DOI: 10.3901/JME.2019.24.260

结构失效概率计算的 ASVR-MCS 方法*

史朝印 吕震宙 李璐玮 王燕萍
(西北工业大学航空学院 西安 710072)

摘要: 为高效计算复杂极限状态函数或隐式函数(例如有限元模型)的失效概率,提出了一种支持矢量回归和蒙特卡洛数字模拟相结合的自适应代理模型方法。所提方法在综合考虑支持矢量回归模型的预测误差和预测值的基础上,构建学习函数,利用该学习函数逐步自适应地从蒙特卡罗样本池中筛选出对结构极限状态面拟合影响最大的点,并将其添加至支持矢量回归模型训练样本集,更新代理模型直至满足收敛条件。由于利用学习函数挑选出的训练点相较于样本池中的其他备选点具有更多信息,因此自适应代理模型方法可以提高支持矢量回归模型的构建效率。利用收敛的支持矢量回归模型即可在不需调用功能函数的条件下高效估计结构失效概率。所提方法充分利用了支持向量机在小样本情况下良好的泛化能力、稀疏性、维度无关性以及蒙特卡洛数字模拟法的普遍适用性,并且通过自适应学习策略的构造,极大地提高了支持矢量回归模型在蒙特卡洛样本池中的训练效率和训练精度,四个算例的结果充分证明了所建立的自适应支持矢量回归算法对于非线性问题、高维问题以及实际复杂工程问题均具有高效性和适用性。

关键词: 失效概率; 支持矢量回归; 自适应代理模型; 学习函数; 预测误差

中图分类号: V19; TB114

An Efficient ASVR-MCS Method For Estimating Failure Probability

SHI Zhaoyin LÜ Zhenzhou LI Luyi WANG Yanping

(Institute of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract: For efficiently estimating the failure probability of the time-consuming limit state function, or implicit limit state function (such as finite element model), a new method abbreviated as ASVR-MCS is proposed by combining the adaptive support vector regression (ASVR) with Monte Carlo simulation (MCS). In the proposed ASVR-MCS, the prediction value and its error of the current SVR model are comprehensively accounted to construct a learning function. The constructed learning function is used to adaptively select the training points for updating the SVR until the convergent criterion is satisfied. Since these training points are more informative for improving the precision of SVR approaching the actual limit state surface than other sample points in the MCS sample pool, the adaptive learning strategy improves the efficiency of training the SVR, on which the failure probability can be directly estimated without extra limit state function evaluation. The ASVR-MCS sufficiently aggregates the advantage of the SVR, such as good generalization at small size sample, sparsity, dimensionality independence and the wide applicability of the MCS, and the adaptive learning strategy greatly improves the efficiency and accuracy of training SVR in the MCS sample pool. Four examples show that the proposed ASVR-MCS is efficient and applicable for the failure probability estimation of the nonlinear, high-dimensional and time-demanding complex and engineering problems.

Key words: failure probability; support vector regression; adaptive surrogate model; learning function; prediction error

0 前言

结构失效概率是衡量结构安全程度的重要指标,工程中结构安全分析的关键问题在于高效估算结构的失效概率。对于给定结构,设其功能函数 $Y = g(\mathbf{x})$ 如下所示

$$Y = g(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_d) \quad (1)$$

式中, $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_d\}$ 为 d 维输入变量。结构失效概率 P_f 为 $\mathbf{X}$ 的联合概率密度函数 $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ 在功能函数定义的失效域 $F = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) \leq 0\}$ 上的积分,即,

$$P_f = \int_{\mathbf{x} \in F} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2)$$

引入失效域 F 指示函数 $I_F(\mathbf{x})$ 如下

$$I_F(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in F \\ 0 & \mathbf{x} \notin F \end{cases} \quad (3)$$

* 国家自然科学基金(11902254)和国家重大科技专项(2017-IV-0009-0046)资助项目。20190506 收到初稿, 20190918 收到修改稿

结构失效概率 P_f 可以改写为下式

$$P_f = \int_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d} I_F(\mathbf{x}) f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4)$$

式(4)通常无解析解, 故常采取数字模拟方法进行计算。其中, 蒙特卡洛模拟(Monte carlo simulation, MCS)方法是求解 P_f 的最为简单和常见的一种数字模拟方法。

MCS 方法的核心思想为在数据样本量足够大的情况下, 用样本均值代替总体均值, 即

$$\hat{P}_f = \int_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d} I_F(\mathbf{x}) f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_F(\mathbf{x}_i) \quad (5)$$

式中, $\mathbf{x}_i$ 为按 $f_X(\mathbf{x})$ 抽取的第 i 个样本, N 为样本总数。

MCS 方法操作简单, 在样本量足够的情况下, 精度趋近于真实解; 但实际工程问题中, 结构极限状态函数多为复杂函数, 甚至是隐式函数, 如有限元模型^[1], 每次调用极限状态函数计算样本响应值, 都会带来较大的计算代价, 因此, 如何减少极限状态函数调用次数成为了可靠性分析领域中受到广泛关注的问题。

近些年来, 代理模型方法在可靠性分析领域中得到了广泛的应用, 其核心思想在于构建代理模型来代替原有结构的极限状态函数进行可靠性分析。常用的代理模型方法有 Kriging 模型^[2-5], 多项式混沌展开^[6-11](Polynomial chaos expansion, PCE), 响应面法^[12-13](Response surface method, RSM), 人工神经网络^[14-16](Artificial neural networks, ANN)等。其中, Kriging 模型具有良好的局部特性, 且其不但可以预测样本点响应值, 还可以预测样本点误差, 基于此特性, 学者们提出了许多自适应 Kriging 方法^[17-19]用于结构可靠性分析; 但 Kriging 模型构建较为复杂, 大样本情况下构建 Kriging 模型的计算量非常大, 且对于高维问题, Kriging 模型的拟合效果也欠佳。PCE 模型具有较好的全局特性, 但其存在“维数诅咒”现象, 即随输入变量维数的增加, 模型构建所需计算量显著地增加。为此, 有许多学者提出了相应的稀疏方法, 以克服“维数诅咒”现象。RSM 模型形式简单, 构建方便, 但其在处理复杂极限状态函数时, 精度不高。因此有学者提出了许多改进的 RSM 方法, 如高阶响应面法, 连续插值的高精度响应面法等。

支持向量机^[20](Support vector machine, SVM)是近些年来受到广泛关注的一种机器学习方法, 基于此算法衍生的回归方法^[21](Support vector regression, SVR)具有很多优点, 包括: ①SVR 模型为稀疏模型, 即只有训练样本中的支持矢量对最终所得模型有影

响; 相较于其他代理模型(如 Kriging 模型等), SVR 模型的训练和预测都更加简单高效。②SVR 模型采取结构风险最小化原则, 通过正则化系数对模型经验风险和模型复杂度进行折中, 可以有效地避免过拟合且具有良好的泛化性能。③SVR 模型不存在维数诅咒问题, 对高维问题具有良好的表现。④SVR 模型通过核方法将样本映射至高维特征空间, 对非线性函数的拟合十分优异。

ROCCO 等^[22]首先在可靠性分析领域中使用 SVM 模型, 用于评估网络系统的可靠性。HURTADO^[23]以统计学习理论为基础, 分析了多层前向感知器神经网络(Multi-layer perceptron, MLP)、SVM 等分类模型用于含有隐式极限状态函数的结构可靠性分析问题的可行性, 并确定只有 MLP 和 SVM 模型适合于在小样本情况下的结构可靠性分析。LI 等^[24-26]分别将 SVM 与一次二阶矩(First order and second moment, FOSM)方法相结合, 用于处理边坡和管道可靠性问题。TAN 等^[27]提出了基于径向基函数网(Radial basis neural network, RBFN)和 SVM 的四阶响应面方法。李洪双等^[28]提出了基于 SVM 的 MCS 方法和基于 SVM 的 FOSM 方法, 可用于处理极限状态函数为隐式的情况。BOURINET 等^[29]将子集模拟(Subset simulation, SS)方法与 SVM 相结合, 提出了基于 SVM 的 SS 方法, 又提出了基于 SVR 的可靠性分析方法^[30], 用于处理小失效概率问题。JI 等^[31]使用最小二乘支持向量机(Least-squares support vector machine, LS-SVM)结合 MCS 计算边坡系统的可靠性问题。

然而, 这些方法均采取单步法构建代理模型, 即一次性从输入变量空间中采取代理模型的训练集。直观来说, 随着样本点数目增加, 所构建的代理模型精度会相应的增加, 但有试验证明^[32], 对于低维问题, 当训练点数目达到一定数量时, 继续增加样本点数并不会对所构建代理模型精度带来显著提升。因此, 自适应代理模型方法应运而生。其通过学习函数和停止准则, 自适应地筛选训练样本点, 进而采用多步迭代的策略来大幅提高模型的近似精度。

CHRISTIANINI 等^[33]证明了 SVR 模型任意两个样本点预测值之间的协方差等于它们之间的核函数, XIANG 等^[34]基于此, 提出了 SVR 模型的误差估计公式, 用于计算地铁风阻优化问题。本文基于文献[34]所提误差估计公式, 综合考虑 SVR 的预测值和预测误差构建学习函数, 建立自适应 SVR 模型, 并与 MCS 方法结合, 计算结构失效概率。由于本文采取了自适应代理模型策略, 通过学习函数

筛选对结构极限状态方程影响较为显著的点,因此,相较于传统单步法构建 SVR 模型的策略,所提算法在保证模型代理精度的同时,缩减了模型样本训练集的规模,提高了 SVR 模型的构建效率。同时,由于 SVR 模型的优良泛化性能和维度无关性,所提算法在计算高维问题和非线性问题时,也有较为优异的表现。

1 支持矢量回归

1.1 模型基本理论

支持向量机由 Cortes 和 Vapnik 于 1995 年正式提出,是一种高效的分类模型,Vapnik 于 1998 年将其拓展为回归模型,即支持矢量回归。对于包含 m 个训练样本点的训练集 $\mathbf{x}' = \{\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_m\}^T$ 及对应的响应值集合 $\mathbf{y}' = \{y'_1, y'_2, \dots, y'_m\}^T$, SVR 模型假设

$$f(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) + b \quad (6)$$

式中, $\boldsymbol{\varphi}$ 为特征映射, $\boldsymbol{\omega}$ 为系数矢量, b 为截距。

SVR 模型允许模型输出 $f(\mathbf{x})$ 和真实输出 y 之间存在误差 ε , 可得如下优化模型

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\omega}, b, \xi, \xi^*} \quad & \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\omega}\|^2 + C \sum_{i=1}^m (\xi_i + \xi_i^*) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} f(\mathbf{x}_i) - y_i \leq \varepsilon + \xi_i \\ y_i - f(\mathbf{x}_i) \leq \varepsilon + \xi_i^* \\ \xi_i \geq 0, \xi_i^* \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

式中, C 为正则化参数, ξ_i 及 ξ_i^* 为松弛变量。由拉格朗日乘数法可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^m (\alpha_i^* - \alpha_i) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_i) \\ \text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^m (\alpha_i^* - \alpha_i) = 0 \\ \alpha_i \geq 0, \alpha_i^* \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

式中, α_i 和 α_i^* 为拉格朗日乘子。将式(8)代入式(7)中,得到需满足式(9)KKT 条件的对偶优化问题如式(10)所示。

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha_i (f(\mathbf{x}_i) - y_i - \varepsilon - \xi_i) = 0 \\ \alpha_i^* (y_i - f(\mathbf{x}_i) - \varepsilon - \xi_i^*) = 0 \\ \alpha_i \alpha_i^* = 0, \xi_i \xi_i^* = 0 \\ (C - \alpha_i) \xi_i = 0, (C - \alpha_i^*) \xi_i^* = 0 \end{cases} \quad (9) \\ \max \sum_{i=1}^m y_i (\alpha_i^* - \alpha_i) - \varepsilon (\alpha_i^* + \alpha_i) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\alpha_i^* - \alpha_i) (\alpha_j^* - \alpha_j) \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j \\ \text{s.t.} \quad 0 \leq \alpha_i^*, \alpha_i \leq C \end{aligned} \quad (10)$$

优化求解得到 α_i, α_i^* 和 b 。SVR 的最终表达式为

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m (\alpha_j^* - \alpha_j) k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) + b \quad (11)$$

式中, $k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) = \boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_j)$ 为核函数。

1.2 模型性质及超参数选择

由式(9)和式(11)可知,只有能使 $\alpha_i^* - \alpha_i \neq 0$ 的支持矢量^[20]对模型最终表达式有贡献。因此, SVR 模型具有稀疏性,其表达式可以被改写为

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_v} (\alpha_j^* - \alpha_j) k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) + b \quad (12)$$

式中, $\mathbf{x}_j$ 为支持矢量, N_v 为支持矢量数目。

核函数^[35]避免了对非线性映射 $\boldsymbol{\varphi}$ 的形式和维数估计,直接计算特征空间中样本点的内积 $\boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{x}_i) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_j)$ 。由于映射 $\boldsymbol{\varphi}$ 所对应的高维空间形态对 SVR 模型的性能有决定性的影响,故而,确定核函数形式是构建 SVR 模型十分关键的步骤。常用的核函数有线性核、高斯核、多项式核、正交多项式核和卡方核等等,由于高斯核具有局部特性好、处理非线性能力强和不受输入变量维数影响等特性,本文选择式(13)所示的高斯核作为核函数。

$$k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp\{-\gamma \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2\} \quad (13)$$

式中, γ 为高斯核带宽。

由式(7)和式(13)可知, SVR 模型中存在三个需要在优化求解之前人为确定的超参数,分别是不敏感损失系数 ε , 正则化系数 C 和高斯核带宽 γ 。其中, ε 控制着训练样本点与回归模型之间的误差间隔带宽度,直接决定了支持矢量的数目,即模型的复杂程度; C 代表模型对间隔带外样本误差的惩罚程度; γ 代表了训练样本点在高维特征空间中的区分度。

通常情况下,可以先确定不敏感损失参数 ε , 一般依据经验取值 0.01~0.1; 之后采取折数为 $k = 5 \sim 10$ 的交叉验证法确定 (C, γ) 。本文选择 $k = 5$ 计算交叉验证误差 Err_{scv} 及相应的置信度。

$$Q^2 = 1 - Err_{scv} \cdot \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 / (N-1) \quad (14)$$

式中, $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$ 为样本响应值的均值。

现有的对 SVR 参数 (C, γ) 进行寻优的方法有网格搜寻^[36]、遗传算法^[37]、模拟退火算法^[38]和梯度下降法^[39]等,本文以置信度 $Q^2 \geq Q_c^2$ 作为优化目标,

选择网格搜索方法确定超参数 (C, γ) 。

1.3 SVR 的误差估计

CHRISTIANINI 等证明了 SVR 模型任意两个样本点预测值之间的协方差等于样本点核函数值。

$$\text{Cov}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \quad (15)$$

XIANG 等^[34]在此基础上进行拓展, 认为 SVR 模型训练样本点预测值之间协方差矩阵 Cov 应为训练样本核矩阵 $\mathbf{K}$ 的常数倍, 形式如(16)式所示。

$$\text{Cov} = \sigma^2 \mathbf{K} \quad (16)$$

σ^2 为代求参数, $\mathbf{K}$ 为训练样本集的核函数矩阵

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \cdots & k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_m) \\ k(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) & k(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) & \cdots & k(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_1) & k(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_2) & \cdots & k(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m) \end{pmatrix} \quad (17)$$

之后, 通过最大似然估计, 可得到 SVR 模型在任意点 $\mathbf{x}$ 处的预测误差表达式。

$$s^2(\mathbf{x}) = \tilde{\sigma}^2 [1 - \mathbf{r}(\mathbf{x})^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{x}) + \frac{(1 - \mathbf{r}(\mathbf{x})^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{x}))^2}{\mathbf{I}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{I}}] \quad (18)$$

$$\tilde{\sigma}^2 = (\mathbf{y}' - \mathbf{I}\tilde{\mu})^T \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{y}' - \mathbf{I}\tilde{\mu}) / m \quad (19)$$

$$\tilde{\mu} = \frac{\mathbf{I}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}}{\mathbf{I}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{I}} \quad (20)$$

式中, $\mathbf{f} = (f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2), \dots, f(\mathbf{x}_m))^T$ 为通过 SVR 模型所得训练样本预测值矢量, $\mathbf{I} = (1, 1, \dots, 1)^T$ 为 m 维矢量, $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = [k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1), k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2), \dots, k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_m)]^T$ 为样本点 $\mathbf{x}$ 与训练样本之间的核函数矢量。

注意到, 式(18)中需要求解核矩阵 $\mathbf{K}$ 的逆矩阵, 若 $\mathbf{K}$ 为奇异矩阵, 则其逆矩阵不存在, 因此, 本文采用摩尔彭罗斯广义逆^[40] $\mathbf{K}^+$ 作为 $\mathbf{K}$ 的逆矩阵。其满足如下四个摩尔彭罗斯方程

$$\begin{cases} \mathbf{K}\mathbf{K}^+ \mathbf{K} = \mathbf{K}^+ \\ \mathbf{K}^+ \mathbf{K} \mathbf{K}^+ = \mathbf{K}^+ \\ (\mathbf{K}^+ \mathbf{K})^H = \mathbf{K}^+ \mathbf{K} \\ (\mathbf{K} \mathbf{K}^+)^H = \mathbf{K} \mathbf{K}^+ \end{cases} \quad (21)$$

式中, $(\mathbf{A})^H$ 代表求矩阵 $\mathbf{A}$ 的共轭转置矩阵。当 $\mathbf{K}$ 为非奇异矩阵时, $\mathbf{K}^+ = \mathbf{K}^{-1}$, 广义逆与传统逆矩阵一致。

2 ASVR-MCS 算法

对于失效概率计算问题, 我们并不需要关注 SVR 模型在整个输入变量取值域内的代理精度, 而应重点关注极限状态面 $g(\mathbf{x}) = 0$ 附近的代理精度, 其代理精度直接影响了样本池内样本点响应值符号

的判定, 从而决定了失效概率的计算精度。单步法通过随机抽取样本点组成训练集的方法, 对于失效概率计算问题并不适用, 其会导致大量低贡献样本点进入训练集。因此, 需要采取自适应的方法, 挑选出对模型极限状态方程 $g(\mathbf{x}) = 0$ 的拟合精度贡献最大的样本点, 添加至训练样本点集, 构建 SVR 模型。本节将从学习函数、收敛条件以及算法流程这三个方面介绍本文所提 ASVR-MCS 算法。

2.1 学习函数

构建学习函数的目的是筛选出对极限状态方程拟合影响最大的样本点。训练样本点 $\mathbf{x}$ 越靠近极限状态面 $g(\mathbf{x}) = 0$, 其模型预测值 $f(\mathbf{x})$ 的符号就越可能被错判。同时, 考虑到 SVR 模型的预测误差, 误差 $s^2(\mathbf{x})$ 越大的点, 其预测值 $f(\mathbf{x})$ 偏离真实值 $g(\mathbf{x})$ 的可能性也就越大, 相应地, 出现预测值符号错判的可能性也就越大。将这些样本点添加至训练集, 对模型精度的提升贡献最大。故综上考虑, 构建学习函数

$$L(\mathbf{x}) = |f(\mathbf{x})| / \sqrt{s^2(\mathbf{x})} \quad (22)$$

学习函数 $L(\mathbf{x})$ 值越小的样本点, 其越靠近极限状态面, 预测误差越大, 故建立加点点准则

$$\mathbf{x}_{\text{new}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in U} L(\mathbf{x}) \quad (23)$$

式中, U 为 MCS 样本池。

2.2 收敛准则

失效概率的计算, 关注的是样本点预测值符号的判断, 当更新前后的两个代理模型对样本池中的所有样本点预测值符号判断一致时, 即可认为此时的自适应 SVR 模型达到了收敛。故提出如下判别函数 $\delta(l)$

$$\delta(l) = \sum_{i=1}^N J_l(\mathbf{x}_i) / N \quad (24)$$

式中, l 为当前迭代次数, N 为样本池中的样本总数, $\mathbf{x}_i$ 为样本池中样本, $J_l(\mathbf{x})$ 为如下形式的二值函数。

$$J_l(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & f_{l-1}(\mathbf{x}) f_l(\mathbf{x}) \leq 0 \\ 0 & f_{l-1}(\mathbf{x}) f_l(\mathbf{x}) > 0 \end{cases} \quad (25)$$

式中, $f_{l-1}(\mathbf{x})$ 和 $f_l(\mathbf{x})$ 分别为第 $l-1$ 和 l 次迭代所得代理模型。

通过 $\delta(l)$ 的值, 即可判断更新代理模型对失效概率的计算是否还存在显著影响, 若 $\delta(l)$ 小于等于指定门限值, 即可认为模型已经收敛, 由此, 可建立收敛条件。

$$\delta(l) \leq \delta_c \quad (26)$$

δ_c 为阈值, 考虑到失效概率通常较小, δ_c 建议取值为 $10^{-5} \sim 10^{-4}$ 。

2.3 本文所提算法

本文将所提自适应 SVR 代理模型与 MCS 方法相结合, 用于计算结构失效概率。具体步骤如下。

(1) 抽取 $\mathbf{X}$ 的 MCS 样本池。根据输入随机变量 $\mathbf{X}$ 的概率密度函数 $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ 抽取 N 个样本点组成 MCS 样本池。

(2) 抽取 SVR 模型初始训练点。由于失效概率通常较小, 直接根据 $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ 抽取训练点可能无法得到失效样本点, 这会使模型后续更新过程的效率降低。采取空间随机均匀抽样的方法, 如拉丁超立方抽样, Sobol 序列抽样, Halton 序列抽样等通常可以避免这个问题。本文抽取 n_0 个初始模型训练点, 组成训练集 $T^{(l)}$, 此时, 迭代次数 $l=0$ 。

(3) 根据当前训练样本集 $T^{(l)}$ 建立 SVR 模型。首先确定模型超参数, 本文依据经验选择不敏感损失参数 ε 为 $0.001 \sim 0.1$, 通过网格搜索方法, 优化超参数 (C, γ) , 使 5 折交叉验证置信度 Q^2 满足指定要求: $Q^2 \geq Q_c^2$ 。之后训练得到当前 SVR 模型 $f^{(l)}(\mathbf{x})$ 。

(4) 判断模型是否满足收敛要求。当迭代次数 $l=0$ 时, 执行步骤(6); 若 $l \neq 0$, 计算判别函数 $\delta(l)$, 判断是否满足收敛准则 $\delta(l) \leq \delta_c$, 若满足, 执行步骤(5); 若不满足, 执行步骤(6)。

(5) 计算当前失效概率估计值 $\hat{P}_f^{(l)}$ 和失效概率估计值变异系数 $\text{Cov}[\hat{P}_f^{(l)}]$ 。

$$\hat{P}_f^{(l)} = \sum_{i=1}^N I_F^{(l)}(\mathbf{x}_i) / N \quad (27)$$

$$\text{Cov}[\hat{P}_f^{(l)}] = \sqrt{\frac{1 - \hat{P}_f^{(l)}}{N \hat{P}_f^{(l)}}} \quad (28)$$

$I_F^{(l)}$ 为当前失效域指示函数。失效概率估计值的变异系数代表了计算结果的稳定性, 给定变异系数阈值 ε^* , 若 $\text{Cov}[\hat{P}_f^{(l)}] \leq \varepsilon^*$, 则可认为计算得到了稳定的收敛解, 得到最终结果。

$$\hat{P}_f = \hat{P}_f^{(l)} \quad (29)$$

$$\text{Cov}[\hat{P}_f] = \text{Cov}[\hat{P}_f^{(l)}] \quad (30)$$

计算结束; 若 $\text{Cov}[\hat{P}_f^{(l)}] > \varepsilon^*$, 则表明现有样本池规模不足, 扩大样本池容量, $N = 10N$, 执行步骤(1)。

(6) 更新模型训练集。迭代次数增加一次, $l = l + 1$, 计算样本池中所有样本的学习函数值 $L(\mathbf{x})$, 根据式(23)筛选新样本点, 添加至训练集, 得到更新训练集 $T^{(l)}$, 执行步骤(3)。

图 1 给出算法流程图。

图 1 ASVR-MCS 算法流程图

3 算例分析

本文通过建立自适应 SVR 模型并将其与 MCS 方法相结合, 计算结构失效概率。相较于其他常用代理模型, SVR 模型的稀疏性, 结构风险最小化准则以及高泛化性使其在失效概率计算中更具优势。本文将给出四个算例, 分别为数值算例, 非线性算例, 工程算例和高维算例, 证明所提算法的高效性与广泛适用性。

3.1 算例一

算例一为二维输入变量条件下的四个失效模式组成的串联系统的失效概率计算, 系统的极限状态函数如下所示。

$$g(\mathbf{X}) = \min \begin{cases} 3 + (X_1 - X_2)^2 / 10 - (X_1 + X_2) / \sqrt{2} \\ 3 + (X_1 - X_2)^2 / 10 + (X_1 + X_2) / \sqrt{2} \\ (X_1 - X_2) + 7 / \sqrt{2} \\ -(X_1 - X_2) + 7 / \sqrt{2} \end{cases} \quad (31)$$

式中, 随机变量 X_1 和 X_2 相互独立, 且均服从标准正态分布。

表 1 给出了算例一的计算结果, 作为比较, 本文选择了 ECHARD 等^[2]所提 U 函数自适应 Kriging 模型方法 AK-MCS; STEFANO 等^[10]所提自适应 PCE 模型方法 APCE-MCS; PAN 等^[41]所提自适应 SVM 模型方法 ASVM-MCS; 同时采用 MCS 作为参照方法。其中, N_{call} 代表了极限状态函数总调用次数, e_p 代表计算误差, 本文选择蒙特卡洛样本池规模为 $N = 5 \times 10^5$, 初始训练点数 $n_0 = 15$, 不敏感

损失参数 ε 设置为 0.1, $\delta_c = 5 \times 10^{-5}$, $\varepsilon^* = 3.5\%$ 。

表 1 算例一的计算结果

方法	N_{call}	$\hat{P}_f (10^{-3})$	$\text{Cov}[\hat{P}_f] (\%)$	e_{pf}
MCS	5×10^5	2.21	3.00	-
ASVR-MCS	48	2.21	3.00	0.00
AK-MCS	99	2.21	3.00	0.00
APCE-MCS	143	2.20	3.00	0.00
ASVM-MCS	110	2.20	3.00	0.00

图 2 ASVR-MCS 方法极限状态面及训练点

图 3 ASVM-MCS 方法极限状态面及训练点

由表 1 所示计算结果可看出, 虽然四种自适应代理模型方法都准确地计算出了串联系统的失效概率, 但本文所提 ASVR-MCS 所用训练点数少于其他自适应代理模型方法。PCE 模型的全局特性良好, 但对于非线性较高的局部拟合效果较差。Kriging 模型虽然与 SVR 模型采取相同的高斯核函数, 但 SVR 模型的结构风险最小化准则增强了模型的鲁棒性, 避免了对训练样本的过拟合, 表现出了更强的泛化性能。SVM 模型结构与 SVR 模型类似, 但 ASVM-MCS 方法的学习函数只考虑了样本到 SVM 代理极限状态面的距离和样本到训练样本的距离, 而本文所提学习函数同时考虑了样本预测值和预测误差, 筛选训练样本点更具有高效性。图 2 和图 3 分别给出了 ASVR-MCS 方法和 ASVM-MCS 方法的训练样

本点, 通过对比可看出, 通过本文所提学习函数筛选出的训练样本点绝大多数位于失效边界附近, 而 ASVM-MCS 方法所筛选出的训练样本点有一部分远离失效边界, 这部分训练样本点对模型的构建并无显著影响。

3.2 算例二

算例二为一非线性无阻尼单自由度弹簧振子模型, 其结构示意图如图 4 所示, 极限状态函数为

$$g = 3r - |Z_{\max}| = 3r - \left| \frac{2F_1}{m\omega_0^2} \sin\left(\frac{\omega_0 t_1}{2}\right) \right| \quad (32)$$

式中, $\omega_0 = \sqrt{(c_1 + c_2)/m}$ 。此算例包含六维独立随机输入变量, 均为正态变量, 具体分布参数如表 2 所示。表 3 中给出了算例二使用各种方法的计算结果。针对此算例, 本文选择蒙特卡洛样本池规模为 $N = 10^5$, 初始训练点数 $n_0 = 10$, 不敏感损失参数 ε 设置为 0.1, $\delta_c = 5 \times 10^{-4}$, $\varepsilon^* = 3\%$ 。

图 4 单自由度无阻尼振子模型

表 2 算例二输入随机变量分布参数

随机变量	分布类型	均值	标准差
质量 m	正态分布	1	0.05
刚度系数 1 c_1	正态分布	1	0.1
刚度系数 2 c_2	正态分布	0.1	0.01
屈服位移 r	正态分布	0.5	0.05
激振力 F_1	正态分布	1	0.2
时间 t_1	正态分布	1	0.2

通过表 3 可以看出, 几种自适应代理模型方法都可以较为准确地计算出结构失效概率, 但本文所提算法所用样本点数依然少于其他方法。本算例维数较高, 且非线性程度较算例一有所加大, 也充分体现了 SVR 模型对高维非线性问题的适用性。

表 3 算例二的计算结果

方法	N_{call}	$\hat{P}_f (10^{-3})$	$\text{Cov}[\hat{P}_f] (\%)$	e_{pf}
MCS	10^5	2.90	1.83	—
ASVR-MCS	82	2.88	1.83	0.68
AK-MCS	97	2.91	1.82	0.34
APCE-MCS	130	2.92	1.82	0.68
ASVM-MCS	106	2.86	1.84	1.38

3.3 算例三

为了检验本文所提算法对实际工程问题的效果,考虑一个二维桁架结构,其结构示意图如图 5 所示。该桁架结构拥有 23 根杆,13 个节点,几何形状确定,但材料属性和载荷具有随机不确定性。输入随机变量共有 10 维, $\mathbf{X}=[A_1, A_2, E_1, E_2, P_1, P_2, \dots, P_6]^T$, 其中, $[A_1, E_1]^T$ 为横杆的横截面积和弹性模量, $[A_2, E_2]^T$ 为斜杆的横截面积和弹性模量, $[P_1, P_2, \dots, P_6]^T$ 为节点载荷。横杆和斜杆采用同一材料,但将其弹性模量视为两个独立的随机变量。所有输入变量均相互独立,表 4 给出了它们的具体分布形式和参数。结构极限状态函数为

$$g(\mathbf{X}) = \tau - u(\mathbf{X}) \quad (33)$$

式中, $u(\mathbf{X})$ 为桁架中点位移, 阈值 $\tau = 12 \text{ cm}$, 结构失效域为 $F = \{\mathbf{X} | g(\mathbf{X}) \leq 0\}$, 由于此算例结构较为复杂,无法得到结构中点位移解析表达式,直接采用有限元仿真计算 $u(\mathbf{X})$ 。注意到,此算例虽采用有限元方法进行计算,但模型简单,计算迅速,故仍然可以使用 MCS 方法作为参照解。选择 MCS 样本池规模 $N = 10^6$, 初始样本点数目 $n_0 = 30$, 不敏感损失参数 $\varepsilon = 0.1$, $\delta_\varepsilon = 5 \times 10^{-5}$, $\varepsilon^* = 3\%$ 。表 5 给出了计算结果。

图 5 桁架结构示意图

从表 5 所示结果可以看出,四种代理模型方法依旧都可以较为准确地计算出结构失效概率,但本文所提算法所用样本点仅仅多于 APCE-MCS 方法,少于 AK-MCS 方法和 ASVM-MCS 方法,体现了 ASVR-MCS 算法对于实际工程问题的高效性。

表 4 算例三输入随机变量分布参数

随机变量	分布类型	均值	标准差
$E_1, E_2 (\text{Pa})$	对数正态	2.1×10^{11}	2.1×10^{10}
$A_1 (\text{m}^2)$	对数正态	2×10^{-3}	2×10^{-4}
$A_2 (\text{m}^2)$	对数正态	1×10^{-3}	1×10^{-4}
$P_1, P_2, \dots, P_6 (\text{N})$	耿贝尔	5×10^4	7.5×10^3

桁架结构的载荷服从耿贝尔分布,此分布在可靠性分析领域中并不常见,对其做简单介绍。耿贝尔分布也称一型极值分布。其概率密度函数为

$$f_X(x) = \exp\{-\exp[-(x - \mu) / \beta]\} \quad (34)$$

式中, μ 为分布的位置系数, β 为分布的尺度系数。分布均值为

$$E(X) = \mu + \gamma\beta \quad (35)$$

式中, $\gamma \approx 0.5772$, 为 Euler-Mascheroni 常数。分布方差为

$$\text{Var}(X) = \frac{\pi^2 \beta^2}{6} \quad (36)$$

表 5 算例三的计算结果

方法	N_{call}	$\hat{P}_f (10^{-3})$	$\text{Cov}[\hat{P}_f] (\%)$	e_{η_f}
MCS	10^6	1.52	2.56	—
ASVR-MCS	257	1.49	2.59	1.97
AK-MCS	300	1.55	2.54	1.97
APCE-MCS	141	1.50	2.58	1.31
ASVM-MCS	356	1.55	2.54	1.97

3.4 算例四

高维问题由于“维数诅咒”现象的存在,成为了代理模型方法研究领域内一个极具挑战性的问题。为了验证本文所提算法对高维问题的适用性,考虑一个数值算例问题^[42],其极限状态函数为

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = n + 3\sigma\sqrt{n} - \sum_{i=1}^n X_i \quad (37)$$

式中, n 为输入变量维数, X_i 相互独立,均为对数正态分布,均值为 $\mu_{X_i} = 0$, 标准差为 $\sigma_{X_i} = 0.2$ 。此算例具有解析解,根据中心极限定理,当 $n \rightarrow \infty$ 时,可解析计算 $P_f \rightarrow 1.35 \times 10^{-3}$ 。本文选择 $n = 40$ 进行计算。选择 MCS 样本池规模 $N = 10^6$, 初始样本点数目 $n_0 = 30$, 不敏感损失参数 $\varepsilon = 0.1$, $\delta_\varepsilon = 5 \times 10^{-5}$, $\varepsilon^* = 3\%$ 。表 6 给出了计算结果。

对于 40 维问题,仅仅采用 5 阶多项式截断的

$$\text{PCE 模型所需基函数个数} P = \binom{5+40}{5} = \frac{45!}{40!5!} \approx$$

1.2×10^6 , 计算代价非常高。对于 Kriging 模型,其相关函数表达式虽然与 SVR 模型高斯核函数相似,但其含有 40 个待求超参数,计算代价非常巨大。表 6 可以看出, SVM 与 SVR 模型是常用代理模型中能较好处理高维问题的模型,在变量维数到达 40 维时,依旧可以较为准确地计算出失效概率。就计算效率而言, ASVR-MCS 方法所需样本点依旧少于 ASVM-MCS 方法,这是由于本文所提学习函数更为高效。在计算精度方面,虽然两种方法都得到了满足精度要求的解,但 ASVM-MCS 方法表现还是更优一些。二者在处理高维问题上均具有适用性。

表 6 算例四的计算结果

方法	N_{call}	$\hat{P}_f (10^{-3})$	$\text{Cov}[\hat{P}_f] (\%)$	e_{η_f}
MCS	10^6	1.82	2.34	—
ASVR-MCS	213	1.76	2.38	3.30
ASVM-MCS	341	1.78	2.37	2.20

3.5 讨论及说明

采用的四个算例分别为串联系统算例、无阻尼单自由度弹簧阵子算例、有限元桁架算例和高维算例。其中有限元桁架算例由于不能通过结构力学求解结构所关注节点位移和输入变量之间的解析表达式, 故为隐式算例。三个数值算例中, 单自由度无阻尼弹簧阵子模型的功能函数输入变量为 6 维, 且表达式较为复杂。通过算例对比, 可以看出 ASVR-MCS 方法在针对数值问题、高维问题、复杂功能函数问题和隐式有限元模型问题时均具有较好的表现。

4 结论

(1) 提出了一种求解结构失效概率的自适应 SVR 模型方法, 综合考虑 SVR 模型的预测值和预测误差建立学习函数, 逐步地将对结构极限状态方程贡献最大的样本点添加至训练集, 更新 SVR 模型, 当 SVR 模型满足收敛条件后, 结合 MCS 方法进行失效概率计算。

(2) 使用高斯核作为 SVR 模型核函数。SVR 采用结构风险最小化原理, 使用正则化系数 C 对模型经验风险和模型复杂度进行折中, 从而避免了过拟合, 使得模型在小样本情况下具有依然具有较高的泛化性能。核方法使 SVR 模型可以更好地处理非线性问题, 高斯核函数所对应的特征空间具有无穷维, 理论上可以近似任意高度非线性的函数。

(3) 采用四个算例对所提算法进行验证, 并与自适应 Kriging 模型, PCE 模型, SVM 模型进行对比。通过算例对比结果可以看出, 对于高维问题, 只有自适应 SVM 方法和自适应 SVR 方法可以解决; 对于高非线性问题, ASVR-MCS 算法依旧具有最高的效率; 对于实际工程问题, ASVR-MCS 方法也能较好地解决。通过与同结构 SVM 模型的对比可以看出, ASVR-MCS 算法所用样本点数总是少于 ASVM-MCS 算法, 这也充分说明了所提学习函数的合理性。

参 考 文 献

- [1] BRENNER S C, SCOTT L R. The mathematical theory of finite element methods[J]. Texts in Applied Mathematics, 2002, 3(298): 263-291.
- [2] ECHARD B, GAYTON N, LEMAIRE M. AK-MCS: An active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo Simulation[J]. Structural Safety, 2011, 33(2): 145-154.
- [3] DUBOURG V, SUDRET B, DEHEEGER F. Metamodel-based importance sampling for structural reliability analysis[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2013, 33(1): 47-57.
- [4] CADINI F, SANTOS F, ZIO E. Passive systems failure probability estimation by the meta-AK-IS 2 algorithm[J]. Nuclear Engineering & Design, 2014, 277(1): 203-211.
- [5] CADINI F, SANTOS F, ZIO E. An improved adaptive kriging-based importance technique for sampling multiple failure regions of low probability[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2014, 131(3): 109-117.
- [6] XIU D, KARNIADAKIS G E. The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations[J]. SIAM journal on scientific computing, 2002, 24(2): 619-644.
- [7] WAN X, KARNIADAKIS G E. An adaptive multi-element generalized polynomial chaos method for stochastic differential equations[J]. Journal of Computational Physics, 2005, 209(2): 617-642.
- [8] HU C, YOUN B D. Adaptive-sparse polynomial chaos expansion for reliability analysis and design of complex engineering systems[J]. Structural & Multidisciplinary Optimization, 2011, 43(3): 419-442.
- [9] SUDRET B. Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2008, 93(7): 964-979.
- [10] STEFANO M, BRUNO S. An active-learning algorithm that combines sparse polynomial chaos expansions and bootstrap for structural reliability analysis[J]. Structural Safety, 2018, 75: 67-74.
- [11] BLATMAN G, SUDRET B. Sparse polynomial chaos expansions and adaptive stochastic finite elements using a regression approach[J]. Comptes Rendus Mécanique, 2008, 336(6): 518-523.
- [12] KIM S H, NA S W. Response surface method using vector projected sampling points[J]. Structural Safety, 1997, 19(1): 3-19.
- [13] KAYMAZ I, MCMAHON C A. A response surface method based on weighted regression for structural reliability analysis[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2005, 20(1): 11-17.
- [14] PAPADOPOULOS V, GIOVANIS D G, LAGAROS N D, et al. Accelerated subset simulation with neural networks for reliability analysis[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2012, 223-224(none): 70-80.
- [15] CHENG J, LI Q S, XIAO R C. A new artificial neural network-based response surface method for structural reliability analysis[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2008, 23(1): 51-63.
- [16] DENG J. Structural reliability analysis for implicit performance function using radial basis function network[J]. International Journal of Solids and Structures, 2006, 43(11-12): 3255-3291.

- [17] BICHON B J, ELDRED M S, SWILER L P, et al. Efficient global reliability analysis for non-linear implicit performance functions[J]. AIAA, 2008, 46: 2459-2468.
- [18] LV Z Y, LU Z Z, WANG P. A new learning function for Kriging and its application to solve reliability problems in engineering[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2015, 70: 1182 - 1197.
- [19] SUN Z L, WANG J, LI R, et al. LIF: a new kriging based learning function and its application to structural reliability analysis[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2017, 157: 152 - 65.
- [20] CORTES C, VAPNIK V. Support-vector networks[J]. Machine Learning, 1995, 20(3): 273-297.
- [21] BURGESS C. A Tutorial on support vector machines for pattern recognition[J]. Data Mining and Knowledge Discovery, 1998, 2(2): 121-167.
- [22] ROCCO C M, JOSÉ A M. Fast monte carlo reliability evaluation using support vector machine[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2002, 76(3): 237-243.
- [23] HURTADO J E. An examination of methods for approximating implicit limit state functions from the viewpoint of statistical learning theory[J]. Structural Safety, 2004, 26(3): 271-293.
- [24] LI X, LI X, SU Y. A hybrid approach combining uniform design and support vector machine to probabilistic tunnel stability assessment[J]. Structural Safety, 2016, 61: 22-42.
- [25] ZHAO H B. Slope reliability analysis using a support vector machine[J]. Computers & Geotechnics, 2008, 35(3): 459-467.
- [26] ZHAO H B, RU Z, CHANG X, et al. Reliability analysis of tunnel using least square support vector machine[J]. Tunnelling & Underground Space Technology Incorporating Trenchless Technology Research, 2014, 41: 14-23.
- [27] TAN X H, BI W H, HOU X L, et al. Reliability analysis using radial basis function networks and support vector machines[J]. Computers and Geotechnics, 2011, 38(2): 178-186.
- [28] 李洪双, 吕震宙, 岳珠峰. 结构可靠性分析的支持向量机方法[J]. 应用数学和力学, 2006, 10: 1135-1143.
LI Hongshuang, LÜ Zhengzhou, YUE Zhufeng. Support Vector Machine for Structural Reliability Analysis. Applied Mathematics and Mechanics[J]. 2006, 10: 1135-1143
- [29] BOURINET J M, DEHEEGER F, LEMAIRE M. Assessing small failure probabilities by combined subset simulation and support vector machines[J]. Structural Safety, 2011, 33(6): 343-353.
- [30] BOURINET J M. Rare-event probability estimation with adaptive support vector regression surrogates[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2016, 150: 210-221.
- [31] JI J, ZHANG C, GUI Y, LV Q, et al. New observations on the application of LS-SVM in slope system reliability analysis[J]. Journal of Computing in Civil Engineering, 2016, 6(1): 02-06.
- [32] JIN R, CHEN W, SIMPSON T W. Comparative studies of metamodeling techniques under multiple modelling criteria[J]. Structural & Multidisciplinary Optimization, 2001, 23(1): 1-13.
- [33] ANDREW A M. An introduction to support vector machines and other kernel - based learning methods[M]. London: United Kingdom at the Cambridge University Press, 2000.
- [34] XIANG H, LI Y, LIAO H, et al. An adaptive surrogate model based on support vector regression and its application to the optimization of railway wind barriers[J]. Structural & Multidisciplinary Optimization, 2017, 55(2): 1-13.
- [35] WORTON B J. Kernel methods for estimating the utilization distribution in home-range studies[J]. Ecology, 1989, 70(1): 164-168.
- [36] FRIEDRICH S, IGEL C. Evolutionary tuning of multiple SVM parameters[J]. Neurocomputing, 2005, 64(1): 107-117.
- [37] DEB K, PRATAP A, AGARWAL S, et al. A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6(2): 182-197.
- [38] HWANG C R. Simulated annealing: Theory and applications[J]. Acta Applicandae Mathematica, 1988, 12(1): 108-111.
- [39] FRIEDMAN J H. Greedy function approximation: A gradient boosting machine[J]. Annals of Statistics, 2001, 29(5): 1189-1232.
- [40] CARLSON D, HAYNSWORTH E, MARKHAM T. A generalization of the schur complement by means of the moore-penrose inverse[J]. Siam Journal on Applied Mathematics, 1974, 26(1): 169-175.
- [41] PAN Q, DIAS D. An efficient reliability method combining adaptive support vector machine and monte carlo simulation[J]. Structural Safety, 2017, 67: 85-95.

作者简介: 史朝印, 男, 1995 年出生, 硕士研究生。主要研究方向为结构可靠性分析与设计。

E-mail: shizhaoyin@mail.nwpu.edu.cn

吕震宙(通信作者), 女, 1966 年出生, 博士研究生, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为飞行器总体设计、飞行器结构设计、飞行器可靠性工程、安全工程。

E-mail: zhenzhoulu@nwpu.edu.cn

李璐玮, 女, 博士, 副教授, 硕士研究生导师。主要研究方向为飞行器可靠性工程、安全工程。

E-mail: luyili@nwpu.edu.cn

王燕萍, 女, 博士, 讲师, 硕士研究生导师。主要研究方向为飞行器可靠性工程、安全工程。

E-mail: yanpingwang@nwpu.edu.cn