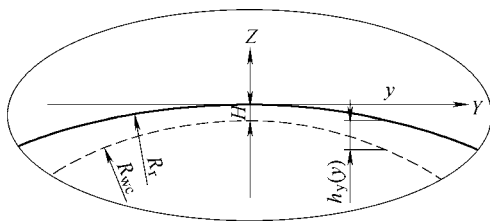
图 7  $R_{wc} < R_r$  且  $F_n \geq F_0$  接触情况横截面局部放大图

图 8 为由理论模型计算得到的接触区域边界曲线

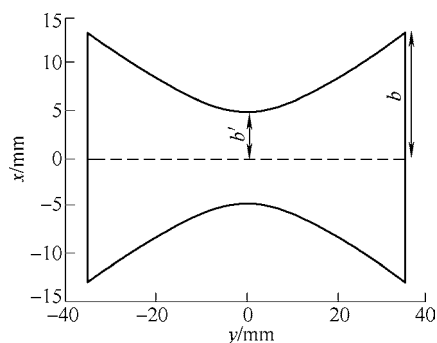


图 8 典型马鞍形接触斑边界曲线

( $R_{wc}=300$  mm,  $R_r=500$  mm,  $R_{wr}=90$  mm,  $F_n=600$  N)

线, 可以看出其近似于马鞍形,  $b'$  为接触斑半腰长。同样, 其接触应力的分布幅值及边界可由式(8)、(17)确定。

## 3 有限元仿真实验

目前, 通过有限元仿真软件分析接触问题已经比较成熟<sup>[36-38]</sup>, 因此本文采用商用 CAE 软件 ABAQUS 对理论模型进行仿真验证。模型中将橡胶层的内表面设置为刚性表面并与参考点 RP 绑定, 可减少轮毂单元数量, 缩短仿真计算时间; 同时钢轨表面被简化为具有不同曲率半径的圆弧面。仿真模型如图 9 所示, 其中网格尺寸为 1 mm, 单元类型为 C3D8R, 接触压力施加在接触轮参考点 RP 处, 橡胶及钢轨材料属性见表 1 所示。

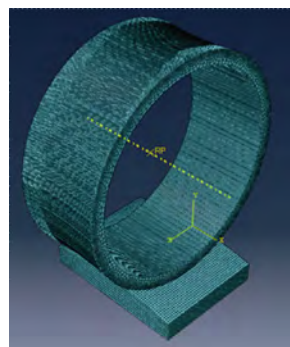


图 9 ABAQUS 有限元仿真模型

表 1 橡胶及钢轨材料属性

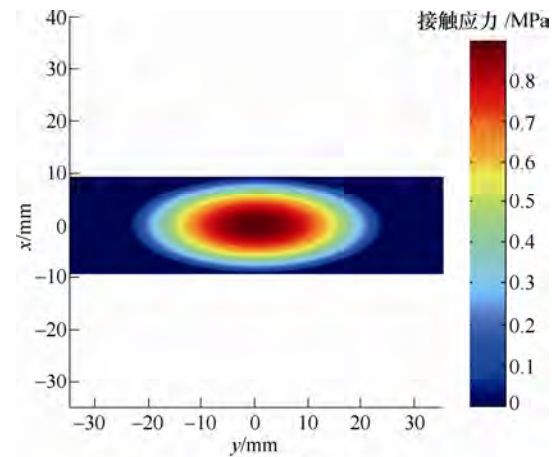
物理特性	橡胶	钢轨
密度/(g · cm <sup>-3</sup> )	1.02	7.85
弹性模量/MPa	7.84	206
泊松比	0.48	0.3

### 3.1 椭圆形接触斑

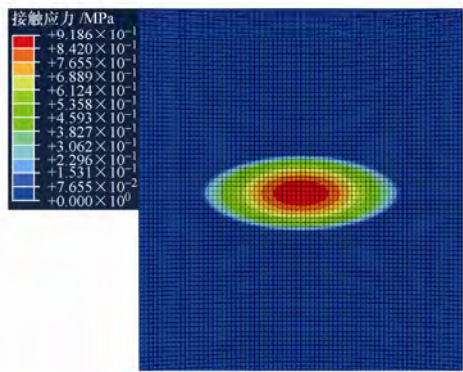
设定仿真条件:  $R_{wc}=300$  mm,  $R_{wr}=90$  mm,  $R_r=200$  mm,  $D=10$  mm,  $B=70$  mm 和  $F_n=0 \sim 300$  N。从图 10a 中可以看出, 理论模型给出了一个典型的椭圆接触区域, 与图 10b 中的有限元仿真结果一致。同时二者均呈现出一个近似半椭球形的接触应力分布, 且最大接触应力位于椭圆中心, 这与赫兹接触理论预测的接触状态相似。

表 2 给出了不同接触压力下椭圆接触区域长半轴  $a$ 、短半轴  $b$ 、最大接触应力  $p_{max}$  和误差  $e$  的计算结果。图 11 为接触斑特征参数曲线图, 结果显示  $a$ 、 $b$ 、 $p_{max}$  均随  $F_n$  的增加而增加, 平均误差分别为 7.26%、4.99% 和 9.65%。然而, 在极小的接触压力  $F_n=27.3$  N 时, 各特征参数的百分比误差均超过了 10%。这说明理论模型在小接触压力下的预测精度存在改进空间, 但由于该条件下的材料去除率过低,





(a) 理论模型



(b) 仿真模型

图 10 椭圆形接触斑对比分析( $F_n=300\text{ N}$ )

表 2 椭圆形接触斑理论与仿真计算结果

总接触 压力 $F_n/\text{N}$	接触区域			误差			接触区域			误差			最大接触 应力 $p_{\max}/\text{MPa}$			误差		
	长半轴 $a/\text{mm}$	短半轴 $b/\text{mm}$	$e$	理论	仿真	(%)	长半轴 $a/\text{mm}$	短半轴 $b/\text{mm}$	$e$	理论	仿真	(%)	理论	仿真	(%)	理论	仿真	(%)
27.3	13	15.1	13.91	5	5.8	13.79	0.33	0.43	23.26									
42	14.5	15.8	8.23	5.6	6.1	8.20	0.39	0.47	17.02									
65	16.2	16.7	2.99	6.2	6.3	1.59	0.44	0.52	15.38									
95	17.8	17.7	0.56	6.8	6.9	1.45	0.5	0.58	13.79									
123	19	18.3	3.83	7.3	7.2	1.39	0.57	0.64	10.94									
155	20.1	19	5.79	7.7	7.4	4.05	0.64	0.69	7.25									
183	21	19.6	7.14	8	7.6	5.26	0.7	0.74	5.41									
213	21.7	20.3	6.90	8.3	8	3.75	0.75	0.79	5.06									
243	22.5	20.5	9.76	8.6	8.2	4.88	0.81	0.84	3.57									
273	23.1	21	10.00	8.9	8.4	5.95	0.86	0.88	2.27									
300	23.7	21.4	10.75	9.1	8.7	4.60	0.9	0.92	2.17									

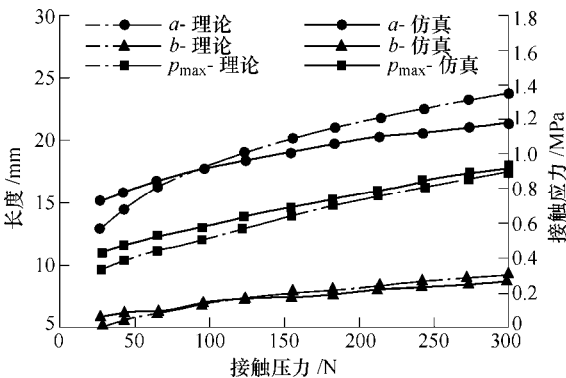
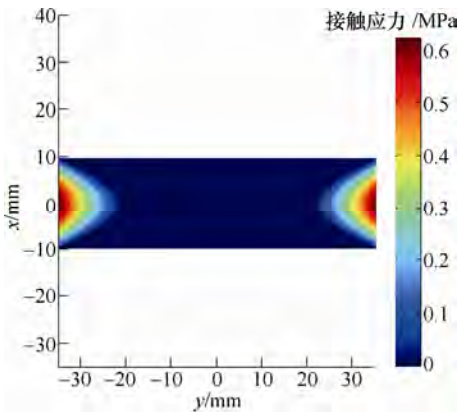


图 11 椭圆形接触斑特征参数曲线对比

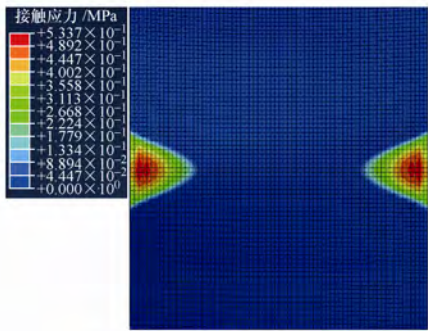
在实际钢轨打磨中并不常用。总体来看，利用理论模型预测椭圆接触边界和接触应力是可行的。

### 3.2 双三角形接触斑

设定仿真条件： $R_{wc}=300\text{ mm}$ ， $R_{wr}=90\text{ mm}$ ， $R_t=500\text{ mm}$ ， $D=10\text{ mm}$ ， $B=70\text{ mm}$ 和 $F_n=0\sim 308\text{ N}$ 。图 12a 为由理论模型获得的双三角形接触斑，其与图 12b 中的有限元仿真结果相一致。然而，对比两图可发现，在左右两侧接触边界附近接触应力分布尚存在一定差异，仿真结果应力值相较于理论模型结果偏小。究其原因可能是在理论模型中未考虑接触轮橡胶层在钢轨横向和纵向的变形，其虽然微小但在实际情况和有限元仿真中是确实存在的。



(a) 理论模型



(b) 仿真模型

图 12 双三角形接触斑对比分析( $F_n=137\text{ N}$ )

表 3 给出了不同接触压力下三角形接触斑高  $c$ 、底边半长  $b$ 、最大接触应力  $p_{\max}$  和误差  $e$  的计算结果。图 13 为特征参数曲线图，结果显示  $c$ 、 $b$ 、 $p_{\max}$

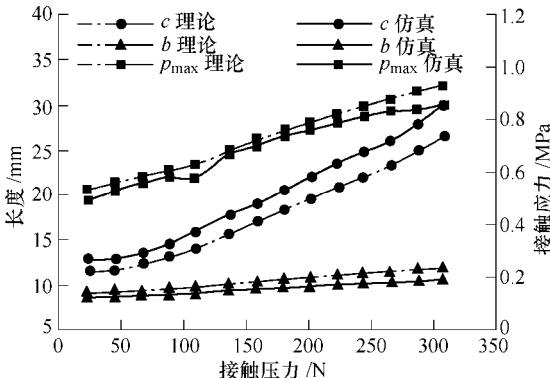


图 13 双三角形接触斑特征参数曲线对比

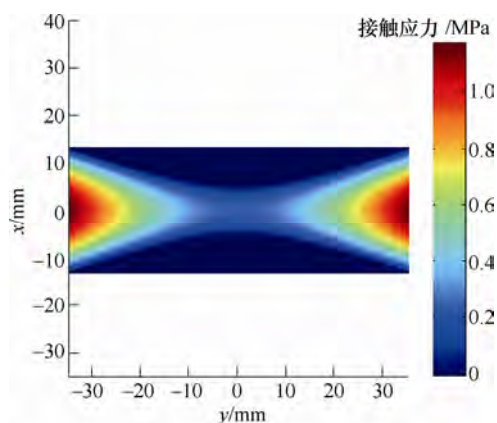
均随  $F_n$  的增加而增大( $b$  变化最不明显), 平均误差分别为 11%、10.02% 和 5.59%, 较好地说明了理论模型的有效性; 同时随着  $F_n$  的增加,  $c$  不断增大直到等于接触轮半宽, 从而将两个分离的三角形接触斑联结为一个整体的马鞍形接触斑。

表 3 双三角形接触斑理论与仿真计算结果

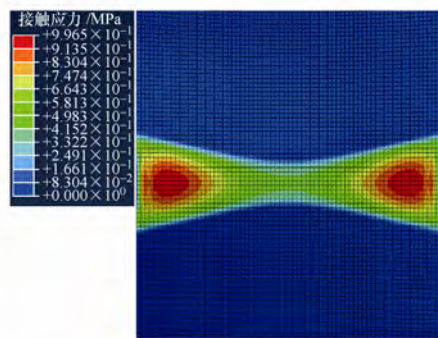
总接触压力	三角形接触斑高 $c/\text{mm}$		误差	底边半长 $b/\text{mm}$		误差	最大接触应力 $p_{\max}/\text{MPa}$		误差
$F_n/\text{N}$	理论	仿真	$e$ (%)	理论	仿真	$e$ (%)	理论	仿真	$e$ (%)
23.5	11.5	12.7	9.45	9.03	8.5	6.24	0.536	0.49	9.39
45	11.7	12.9	9.3	9.21	8.6	6.62	0.56	0.53	5.66
67	12.3	13.5	8.89	9.39	8.8	6.28	0.584	0.56	4.29
88	13.2	14.5	8.97	9.57	8.9	8.64	0.608	0.58	4.83
109	14	15.9	11.95	9.75	9	8.33	0.632	0.58	8.97
137	15.7	17.8	11.80	10.16	9.4	8.09	0.688	0.67	2.69
159	17	19	10.53	10.45	9.5	10.00	0.728	0.7	4.00
180	18.3	20.5	10.73	10.7	9.7	10.31	0.76	0.74	2.70
201	19.49	22	11.41	10.87	9.8	10.92	0.792	0.76	4.21
223	20.79	23.5	11.53	11.08	10.07	10.03	0.824	0.79	4.30
244	22.1	24.8	10.89	11.2	10.1	10.89	0.848	0.81	4.69
265	23.4	26	10.00	11.48	10.2	12.55	0.872	0.83	5.06
287	24.9	28	11.07	11.6	10.4	11.54	0.904	0.84	7.62
308	26.5	30	11.67	11.8	10.6	11.32	0.928	0.86	7.91

### 3.3 马鞍形接触斑

除了  $F_n$  选值外, 该部分仿真条件的设置与上节完全相同。如前所述, 由于接触压力的增加, 双三角形接触斑最终会转变为马鞍状接触斑, 理论计算和仿真结果分别如图 14a、14b 所示。容易看出, 两



(a) 理论模型



(b) 仿真模型

图 14 马鞍形接触斑对比分析( $F_n=653\text{ N}$ )

者在接触斑类型和应力分布上呈现出近乎相同的规律, 但与双三角形接触斑类似, 其应力分布在左右接触边界处仍然存在一定差异。

表 4 给出了不同接触压力下接触斑半腰长  $b'$ 、底边半长  $b$ 、最大接触应力  $p_{\max}$  和误差  $e$  的计算结果。图 15 为马鞍接触斑特征参数曲线图, 结果显示  $b'$ 、 $b$ 、 $p_{\max}$  均随  $F_n$  的增加而增大, 平均误差分别为 6.77%、8.59% 和 12.82%。需要指出的是, 理论模型预测的接触应力误差在  $F_n=368\sim 653\text{ N}$  时接近 20%, 这也是接触斑从双三角形刚刚转化为马鞍形的时刻。除此以外, 该理论模型能够以 10% 以下的误差较好地描述接触斑边界曲线和应力分布。

表 4 马鞍形接触斑理论与仿真计算结果

总接触压力	接触斑半腰长 $b'/\text{mm}$		误差	底边半长 $b/\text{mm}$		误差	最大接触应力 $p_{\max}/\text{MPa}$		误差
$F_n/\text{N}$	理论	仿真	$e$ (%)	理论	仿真	$e$ (%)	理论	仿真	$e$ (%)
368	1.26	1.7	25.88	12.2	11.1	9.91	0.98	0.87	12.64
453	3	3.4	11.76	12.5	11.4	9.65	1.04	0.88	18.18
553	4.3	4.4	2.27	12.9	11.8	9.32	1.11	0.93	19.35
653	5.2	5.4	3.70	13.2	12.3	7.32	1.17	0.99	18.18
753	6	5.9	1.69	13.6	12.5	8.80	1.23	1.14	7.89
853	6.9	6.6	4.55	13.9	13	6.92	1.28	1.16	10.34
953	7.1	6.9	2.90	14.1	13	8.46	1.34	1.23	8.94
1 000	7.3	7.2	1.39	14.3	13.2	8.33	1.36	1.27	7.09

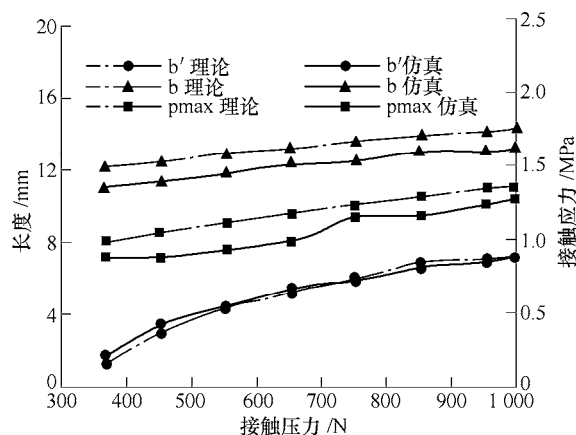


图 15 马鞍形接触斑特征参数曲线对比

## 4 结论

(1) 基于对钢轨砂带打磨的宏观接触分析, 将三维接触问题转化为外包薄层弹性橡胶的圆形刚体与刚性平面之间的二维平面接触问题, 建立了考虑接触轮内凹曲率与钢轨廓形曲率匹配特性的钢轨砂带打磨宏观接触理论模型, 实现了对接触区域边界曲线和应力分布的数值计算。

(2) 仿真和理论计算结果表明, 接触斑形态不再仅仅表现为传统椭圆形, 而是在受接触轮内凹曲率与钢轨廓形曲率匹配因素, 以及接触压力影响下,

表现为椭圆形、双三角形和马鞍形三种; 不同接触条件下的主要参量误差均在钢轨砂带打磨工况可接受范围内, 验证了理论模型的有效性。

### 参 考 文 献

- [1] ERIC E M, JOSEPH K. The application of contact mechanics to rail profile design and rail grinding[J]. *Wear*, 2002, 253(1): 308-316.
- [2] 樊文刚, 刘月明, 李建勇. 高速铁路钢轨打磨技术的发展现状与展望[J]. *机械工程学报*, 2018, 54(22): 184-193.  
FAN Wengang, LIU Yueming, LI Jianyong. Development status and prospect of rail grinding technology for high speed railway[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2018, 54(22): 184-193.
- [3] ZHI S, ZAREMBSKI A M, LI J Y, et al. Towards a better understanding of the rail grinding mechanism[C]//ASME 2013 Rail Transportation Division Fall Technical Conference. Altoona: American Society of Mechanical Engineers, Rail Transportation Division RTD, 2013, 15-17.
- [4] ZAREMBSKI A M. The art and science of rail grinding[M]. Omaha: Simmons-Boardman Books, 2005.
- [5] ZAREMBSKI A M. Grinding as part of rail management strategy[J]. *Railway Track & Structures*, 2008, 104(6): 55-58.
- [6] ZAREMBSKI A M. High-speed rail grinding and metal removal[J]. *Railway Track & Structures*, 2012, 108(6): 44-46.
- [7] ZHI S, LI J, ZAREMBSKI A M. Predictive modeling of the rail grinding process using a distributed cutting grain approach[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part F: Journal of Rail & Rapid Transit*, 2016, 230(6): 1540-1560.
- [8] GU K, LIN Q, WANG W, et al. Analysis on the effects of rotational speed of grinding stone on removal behavior of rail material[J]. *Wear*, 2015, 342-343(3): 52-59.
- [9] SINGLETON R, MARSHALL M B, LEWIS R, et al. Rail grinding for the 21st century—taking a lead from the aerospace industry[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part F: Journal of Rail & Rapid Transit*, 2015, 229(5): 457-465.
- [10] UHLMANN E, LYPOVKA P, HOCHSCHILD L, et al. Influence of rail grinding process parameters on rail surface roughness and surface layer hardness[J]. *Wear*, 2016, 366-367: 287-293.
- [11] 刘真兵. 钢轨铣磨车磨削装置设计及磨削力控制研究[D]. 长沙: 中南大学, 2013.  
LIU Zhenbing. The design of rail milling train grinding equipment and the research of the grinding force control[D]. Changsha: Central South University, 2013.
- [12] 胡军科, 蒋亚军, 方健康, 等. 钢轨铣磨车磨削力的广义预测控制[J]. *中国铁道科学*, 2014, 35(6): 84-90.  
HU Junke, JIANG Yajun, FANG Jiankang, et al. Generalized predictive control of the grinding force of rail milling train[J]. *China Railway Science*, 2014, 35(6): 84-90.
- [13] 占国栋. 钢轨铣磨车铣刀盘设计与优化研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2016.  
ZHAN Guodong. Design and optimization research of the milling cutter for rail milling train[D]. Changsha: Hunan University, 2016.
- [14] 许孝堂, 王衡禹, 吴磊, 等. 水介质对钢轨高速被动式打磨影响的试验研究[J]. *润滑与密封*, 2016, 41(11): 41-44.  
XU Xiaotang, WANG Hengyu, WU Lei, et al. An experimental study on high-speed rail grinding under wet condition[J]. *Lubrication Engineering*, 2016, 41(11): 41-44.
- [15] 许孝堂. 钢轨高速打磨机理研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2016.  
XU Xiaotang. Study on the mechanism of rail high speed grinding[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2016.
- [16] 王荣全. 面向钢轨打磨的砂带磨削过程建模与实验研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2016.  
WANG Rongquan. The modeling and experimental research of belt-grinding process in rail grinding[D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2016.
- [17] HE Z, LI J Y, LIU Y M, et al. Investigating the effects of contact pressure on rail material abrasive belt grinding performance[J]. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2017, 93(1-4): 779-786.
- [18] 王文玺, 李建勇, 樊文刚, 等. 面向钢轨砂带打磨的砂带磨耗过程建模[J]. *西南交通大学学报*, 2017, 52(1): 141-147.  
WANG Wenxi, LI Jianyong, FAN Wengang, et al. Abrasion process modeling of abrasive belt grinding in rail maintenance[J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2017, 52(1), 141-147.
- [19] 王文玺, 李建勇, 樊文刚, 等. 基于赫兹接触的钢轨砂带打磨功率预测模型[J]. *中国铁道科学*, 2017, 38(3): 25-30.  
WANG Wenxi, LI Jianyong, FAN Wengang, et al. Grinding power prediction model for abrasive belt rail grinding based on Hertzian contact[J]. *China Railway Science*, 2017, 38(3): 25-30.
- [20] 樊文刚, 刘月明, 王文玺, 等. 基于弹性赫兹接触的钢



- 轨砂带打磨材料去除建模研究[J]. 机械工程学报, 2018, 54(15): 191-198.
- FAN Wengang, LIU Yueming, Wang Wenxi, et al. Research on modeling method of material removal for rail grinding by abrasive belt based on elastic Hertzian contact[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(15): 191-198.
- [21] 吴昌林, 丁和艳, 陈义. 铝合金车轮 CNC 机械抛光材料去除深度建模方法研究[J]. 中国机械工程, 2009, 20(21): 2558-2562.
- WU Changlin, DING Heyan, CHEN Yi. Research on modeling method of material removal depth in CNC mechanical polishing for aluminum alloy wheel[J]. China Mechanical Engineering, 2009, 20(21): 2558-2562.
- [22] 吴昌林, 丁和艳, 陈义. 材料去除深度与磨粒的关系建模方法研究[J]. 中国机械工程, 2011, 22(3): 300-304.
- WU Changlin, DING Heyan, CHEN Yi. Research on modeling method of relation between abrasive grain and material removal depth[J]. China Mechanical Engineering, 2011, 22(3): 300-304.
- [23] WANG W, LIU F, LIU Z, et al. Prediction of depth of cut for robotic belt grinding[J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2017, 91(1-4): 699-708.
- [24] XIAO G, HUANG Y. Adaptive belt precision grinding for the weak rigidity deformation of blisk leading and trailing edge[J]. Advances in Mechanical Engineering, 2017, 9(10): 1-12.
- [25] WANG Y, HUANG Y, CHEN Y, et al. Model of an abrasive belt grinding surface removal contour and its application[J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2016, 82(9-12): 2113-2122.
- [26] QI J, ZHANG D, LI S, et al. Modeling and prediction of surface roughness in belt polishing based on artificial neural network[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture, 2018, 232(12): 2154-2163.
- [27] LI H, LI X, CHEN Z, et al. The simulation of surface topography generation in multi-pass sanding processes through virtual belt and kinetics model[J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2018, 97(9-12): 2125-2140.
- [28] JOURANI A, HAGEGE B, BOUVIER S, et al. Influence of abrasive grain geometry on friction coefficient and wear rate in belt finishing[J]. Tribology International, 2013, 59: 30-37.
- [29] JOURANI A. Three dimensional modelling of temperature distribution during belt finishing[J]. International Journal of Surface Science and Engineering, 2015, 9(2-3): 231-246.
- [30] JOURANI A, BIGERELLE M, PETIT L, et al. Local coefficient of friction, sub-surface stresses and temperature distribution during sliding contact[J]. International Journal of Materials & Product Technology, 2010, 38(SI): 44-56.
- [31] 樊文刚, 程继发, 吴月峰, 等. 基于内凹型接触轮的钢轨砂带打磨静态接触行为与仿真研究[J]. 机械工程学报, 2018, 54(14): 152-158.
- FAN Wengang, CHENG Jifa, WU Yuefeng, et al. Research on static contact behavior and simulation for rail grinding by abrasive belt based on concave type contact wheel[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(14): 152-158.
- [32] 樊文刚, 程继发, 吕洪宾, 等. 波浪型面钢轨砂带打磨时变接触行为与仿真研究[J]. 机械工程学报, 2018, 54(4): 87-92.
- FAN Wengang, CHENG Jifa, LÜ Hongbin, et al. Research on time-varying contact behavior and simulation for waved rail surface grinding by abrasive belt[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(4): 87-92.
- [33] COSTE C, FALCON E, FAUVE S. Solitary waves in a chain of beads under Hertz contact[J]. Physical Review E, 1997, 56(5): 6104-6117.
- [34] 周清跃, 张银花, 田常海, 等. 60N 钢轨的廓型设计及试验研究[J]. 中国铁道科学, 2014, 35(2): 128-135.
- ZHOU Qingyue, ZHANG Yinhua, TIAN Changhai, et al. Profile design and test study of 60n rail[J]. China Railway Science, 2014, 35(2): 128-135.
- [35] POPOV V L. Contact mechanics and friction[M]. Berlin: Springer Heidelberg, 2010.
- [36] YANG Z, DENG X, LI Z. Numerical modeling of dynamic frictional rolling contact with an explicit finite element method[J]. Tribology International, 2019, 129: 214-231.
- [37] DOLBOW J, MOËS N, BELYTSCHKO T. An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190(51-52): 6825-6846.
- [38] DONAHUE T L H, HULL M L, RASHID M M, et al. A finite element model of the human knee joint for the study of tibio-femoral contact[J]. Journal of Biomechanical Engineering, 2002, 124(3): 273-280.
- 
- 作者简介: 樊文刚, 男, 1985 年出生, 博士, 副教授。主要研究方向为钢轨打磨技术与装备、数字化制造技术与装备。  
E-mail: wgf@bjtu.edu.cn  
王文玺(通信作者), 男, 1990 年出生, 博士研究生。主要研究方向为数字化制造技术与装备、砂带精密磨削技术。  
E-mail: 14116345@bjtu.edu.cn