DOI : 10.3901/JME.2019.19.174

涉及空腔制造的最小长度尺寸限制的清晰结构 拓扑优化设计*

荣见华^{1,2} 赵圣佺^{1,2} 李方义^{1,2} 俞燎宏³ 荣轩霁⁴ 陈成^{1,2}

(1. 长沙理工大学汽车与机械工程学院 长沙 410076;

2. 长沙理工大学工程车辆轻量化与可靠性技术湖南省高校重点实验室 长沙 410114;

3. 宜春学院物理科学与工程技术学院 宜春 336000;

4. 湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室 长沙 410082)

摘要: 针对以结构柔顺度最小为目标函数, 涉及空腔制造的最小长度尺寸限制的结构拓扑优化设计问题, 提出了一种新的拓扑优化求解方法。首先, 为了消除现有的结构实体相及空洞相的相同的光滑 Heaviside 映射导致的强烈对立矛盾, 引入光滑 Heaviside 映射和修改的光滑 Heaviside 映射分别进行实体相及空洞相的设计变量过滤; 而后, 构建了合理和协同的涉及实体相和空洞相的几何最小长度尺寸限制的结构拓扑优化模型; 利用 MMA 算法, 形成了一种新的涉及实体相和空洞相的几何最小长度尺寸限制的结构拓扑优化算法。给出的算例结果表明, 与现有方法比, 该方法可解决结构实体相和空洞相的几何最小长度尺寸控制问题。且所提方法可获得清晰 0/1 分布的优化结构拓扑。

关键词: 结构拓扑优化; 最小长度尺寸; 可制造性; 滤波器; Heaviside 映射

中图分类号: TH122

Clear Structural Topology Optimization Designs Including Minimum Allowable Length Scale Limit on Fabrication Holes

RONG Jianhua^{1,2} ZHAO Shengning^{1,2} LI Fangyi^{1,2} YU Liaohong³
RONG Xuanpei⁴ CHEN Cheng^{1,2}

(1. School of Automotive and Mechanical Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410076;

2. Key Laboratory of Lightweight and Reliability Technology for Engineering Vehicle of Hunan Province, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114;

3. School of Physical Science and Technology, Yichun University, Yichun 336000;

4. State Key Laboratory of Advanced Design and Manufacturing for Vehicle Body, Hunan University, Changsha 410082)

Abstract : For the problem of structural topology compliance minimization with a minimum allowable length scale limit on fabrication holes (void phase), a new topology optimization method of continuum structures with a volume constraint is proposed. Firstly, in order to destroy strong antagonistic contradictions brought by two same smooth Heaviside projections of the solid phase and void phase, a smooth Heaviside projection and a modified smooth Heaviside projection are introduced to make design variable filtering of the solid phase and void phase, respectively. Hence, a reasonable and coordinating structural topology optimization model with the minimum allowable length scale limits on fabrication holes and solid material, is constructed; Being integrated with the MMA algorithm, a new structural topology optimization procedure, dealing with the minimum allowable length scale limits on fabrication holes and solid material, is proposed. It is concluded from given examples that the proposed method can solve the problem of structural topology compliance minimization with the minimum allowable length scale limits on fabrication holes and solid

* 国家自然科学基金(11772070) \ 湖南省自然科学基金(2019JJ40296) \ 江西省教育厅科技项目(GJJ170893)和湖南省教育厅科研项目(17C0044)资助项目。20181119 收到初稿, 20190604 收到修改稿

material, and may obtain an optimal topology with more clear 0/1 distribution than the existed methods.

Key words : structural topology optimization ; minimum length scale ; manufacturability ; filters ; Heaviside projection

0 前言

采用拓扑优化可以求得复杂构型的结构。但该复杂构型结构常作为概念设计结构,具有差的实际可制造性,并需要后续修改。这些修改降低了优化结构性能,且许多情况下可能消除了该解的最优性,并使得一些约束不满足。这些问题促使许多学者为特定的制造过程寻求量身定做的优化结构。智能制造约束主要包含长度尺寸要求和可制造性要求。GUEST 等、SVANBERG 等和 SIGMUND 等基于 SIMP 法分别采用线性平均过滤器、几何平均过滤器、调和平均过滤器和均匀化过滤器等,研究了包含最小长度尺寸、最大外伸角控制和几何不确定性(含边界和制造最小尺寸误差)等约束的结构柔顺度最小的拓扑优化问题^[1-3]。另外,郭旭团队^[4-5]分别基于 SIMP 建模和水平集建模,及结合结构骨架思路,发展了两种显式长度控制优化法;魏鹏等提出了结构连接的刚度扩散方法^[6]。对于挤压、注模部件和拉伸成型模等设计,一些研究者采用 Heaviside 设计参数化、显式制造约束和通过将三个投影方案融合到一个最小-最大问题表达来实现局部长度尺寸等控制,进行了含制造约束的结构拓扑优化设计^[7-8]。

目前 SIMP 方法是最常用的结构拓扑优化方法,已经得到工业界和学术界广泛应用和接受,然而其应用到涉及结构实体材料和空腔制造的最小长度尺寸限制的结构拓扑优化设计仍存在较大的困难。

GUEST 等^[9]提出了基于 Heaviside 函数的密度过滤方法用于消去灰度单元。而后,GUEST^[10]提出了一种结构拓扑优化的多相投影方法,其目的是确保结构实体相和空洞相材料的几何最小长度尺寸控制。在优化模型中引入了两套相对独立的设计变量来分别表示实体相和空洞相材料的非物理变量。然后,设置实体相和空洞相的过滤半径,并采用线性过滤函数来分别形成两组中间变量,且引入相同的光滑 Heaviside 函数获得结构实体相和空洞相材料的单元物理密度。多相投影法原则上提供了结构两相材料的几何长度尺度控制,然而,GUEST 完成的工作显示最后拓扑中出现了大量中间密度单元的灰度区域^[10]。ALMEIDA 等^[11]提出了一种线性过滤函数和逆过滤函数结合的投影方案用于控制结构两相材料的几何长度,但它也不能解决最后拓扑中出现的大量灰度单元的问题。WANG 等^[12]利用改进的基

于侵蚀、中间和膨胀映射的稳健拓扑优化公式,减缓了结构实体和空洞相材料的区域之间的灰色过渡区域的缺点。但该方法的缺点是在每一个迭代步要求求解三个独立的结构有限元方程,从而结构拓扑优化求解所需计算量有较大的增加,且也不能完全解决优化结构中实体和空洞相材料的区域之间存在的灰色过渡区域的问题。为了解决结构实体相和空洞相材料的几何最小长度尺寸控制问题和实体和空洞相区域之间存在的灰色过渡区域的问题,本文构建合理和协同的涉及实体相和空洞相材料的几何最小长度尺寸限制的结构拓扑优化模型,提出一种解决上述两个问题的结构拓扑优化方法。

1 线性密度过滤、常数密度过滤和 Heaviside 过滤

为了解决结构拓扑优化中的棋盘格问题,BRUNS 等^[13]提出了一种密度过滤方法。常用的密度过滤函数主要有线性密度过滤和常数密度过滤函数等。

将优化结构的设计域离散为 N 个单元,每一个单元赋予一个设计变量和一个相对密度变量。结构第 e 个单元的相对密度变量 $\tilde{x}_e$ 表示为第 e 个单元的邻域集合 N_e 内的独立设计变量 x_i 的函数。 N_e 定义如下

$$i \in N_e \quad \|y_i - \bar{y}_e\| \leq r_{\min} \quad (1)$$

式中, y_i 是第 i 个设计变量 x_i 所属单元的中心位置, $\bar{y}_e$ 是单元 e 的中心位置。长度尺度 $r_{\min}$ 是设定的密度过滤最小半径,参见文献[9]。

相对密度变量 $\tilde{x}_e$ 可表示为

$$\tilde{x}_e = \varphi_e'(x) = \frac{\sum_{i \in N_e} v_i^0 w_i(y_i - \bar{y}_e) x_i}{\sum_{i \in N_e} v_i^0 w_i(y_i - \bar{y}_e)} \quad (2)$$

式中, v_i^0 是第 i 个单元的满尺寸体积, $w_i(y_i - \bar{y}_e)$ 是权重函数,通常选择线性($w_i^{d,r_{\min}}(y_i - \bar{y}_e)$)或常数($w_i^{\mu,r_{\min}}(y_i - \bar{y}_e)$)的权重函数,其表达式表述如下

$$w_i^{d,r_{\min}}(y_i - \bar{y}_e) = \begin{cases} \frac{r_{\min} - \|y_i - \bar{y}_e\|}{r_{\min}} & i \in N_e \\ 0 & i \notin N_e \end{cases} \quad (3a)$$

$$w_i^{\mu,r_{\min}}(y_i - \bar{y}_e) = \begin{cases} 1 & i \in N_e \\ 0 & i \notin N_e \end{cases} \quad (3b)$$

采用线性或常数的权重函数的式(2)的密度过滤称之为线性密度过滤或常数密度过滤,这两种过滤导致结构实体和空洞之间灰度过渡单元的存在,同时也提供了结构实体材料长度尺寸的一种间接控制。采用权重函数 $w_i^{d, \text{min}}(y_i - \bar{y}_e)$ 进行结构拓扑优化能够得到更光滑的解,因此使用较广泛。在本文提出的方法中,采用常数密度过滤函数分别进行两相材料的设计变量过滤,以有利于应用光滑 Heaviside 函数时确保结构优化求解稳定收敛。

为了控制结构实体的最小长度尺寸和获得清晰的结构拓扑优化解, GUEST^[10]采用式(4)的连续逼近的光滑 Heaviside 函数将式(2)中的单元相对密度变量 $\tilde{x}_e$ 进行了转换,形成了设计变量场 x_e 、过渡变量场 $\tilde{x}_e$ 和物理变量场 $\bar{x}_e$ 。结构有限元分析时,用物理变量 $\bar{x}_e$ 替代原有的相对密度变量 $\tilde{x}_e$ 。

$$\bar{x}_e = \varphi^h(\tilde{x}_e) = 1 - e^{-\beta \tilde{x}_e} + \tilde{x}_e e^{-\beta} \quad (4)$$

式中,参数 $\beta \geq 0$ 表示近似的曲率。当 $\beta=0$ 时,表示该函数曲线是线性的;当 β 逼近无穷大时,该函数趋于 Heaviside 阶跃函数。当乘积 $\beta \tilde{x}_e$ 为零($\tilde{x}_e=0$)时得到空洞单元;当 $\tilde{x}_e=1$ 或者这个乘积非常大(必然需要一个极大的 β 值)时得到实体单元。

SIGMUND^[14]的研究表明,式(5)所表述的修改的光滑 Heaviside 函数和式(2)也能用来控制结构实体的最小长度尺寸和获得清晰的结构拓扑优化解。

$$\bar{x}_e = \varphi^{mh}(\tilde{x}_e) = e^{-\beta(1-\tilde{x}_e)} - (1-\tilde{x}_e)e^{-\beta} \quad (5)$$

2 涉及空腔和实体构件的最小长度尺寸限制的协同结构拓扑优化模型

基于线性或常数的密度过滤的结构最小柔顺度拓扑优化模型可表示为式(6)。

$$\begin{aligned} \min: & \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{u} \\ \text{s.t.} & \frac{1}{V_0} \left(\sum_{i=1}^N \tilde{x}_i v_i^0 \right) - V_f \leq 0. \\ & \tilde{x}_i = \phi_i^l(x) \in [0, 1], i=1, 2, \dots, N \\ & \mathbf{K}(\tilde{x})\mathbf{u}(\tilde{x}) = \mathbf{F} \end{aligned} \quad (6)$$

式中, $x_i \in [0, 1], i=1, 2, \dots, N$ 是设计变量; $\tilde{x}_i = \phi_i^l(x)$ 称为单元“物理密度”或“相对密度”变量。 V_0 是设计域的总体积; V_f 是目标体积限的比值。该模型含有结构静力方程的等式约束,即 $\mathbf{K}(\tilde{x})\mathbf{u}(\tilde{x}) = \mathbf{F}$ 。式中 $\mathbf{K}$ 表示结构总刚度阵, $\mathbf{F}$ 为外加荷载矢量,而 $\mathbf{u}$ 为对应的位移矢量。

GUEST^[10]提出了一种结构拓扑优化的多相投影方法,其目的是确保实体相和空洞相的几何最小长度尺寸控制。在优化模型中引入了两套相对独立的设计变量 x_i^1 和 x_i^0 ($i=1, 2, \dots, N$) 来分别表示实体相和空洞相材料的非物理变量。然后,设置实体相和空洞相的过滤半径 r_{min}^1 和 r_{min}^0 ,并采用式(2)来分别形成两组中间变量 $\tilde{x}_i^1$ 和 $\tilde{x}_i^0$ 。且引入式(7)、(8)的投影获得第 i 个单元的实体相和空洞相的单元物理密度。

$$\bar{x}_i^1 = \varphi^h(\tilde{x}_i^1) = 1 - e^{-\beta \tilde{x}_i^1} + \tilde{x}_i^1 e^{-\beta} \quad (7)$$

$$\bar{x}_i^0 = \varphi^h(\tilde{x}_i^0) = 1 - e^{-\beta \tilde{x}_i^0} + \tilde{x}_i^0 e^{-\beta} \quad (8)$$

在拓扑优化设计中,第 i 个单元的实际物理密度 $\bar{x}_i$ 表示为

$$\bar{x}_i = ((1 - \bar{x}_i^0) + \bar{x}_i^1) / 2 \quad (9)$$

假定单元的人工弹性模量是由修正的带惩罚的简化固体各向同性材料插值(SIMP)方法给出的一个单元实际物理密度函数。

$$E(\bar{x}_e) = E(x_e^0, x_e^1) = E_{\text{min}} + (\bar{x}_e)^p (E_0 - E_{\text{min}}) \quad \bar{x}_e \in [0, 1] \quad (10)$$

式中, E_{min} 是一个表示空洞材料刚度的小数值,用来避免刚度矩阵的奇异性。 E_0 是实体材料的弹性模量, p 是惩罚因子。

为了确保实体相和空洞相材料的几何最小长度尺寸控制,应强制式(11)的要求。

$$\bar{x}_i^1 = 1 - \bar{x}_i^0 \quad i=1, 2, \dots, N \quad (11)$$

式(11)涉及的约束数太多,优化求解较困难。再者,当 β 值较大时,式(7)、(8)和式(2)会导致结构实体和空洞相材料的结合区的强烈对立矛盾(在两相结合区,一个单元接收两个投影相的量^[10]),从而文献[10,11]的方法无法解决这些结合区出现大量中间密度单元的问题。为了消除式(2)和结构实体相及空洞相的过渡变量 $\tilde{x}_i^1$ 和 $\tilde{x}_i^0$ 的光滑 Heaviside 映射导致的强烈对立矛盾,本文设置实体相及空洞相的设计变量 x_i^1 和 x_i^0 ($i=1, 2, \dots, N$),采用式(2)和式(12a,12b)分别获得结构实体相和空洞相材料的单元物理密度 $\bar{x}_i^1$ 和 $\bar{x}_i^0$ ($i=1, 2, \dots, N$)。

$$\bar{x}_i^1 = \varphi^h(\tilde{x}_i^1) = 1 - e^{-\beta \tilde{x}_i^1} + \tilde{x}_i^1 e^{-\beta} \quad (12a)$$

$$\bar{x}_i^0 = \varphi^{mh}(\tilde{x}_i^0) = e^{-\beta(1-\tilde{x}_i^0)} - (1-\tilde{x}_i^0)e^{-\beta} \quad (12b)$$

第 i 个单元的实际物理密度 $\bar{x}_i$ 也用式(9)表示。式(12a,12b)与式(2)的结合使用分别具有控制结构实体相和空洞相材料的几何最小长度尺寸的功能。图

1 给出了不同参数 β 的 $\phi_i^h(\bar{x}_i^1)$ 和 $\phi_i^{mh}(\bar{x}_i^0)$ 曲线图。简单分析图 1 曲线可知, 若采用式(7)、(8)光滑 Heaviside 函数映射同一单元的非零的中间变量 $\bar{x}_i^1$ 和 $\bar{x}_i^0$ (见图 1), 当 β 取一有限值(如 $\beta=50$)时, 映射得到的物理密度 $\bar{x}_i^1$ 和 $\bar{x}_i^0$ 严重偏离式(11)的要求, 因此会产生严重的对立矛盾; 当 $\bar{x}_i \in [0,1]$ 时, 由式(12a)、(12b)获得的单元物理密度 $\bar{x}_i^1$ 和 $\bar{x}_i^0$ 本身不会存在严重对立矛盾。即, 如果同一单元具有非零的中间变量 $\bar{x}_i^1$ 和 $\bar{x}_i^0$ (图 1), 映射该两个量得到的物理密度 $\bar{x}_i^1$ 和 $\bar{x}_i^0$ 能近似满足式(11), 且该单元接收两个投影相的量(式(9))仍可使得实际物理密度 $\bar{x}_i$ 近似达到 1 或 0。

图 1 不同 β 值的光滑 Heaviside 函数和修改的光滑 Heaviside 函数曲线图

为了确保结构实体相和空洞相材料的几何最小长度尺寸控制, 类似地应要求式(11)近似地满足。然而, 大量数值仿真表明: 如果采用式(2)和式(12a,12b)进行变量映射, 当 $0 < \bar{x}_i < 1$, 且 β 值为有限值时, 很难采用一个或二个凝聚函数约束使得大部分单元的 $\bar{x}_i^0$ 和 $\bar{x}_i^1$ 近似地满足式(11)。从最终优化结果的要求来说, 如果在 $\bar{x}_i = 0$ 和 $\bar{x}_i = 1$ 的很小邻域里, 其相应的 $\bar{x}_i^0$ 和 $\bar{x}_i^1$ 能近似地满足式(11), 则有利于获得希望的优化拓扑。即使如此, 要强制 $\bar{x}_i = 0$ 和 $\bar{x}_i = 1$ 的很小邻域里的单元的 $\bar{x}_i^0$ 和 $\bar{x}_i^1$ 近似地满足式(11), 结构拓扑优化模型仍需要大量的约束条件。尽管涉及应力约束的结构拓扑优化中采用一个或几个高指数 q 的应力凝聚函数替代所有的局部应力约束获得了等效的结果, 然而, 式(11)的特性不同于局部应力约束特性。这里借鉴试验数据的曲线拟合思想, 并结合实际物理密度 $\bar{x}_i$ 的分布特征, 构建一个加权的二范数凝聚函数。

定义

$$s_i(x_i^0, x_i^1) = \bar{x}_i^1 - (1 - \bar{x}_i^0) \quad i=1,2,\dots,N \quad (13)$$

这里, 一个自适应的加权的二范数凝聚约束函

数构建如下。

$$g(x^0, x^1) = \left(\frac{1}{N} \sum_{e=1}^N w_{ag}(\bar{x}_e) (s_e(x_e^0, x_e^1))^2 \right)^{1/2} \leq s_{\max}(\gamma_1 g^k(x^0, x^1), \delta_1) \quad (14)$$

式中, $w_{ag}(\bar{x}_e)$ 是一个加权函数, 也是单元的实际物理密度 $\bar{x}_e$ 的函数, 其构建的表示式列于式(15); $g^k(x^0, x^1)$ 是第 k 迭代步(上一迭代步)处 $g(x^0, x^1)$ 的值; γ_1 和 δ_1 是二个正的经验参数, 且 $\gamma_1 < 1$, 本文算例中取 $\gamma_1=0.7, \delta_1=0.01$ 。

$$w_{ag}(\bar{x}_i) = \begin{cases} e^{-2\gamma_2 \bar{x}_i} - 2\bar{x}_i e^{-\gamma_2} & 0.0 \leq \bar{x}_i \leq 0.5 \\ e^{-2\gamma_2(1-\bar{x}_i)} - 2(1-\bar{x}_i) e^{-\gamma_2} & 0.5 < \bar{x}_i \leq 1 \end{cases} \quad (15)$$

式中, γ_2 也是一个经验参数, 本文算例中取 $\gamma_2=5$ 。不同 γ_2 值的加权函数曲线示于图 2。通过式(14), 当单元的实际物理密度 $\bar{x}_e$ 处于 (0,1) 内时, $w_{ag}(\bar{x}_e)$ 能不同程度地降低式(11)的要求。在结构优化过程中, 结构中存在大量 $0 < \bar{x}_i < 1$ 的单元, 式(14)不能等效于式(11)。因此, 应有一种措施总体控制和调整这些中间密度单元的设计变量, 以使得其实际物理密度 $\bar{x}_e$ 以逐渐满足式(11)的方式向 0 或 1 转化。另外, 结构柔顺度在一定程度上不具有相对于设计变量 x_i^1 和 x_i^0 的单调变化特性。考虑到该特点和式(11), 分别由结构的 $\bar{x}_i^0$ 、 $\bar{x}_i^1$ 和 $\bar{x}_i$, $i=1,2,\dots,N$, 构建如下 6 个不同的体积约束函数, 以式(11)的条件为主导, 并利用式(10)的材料惩罚模型达到总体上能控制结构拓扑优化的进化方向。

图 2 不同 γ_2 值的加权函数曲线图

$$\tilde{f}_1(x^0, x^1) = \frac{1}{V_0} \left(\sum_{i=1}^N \bar{x}_i v_i^0 \right) - V_f \leq 0 \quad (16a)$$

$$\tilde{f}_2(x^0, x^1) = \frac{1}{V_0} \left(\sum_{i=1}^N (1 - \bar{x}_i^0) v_i^0 \right) - V_f (1 + \delta_2) \leq 0 \quad (16b)$$

$$\tilde{f}_3(x^0, x^1) = -\frac{1}{V_0} \left(\sum_{i=1}^N (1 - \bar{x}_i^0) v_i^0 \right) + V_f (1 - \delta_3) \leq 0 \quad (16c)$$

$$\tilde{f}_4(x^0, x^1) = -\frac{1}{V_0} \left(\sum_{i=1}^N \bar{x}_i^1 v_i^0 \right) + V_f (1 - \delta_2) \leq 0 \quad (16d)$$

$$\tilde{f}_5(x^0, x^1) = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^N ((\bar{x}_i^1 + \bar{x}_i^0) - 1) v_i^0 / V_0 \right)^2 + \varepsilon} - 0.2\delta_2 \leq 0 \quad (16e)$$

$$\tilde{f}_6(x^0, x^1) = -\frac{1}{V_0} \left(\sum_{i=1}^N \bar{x}_i v_i^0 \right) + V_f (1 - \delta_2) \leq 0 \quad (16f)$$

$$\delta_3 = \begin{cases} 0.5\delta_2 (e^{-2\gamma_2(1-\beta/\beta_{th})} - 2(1-\beta/\beta_{th})e^{-\gamma_2}) & 0 < \beta/\beta_{th} \leq 1 \\ 0.5\delta_2 & \beta/\beta_{th} > 1 \end{cases} \quad (17)$$

式中, δ_2 是经验参数, 并称为用于实体相和空洞相相关联的物理材料体积控制中的松弛参数。 β_{th} 是曲率参数 β 的一个门槛值, 本文算例中取 $\beta_{th} = 50$; δ_3 用于与空洞相相关联的物理材料体积下限控制中的松弛参数。在迭代优化前期 δ_3 取很小的值, 有利于控制孔洞形成, 其后期取一小的常数值, 以有利于不必要的杆件消失; $\tilde{f}_5(x^0, x^1)$ 近似表示结构实体相和空洞相的物理材料体积之差的绝对值约束函数, ε 是一小量, 本文算例中取 $\varepsilon = 1 \times 10^{-20}$, 该表示式易于求导。式(14)、式(16)从总体上能体现结构体积约束和式(11)的近似要求, 并与目标函数一起主导大量 $0 < \bar{x}_i < 1$ 的单元设计变量向本文预定的方向发展。因此, 式(12)、(14)和式(16)总体上能反映空腔和实体构件的最小几何长度尺寸限制的协同要求。

基于以上的分析和构建的约束函数, 涉及实体相和空洞相材料的几何最小长度尺寸限制的结构拓扑优化模型列式表述如下

$$\begin{aligned} \min_{x^0, x^1} : f_0(x^0, x^1) &= \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{u} \\ \text{s.t. } \tilde{f}_j(x^0, x^1) &\leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 6 \\ f_7(x^0, x^1) &= g(x^0, x^1) - \max(\gamma_1 g^k(x^0, x^1), \delta_1) \leq 0 \\ \bar{x}_i &= ((1 - \bar{x}_i^0) + \bar{x}_i^1) / 2, i = 1, 2, \dots, N \\ \mathbf{K}(\bar{x}) \mathbf{u}(\bar{x}) &= \mathbf{F} \end{aligned} \quad (18)$$

3 变约束限的协同结构拓扑优化模型

虽然 SIMP 材料插值模型中惩罚幂指数 $p = 1$ 时, 不含 Heaviside 映射的结构柔顺度拓扑优化问题是凸问题^[9,15], 但是大量的仿真实例表明, 当惩罚幂指数 $p > 1$, 在一些设计点上, 具有较小相对密度变量值的结构柔顺度二阶导数可以是负的。也就是说, 含 Heaviside 映射的柔顺度拓扑优化问题是一个非凸的非线性优化问题, 可以具有许多局部最优解。

SIGMUND 等^[16-17]采用 p 值递增的方式求解了拓扑优化问题, 提出了材料惩罚参数的连续性方法, 以获得更好的设计。ROJAS-LABANDA 等^[18]、LI 等^[19]和 WATADA 等^[20]进一步推广了该连续性方法。这些作者声称连续性方法有助于避免迭代终止于一个局部极小值。相反, STOLPE 等^[21]列举一些采用材料惩罚参数连续性方法失败的例子。虽然该连续方法在一些典型算例应用中表现得非常好, 但仍只是一个启发式算法。大量仿真数据显示, 对于优化模型式(18), 由于约束函数 $f_7(x^0, x^1)$ 和实体相和空洞相的变量形成的体积约束的出现, 导致 $p < 2$ 时的初始的一些迭代求解获得的结构拓扑和结构柔顺度波动很大。再者, 非线性优化问题的更多初始解和相应的优化求解有助于获得更好的局部最优解。鉴于上述情况, 为了减少曲率参数 β 变化引起的迭代求解过程中结构拓扑的大的变化次数, 本文借鉴连续调整 SIMP 的惩罚参数 p 值和逐渐增加曲率参数 β 的方式^[14-15,22], 以及体积或位移的变约束限方案^[23-30], 从 $p=2$ 和 $\beta=1$ 开始连续调整 p 和 β , 并将式(18)转变为下列变约束限序列近似模型。

$$\begin{aligned} \min_{x^0, x^1} : f_0(x^0, x^1) &= \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{u} \\ \text{s.t. } f_j(x^0, x^1) &\leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6 \\ f_7(x^0, x^1) &= \frac{(g(x^0, x^1) - \max(\gamma_1 g^k(x^0, x^1), \delta_1))}{\max_{i=1,2,\dots,N; l=0,1} \left| \partial g(x^0, x^1) / \partial x_i^l \right|_{x=x^{(k)}}} \leq 0 \\ \bar{x}_i &= ((1 - \bar{x}_i^0) + \bar{x}_i^1) / 2, i = 1, 2, \dots, N \\ \mathbf{K}(\bar{x}) \mathbf{u}(\bar{x}) &= \mathbf{F} \end{aligned} \quad (19)$$

式中, $f_j(x^0, x^1), j = 1, 2, \dots, 6$ 是仅将式(16)的相应约束函数 $\tilde{f}_j(x^0, x^1), j = 1, 2, \dots, 6$ 中 V_f 改为 $V_U^{(k+1)} / V_0$ 后形成的函数。实质上, 式(19)引入了一个第 $(k+1)$ 外循环迭代步的变体积限 $V_U^{(k+1)}$, 其表达式表述如下

$$V_U^{(k+1)} = \begin{cases} V^{(k)} - \min(\gamma_3 V_0, |V_f V_0 - V^{(k)}|) & V^{(k)} / V_0 \geq V_f \\ V^{(k)} + \min(\gamma_3 V_0, |V_f V_0 - V^{(k)}|) & V^{(k)} / V_0 < V_f \end{cases} \quad k = 0 \text{ 或 } k \in \beta \quad (20a)$$

$$V_U^{(k+1)} = \begin{cases} V^{(k)} - \min(\gamma_3 V_0, |V_f V_0 - V^{(k)}|) & V^{(k)} / V_0 \geq V_f \\ V^{(k)} + \min(\gamma_3 V_0, |V_f V_0 - V^{(k)}|) & V^{(k)} / V_0 < V_f \end{cases} \quad k = 0 \text{ 或 } k \in \beta \quad (20b)$$

式中, γ_3 是体积限经验参数, 在本文的例子中采用了 0.005 到 0.015 之间的值; β 为曲率参数 β 变化

后的第一迭代步的迭代步编号的集合。式(20b)中 $\bar{k}$ 为与当前步最临近的 β 变化后的第一迭代步的迭代步编号。 V_0 和 $V^{(k)}$ 分别是初始设计的结构体积和第 k 迭代步设计的结构体积。

4 灵敏度分析

计算目标函数和约束函数相对于独立设计变量 x_j^i 的灵敏度,其中 $i=0,1$ 分别为0相和1相设计变量。给定函数 $f(x)$ 的微分列于式(21)。

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j^i} = \sum_{e \in N_j} \frac{\partial f(x)}{\partial \bar{x}_e} \frac{\partial \bar{x}_e}{\partial x_j^i} \quad i=0,1; j=1,2,\dots,N \quad (21)$$

由式(9)可得到式(22a)、(22b)。

$$\frac{\partial \bar{x}_e}{\partial x_j^1} = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{x}_e^1}{\partial x_j^1} & j \in N_e \\ 0 & j \notin N_e \end{cases} \quad (22a)$$

$$\frac{\partial \bar{x}_e}{\partial x_j^0} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{x}_e^0}{\partial x_j^0} & j \in N_e \\ 0 & j \notin N_e \end{cases} \quad (22b)$$

求解式(12a)、(12b)的微分可得下式

$$\frac{\partial \bar{x}_e^1}{\partial x_j^1} = (\beta e^{-\beta \bar{x}_e^1} + e^{-\beta}) \frac{\partial \tilde{x}_e^1}{\partial x_j^1} \quad (23a)$$

$$\frac{\partial \bar{x}_e^0}{\partial x_j^0} = (\beta e^{-\beta(1-\bar{x}_e^0)} + e^{-\beta}) \frac{\partial \tilde{x}_e^0}{\partial x_j^0} \quad (23b)$$

然后,过渡变量 $\tilde{x}_e^1$ 和 $\tilde{x}_e^0$ 的微分列于式(24)。

$$\frac{\partial \tilde{x}_e^1}{\partial x_j^1} = \begin{cases} \frac{v_j^0 w_j^{\mu,r,\min}(y_j - \bar{y}_e)}{\sum_{k \in N_e} v_k^0 w_k^{\mu,r,\min}(y_k - \bar{y}_e)} & j \in N_e \\ 0 & j \notin N_e \end{cases} \quad (24a)$$

$$\frac{\partial \tilde{x}_e^0}{\partial x_j^0} = \begin{cases} \frac{v_j^0 w_j^{\mu,r,\min}(y_j - \bar{y}_e)}{\sum_{k \in N_e} v_k^0 w_k^{\mu,r,\min}(y_k - \bar{y}_e)} & j \in N_e \\ 0 & j \notin N_e \end{cases} \quad (24b)$$

目标函数 $f_0(x^0, x^1)$ 相对于物理密度 $\bar{x}_e$ 的灵敏度求解如下

$$\frac{\partial f_0(x^0, x^1)}{\partial \bar{x}_e} = -\mathbf{u}_e^T \frac{\partial \mathbf{k}_e}{\partial \bar{x}_e} \mathbf{u}_e \quad (25a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}_e}{\partial \bar{x}_e} = p(\bar{x}_e)^{p-1} (E_0 - E_{\min}) \mathbf{k}_e^0 \quad (25b)$$

式中, $\mathbf{k}_e^0$ 和 $\mathbf{k}_e$ 是第 e 个单元的固有刚度矩阵和刚度矩阵; $\mathbf{u}_e$ 代表结构第 e 个单元的位移矢量。

6个不同的体积约束函数和式(19)中 $g(x^0, x^1)$ 相对于 $\bar{x}_e^0$ 、 $\bar{x}_e^1$ 和 $\bar{x}_e$ 的导数(仅非零量)由下列表示式给出。

$$\frac{\partial f_1(x^0, x^1)}{\partial \bar{x}_e} = \frac{v_e^0}{V_0} \quad (26a)$$

$$\frac{\partial f_2(x^0, x^1)}{\partial \bar{x}_e^0} = \frac{-v_e^0}{V_0} \quad (26b)$$

$$\frac{\partial f_3(x^0, x^1)}{\partial \bar{x}_e^0} = \frac{v_e^0}{V_0} \quad (26c)$$

$$\frac{\partial f_4(x^0, x^1)}{\partial \bar{x}_e^1} = \frac{-v_e^0}{V_0} \quad (26d)$$

$$\frac{\partial f_5(x^0, x^1)}{\partial \bar{x}_e^1} = \left(\left(\sum_{i=1}^N ((\bar{x}_i^1 + \bar{x}_i^0) - 1) v_i^0 / V_0 \right)^2 + \varepsilon \right)^{-0.5} \times \left(\sum_{i=1}^N ((\bar{x}_i^1 + \bar{x}_i^0) - 1) v_i^0 / V_0 \right) \frac{v_e^0}{V_0} \quad (26e)$$

$$\frac{\partial f_5(x^0, x^1)}{\partial \bar{x}_e^0} = \left(\left(\sum_{i=1}^N ((\bar{x}_i^1 + \bar{x}_i^0) - 1) v_i^0 / V_0 \right)^2 + \varepsilon \right)^{-0.5} \times \left(\sum_{i=1}^N ((\bar{x}_i^1 + \bar{x}_i^0) - 1) v_i^0 / V_0 \right) \frac{v_e^0}{V_0} \quad (26f)$$

$$\frac{\partial f_6(x^0, x^1)}{\partial \bar{x}_e} = -\frac{v_e^0}{V_0} \quad (26g)$$

$$\frac{\partial g(x^0, x^1)}{\partial \bar{x}_e^1} = 0.5 \left(\frac{1}{N} \sum_{e=1}^N w_{ag}(\bar{x}_e) (s_e(x_e^0, x_e^1))^2 \right)^{-0.5} \left(\frac{2}{N} \sum_{e=1}^N w_{ag}(\bar{x}_e) (s_e(x_e^0, x_e^1)) + \frac{1}{N} \sum_{e=1}^N \frac{\partial w_{ag}(\bar{x}_e)}{\partial \bar{x}_e^1} (s_e(x_e^0, x_e^1))^2 \right) \quad (26h)$$

$$\frac{\partial g(x^0, x^1)}{\partial \bar{x}_e^0} = 0.5 \left(\frac{1}{N} \sum_{e=1}^N w_{ag}(\bar{x}_e) (s_e(x_e^0, x_e^1))^2 \right)^{-0.5} \left(\frac{2}{N} \sum_{e=1}^N w_{ag}(\bar{x}_e) (s_e(x_e^0, x_e^1)) + \frac{1}{N} \sum_{e=1}^N \frac{\partial w_{ag}(\bar{x}_e)}{\partial \bar{x}_e^0} (s_e(x_e^0, x_e^1))^2 \right) \quad (26i)$$

目标函数 $f_0(x^0, x^1)$ 和 $f_1(x^0, x^1)$ 及 $f_6(x^0, x^1)$ 相对于设计变量 x_j^1 和 x_j^0 的灵敏度可由式(27a)、(27b)的链式公式导出

$$\frac{\partial f}{\partial x_j^1} = \frac{1}{2} \sum_{e \in N_j} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_e^1} \frac{\partial \bar{x}_e^1}{\partial \tilde{x}_e^1} \frac{\partial \tilde{x}_e^1}{\partial x_j^1} \quad (27a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j^0} = -\frac{1}{2} \sum_{e \in N_j} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_e^0} \frac{\partial \bar{x}_e^0}{\partial \tilde{x}_e^0} \frac{\partial \tilde{x}_e^0}{\partial x_j^0} \quad (27b)$$

约束函数 $f_j(x^0, x^1)$, $j=2,3,\dots,5$ 和式(19)中 $g(x^0, x^1)$ 相对于设计变量 x_j^1 和 x_j^0 的灵敏度可由式(28a)或式(28b)的链式公式导出

$$\frac{\partial f}{\partial x_j^1} = \sum_{e \in N_j} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_e^1} \frac{\partial \bar{x}_e^1}{\partial \tilde{x}_e^1} \frac{\partial \tilde{x}_e^1}{\partial x_j^1} \quad (28a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j^0} = \sum_{e \in N_j} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_e^0} \frac{\partial \bar{x}_e^0}{\partial \tilde{x}_e^0} \frac{\partial \tilde{x}_e^0}{\partial x_j^0} \quad (28b)$$

借鉴文献[14],用式(29)表示设计的灰度水平。

$$M_{nd} = \frac{\sum 4\bar{x}_e(1-\bar{x}_e)}{N} \times 100\% \quad (29)$$

5 优化求解算法及步骤

优化求解器采用 MMA 求解算法^[32-33]。总结本文提出的 Heaviside 过滤过程如下。首先,我们从上一优化迭代中得到两个独立的设计变量 x_e^1 和 x_e^0 ; 然后,将常数密度过滤公式(2)分别应用于独立设计变量 x_e^1 和 x_e^0 得到中间变量 $\tilde{x}_e^1$ 和 $\tilde{x}_e^0$; 接着,将式(12)的多相投影应用于 $\tilde{x}_e^1$ 和 $\tilde{x}_e^0$, 从而得到三种物理密度 $\bar{x}_e^1$ 、 $\bar{x}_e^0$ 和 $\bar{x}_e$ 。最后,物理密度 $\bar{x}_e^1$ 、 $\bar{x}_e^0$ 和 $\bar{x}_e$ 用于计算目标函数、约束函数及其灵敏度和其他在优化中需要求的量。通过 MMA 优化求解器^[31-32], 得到一个新的设计和一个新的初始迭代。本文提出的方法优化迭代步骤如下。

(1) 初始化两个独立设计变量 x_e^1 和 x_e^0 , $\text{iter}=0$, $\text{change}=1$, $\beta=1$ 和 $p=2$, 以及依据设计变量 x_e^1 和 x_e^0 。

(2) $\text{iter}=\text{iter}+1$ 。

(3) 分别应用式(2)计算中间变量 $\tilde{x}_e^1$ 和 $\tilde{x}_e^0$ 。

(4) 采用式(12a,b)和式(9)计算物理密度 $\bar{x}_e^1$ 、 $\bar{x}_e^0$ 和 $\bar{x}_e$ 。

(5) 基于实际物理密度 $\bar{x}_e$, 采用式(6)中结构静力方程求得位移矢量 u , 然后计算结构柔顺度, 并采用式(16a)、(16f)形成多个约束函数。

(6) 分别采用式(25a)、(25b)和式(26a)~(26i)获得目标函数和约束函数相对于物理密度 $\bar{x}_e$ 的灵敏度; 而目标函数和约束函数相对于设计变量 x_j^1 和 x_j^0 的灵敏度可分别由式(27a)、(27b)和式(28a)、(28b)得到。

(7) 采用式(20a)、(20b)更新优化模型的体积限, 最后形成式(19)表示的近似优化模型。

(8) 采用 MMA 算法求解式(19)近似模型来更新设计变量 x_{new}^1 和 x_{new}^0 。

(9) 计算 $\text{change}=\max(\|x_{new}^1-x^1\|_\infty, \|x_{new}^0-x^0\|_\infty)$, 并设置 $p=\min(p+0.01, 3)$ 。

(10) if { $\text{mod}(\text{iter}, 30)=1$ or $\text{change}<0.005$ }

then $\beta=2\beta$;

change=0.5;

End。

(11) 当 $\text{change}>\varepsilon_1$ (为收敛参数)转到步骤(2)。

(12) End。

6 优化算例

6.1 MBB 梁拓扑优化设计

单位厚度的 MBB 梁设计域及载荷工况见图 3a。

其左下端点固支, 右下端点滑支, 设计域上部中点作用一集中载荷 $2F=2$ (本算例所有物理量无量纲)。考虑到结构的对称性, 故对其右半区域进行优化, 参见图 3b。初始设计域尺寸为 $L \times H$ (150 mm $\times$ 50 mm), 被划分成 150 mm $\times$ 50 mm 个等尺寸的平面四边形应力单元。单工况载荷 $F=1$, MBB 梁实体材料的弹性模量值 $E_0=1$, 泊松比 $\nu=0.3$, $E_{\min}=10^{-9}$ 是一个表示空洞材料的弹性模量值, 用来避免刚度矩阵的奇异性。目标体积比设为 0.5。

(a) 整个 MBB 梁设计域及载荷工况

(b) 半 MBB 设计域及载荷工况

图 3 MBB 梁初始设计域及外载荷工况

经验参数 δ_1 和 δ_2 都取 0.01, 体积约束限参数 γ_3 取 0.01 以及收敛参数取 $\varepsilon_1=0.0005$ 。其他参数是非敏感参数, 参照相应公式处的给定值。后继例子的优化参数都与本例一致, 下面将不再做详细介绍。

为了验证本文方法的有效性和适应性, 采用了不同过滤半径对 MBB 梁进行了仿真设计。

(1) 实体材料过滤半径和空洞材料过滤半径都取 $r_{\min}=2$ 时的设计结果

初始拓扑选取设计域内充满材料的结构, 图 4 为本文方法获得的实体材料和空洞材料过滤半径都

图 4 本文方法获得的实体材料和空洞材料过滤半径 $r_{\min}=2$ 时的半 MBB 梁结构的优化历程图

取 $r_{\min}=2$ 时的半 MBB 梁结构的优化历程图。表 1 给出了相应于图 4 中结构拓扑的优化特性数据。图 4h 的拓扑构型是获得的最后拓扑构型。

从图 4 可以看出,本文方法在优化 100 个迭代步后基本得到满足空腔的最小几何长度尺寸限制要求的结构拓扑,即整个结构域内的实体杆件宽度和孔洞直径大小都不小于式(1)~(3)中的 $2r_{\min}$ 。从第 100 外循环迭代步开始到 160 迭代步消去了一些小的构件,基本得到了满足空腔和实体构件的最小几何长度尺寸限制要求的结构拓扑,其拓扑构型图与最终结果相差很小。图 5 给出了半 MBB 梁结构柔顺度和体积的优化历程曲线。从图 5 中优化过程发现,当 β 变化时,结构柔顺度和体积都有一个大的变化,但结构拓扑构型没有大的变化;变约束限措施使得后继迭代步的结

图 5 本文方法获得的实体材料和空腔材料过滤半径 $r_{\min}=2$ 时的半 MBB 梁结构柔顺度和体积的优化历程曲线

表 1 相应于图 4 中结构拓扑的优化特性数据

序号	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)
柔顺度	146.1120	245.4623	225.6675	193.1983	188.9466	186.8195	186.2762	186.2753
体积比	0.799	0.501	0.499	0.500	0.499	0.500	0.500	0.500
$M_{nd}(\%)$	0.799	0.572	0.404	0.098	0.060	0.012	0.002	0.001

表 2 相应于图 6 中结构拓扑的优化特性数据

序号	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)
柔顺度	208.7672	231.2419	210.3876	194.5031	189.4937	187.0579	186.5703	186.5587
体积比	0.561	0.499	0.499	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500
$M_{nd}(\%)$	0.682	0.500	0.278	0.119	0.063	0.008	0.001	0.001

从图 6 可以看出,拓扑构型变化规律与图 5 中构型变化规律相似,且最后的拓扑构型也同样满足最小长度尺寸的控制。从表 1、2 可以看出,在过滤半径相同的情况下,采用这两个不同的初始拓扑进行计算,本文方法获得的最后的拓扑构型的清晰度都很好,其最后的拓扑构型的 M_{nd} 值都小于或等于 0.001。两个优化得到的最后拓扑构型相似,但其柔顺度值稍有不同,图 4h 的拓扑构型更优。

该算例仿真结果表明:本文方法对不同初始设计拓扑有一定的依赖性,但在几个计算结果中求解最大设计域内充满材料的初始设计结构获得的拓扑构型最优。

构拓扑构型平稳变化。从表 1 和图 4h 可看出,最优拓扑构型的 M_{nd} 值达到了 0.001,其清晰度达到了 0/1 分布,验证了本文方法的有效性。

为了进一步验证本文方法的有效性和适应性,采用了不同初始拓扑对 MBB 梁进行了仿真设计。

图 6 为本文方法在相同的过滤半径下获得的实体材料和空腔材料初始拓扑分别为 0.7、0.3 时的半 MBB 梁结构的优化历程图。表 2 给出了相应于图 6 中结构拓扑的优化特性数据。图 6h 的拓扑构型是获得的最后拓扑构型。

图 6 本文方法获得的实体材料和空腔材料初始拓扑分别为 0.7、0.3 时的半 MBB 梁结构的优化历程图

图 7 本文方法获得的实体材料和空腔材料初始拓扑分别为 0.7、0.3 时的半 MBB 梁结构柔顺度和体积的优化历程曲线

(2) 实体材料过滤半径和空洞材料过滤半径都取 $r_{\min}=3$ 时的设计结果。

图 8 为本文方法获得的实体材料和空洞材料过

滤半径都取 $r_{\min}=3$ 时的半 MBB 梁结构的优化历程图。表 3 给出了相应于图 8 中结构拓扑的优化特性数据。图 9h 的拓扑构型是获得的最优拓扑构型。

表 3 相应于图 8 中结构拓扑的优化特性数据

序号	8a	8b	8c	8d	8e	8f	8g	8h
柔顺度	146.373 2	251.359 5	233.450 1	207.163 6	199.484 8	214.551 6	194.402 0	194.391 7
体积比	0.799	0.501	0.499	0.500	0.500	0.485	0.500	0.500
$M_{nd}(\%)$	0.538	0.601	0.430	0.208	0.151	0.043	0.000	0.000

图 8 本文方法获得的实体材料和空洞材料过滤半径 $r_{\min}=3$ 时的半 MBB 梁结构的优化历程图

图 9 本文方法获得的实体材料和空洞材料过滤半径 $r_{\min}=3$ 时的半 MBB 梁结构柔顺度和体积的优化历程曲线

从图 8 可以看出,初始的 70 个迭代步的拓扑构型逐渐变化,这是因为既要目标函数最小和达到体积约束要求,又要满足空腔和实体构件的最小几何长度尺寸限制要求所导致的。但随着迭代步的进一步增加,拓扑构型趋于稳定,最终拓扑构型见图 8h,且其空腔和实体构件都具有不小于预定的最小几何长度尺寸的特征。其迭代的拓扑构型变化规律类似于图 4。从该图就可以看出,半 MBB 梁的单元拓扑变量达到了 0/1 分布。图 8 和表 3 中的结果进一步验证了本文方法的有效性。图 10 给出了半 MBB 梁结构柔顺度和体积的优化历程曲线。图 9 有与图 4 类似的特征。从图 9 还可以看出,在 150 步至 210 步之间的许多迭代步,梁结构体积小于约束限值,

这是由一些杆件的消去导致的现象。

从表 1、3 可以看出,在体积比相同的情况下,采用这两个不同过滤半径,本文方法获得的最优拓扑构型的清晰度都很好,其最优拓扑构型的 M_{nd} 值都小于或等于 0.001。但两个最优拓扑构型和其柔顺度值都不一样,过滤半径越小,柔顺度值也越小及最优拓扑的构件数增多。

表 4 给出了实体材料和空洞材料过滤半径都取 $r_{\min}=2$ 时,采用本文方法和文献[10]方法获得的最优结构拓扑及其特性数据。从表 4 可以看出,本文方法获得的最优结构拓扑比文献[10]方法获得的最优结构拓扑更加清晰,其柔顺度值更小。

表 4 采用本文方法和文献[10]方法获得的最优结构拓扑及其特性数据

	本文方法	文献[10]方法
结构拓扑		
柔顺度	186.2753	186.7361
$M_{nd}(\%)$	0.001	0.018

6.2 Michell 结构拓扑优化设计

图 10 为 Michell 结构初始设计域。其左端下角点固支,右端下角点滑支,底边中点作用一铅垂向集中载荷,其单工况载荷 $F=1$ (本算例所有物理量无量纲)。初始设计域为长 $L=80$,高 $H=40$ 和厚度为 1,并被离散成 3 200 个等尺寸的四节点平面应力单元。Michell 结构的弹性模量值设为 $E_0=1$,泊松比 $\nu=0.3$,目标体积比设为 0.4。优化参数的设置同于上例。初始拓扑选取设计域内充满材料的结构。

图 10 Michell 结构设计域及边界条件

图 11 为当实体材料和空洞材料过滤半径都取 $r_{\min}=2$ 时本文方法获得的 Michell 结构优化拓扑。其

柔顺度值为 16.283 4。其优化过程展示了类似于第 5.1 节算例结果的特征。

图 11 本文方法获得的实体材料和空洞材料过滤半径 $r_{\min}=2$ 时的结构优化拓扑

图 12 给出了实体材料过滤半径和空洞材料过滤半径都取 $r_{\min}=3$ 时本文方法获得的 Michell 结构优化拓扑。其柔顺度值为 17.819 1。且该构型能够验证本文方法的可行性和有效性。

图 12 本文方法获得的实体材料和空洞材料过滤半径 $r_{\min}=3$ 时的结构优化拓扑

6.3 两端固支梁结构拓扑优化设计

图 13 是两端固支梁结构初始设计域。其两侧端面固支,上端面中点施加一垂向集中载荷 $F=1$ (本算例所有物理量量纲一)。初始设计域为长 $L=90$, 高 $H=30$ 和厚度为 1, 并被离散成 2 700 个等尺寸的四节点平面应力单元。弹性模量值设为 $E_0=1$, 泊松比 $\nu=0.3$, 目标体积比设为 0.675。优化参数的设置同于上例。初始拓扑选取设计域内充满材料的结构。

图 13 两端固支梁结构设计域及边界条件

图 14 为当实体材料和空洞材料过滤半径 $r_{\min}=2$ 时本文方法获得的两端固支梁结构优化拓扑。其柔顺度值为 7.788 4。当实体材料和空洞材料过滤半径 $r_{\min}=3$ 时, 本文方法获得的两端固支梁结构优化拓扑见图 15。其柔顺度值为 7.830 2。当实体材料和空洞材料过滤半径都取 $r_{\min}=4$ 时, 本文方法获得的两端固支梁结构优化拓扑见图 16, 其柔顺度值为 7.861 2。这些都表明本文方法是可行和有效的。

图 14 本文方法获得的实体材料和空洞材料过滤半径 $r_{\min}=2$ 时的两端固支梁结构优化拓扑

图 15 本文方法获得的实体材料和空洞材料过滤半径 $r_{\min}=3$ 时的两端固支梁结构优化拓扑

图 16 本文方法获得的实体材料和空洞材料过滤半径 $r_{\min}=4$ 时的两端固支梁结构优化拓扑

7 结论

本文提出了一种新的涉及空腔制造的最小长度尺寸限制的清晰结构拓扑优化设计求解方法。从方法的理论公式和给出的算例, 可以得出以下结论。

(1) 构建了合理和协同的涉及实体相和空洞相材料的几何最小长度尺寸限制的结构拓扑优化模型, 提出一种新的结构拓扑优化方法。该方法能够解决结构实体相和空洞相材料的几何最小长度尺寸控制问题。

(2) 本文方法也能很好地解决实体和空洞相区域之间存在的灰色过渡区域的问题。

(3) 本文方法有待推广到实体相和空洞相材料的不同的几何最小长度尺寸限制的结构拓扑优化设计问题。

参 考 文 献

- [1] SIGMUND O, MAUTE K. Topology optimization approaches[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2013, 48(6): 1031-1055.
- [2] DEATON J D, GRANDHI R V. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: Post 2000[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2014, 49(1): 1-38.
- [3] GUO X, CHENG G D. Recent development in structural design and optimization[J]. Acta Mechanica Sinica, 2010, 26(6): 807-823.
- [4] GUO X, ZHANG W, ZHONG W. Explicit feature control in structural topology optimization via level set method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2014, 272(2): 354-378.
- [5] ZHANG W, ZHONG W, GUO X. An explicit length scale control approach in SIMP-based topology optimization[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2014, 282(1): 71-86.
- [6] WEI P, SHI J, MA H. Integrated layout design of

- multi-component systems based on stiffness spreading method[C]//7th china-japan-korea joint symposium on optimization of structural and mechanical systems, 2012, Huangshan City, Anhui Province. 2015: 57-57.
- [7] LIU J, MA Y. A survey of manufacturing oriented topology optimization methods[J]. *Advances in Engineering Software*, 2016, 100: 161-175.
- [8] VATANABE S L, LIPPI T N, LIMA C R D, et al. Topology optimization with manufacturing constraints: A unified projection-based approach[J]. *Advances in Engineering Software*, 2016, 100: 97-112.
- [9] GUEST J K, PRŇVOST J H, BELYTSCHKO T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 61(2): 238-254.
- [10] GUEST J K. Topology optimization with multiple phase projection[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, 199(1): 123-135.
- [11] ALMEIDA S R M, PAULINO G H, SILVA E C N. A simple and effective inverse projection scheme for void distribution control in topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2009, 39(4): 359-371.
- [12] WANG F, LAZAROV B S, SIGMUND O. On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization[M]. Springer-Verlag. New York, 2011.
- [13] BRUNS T E, TORTORELLI D A. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 190(26): 3443-3459.
- [14] SIGMUND O. Morphology-based black and white filters for topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2007, 33(4-5): 401-424.
- [15] GUEST J K, ASADPOURE A, HA S H. Eliminating beta-continuation from heaviside projection and density filter algorithms[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, 44(4): 443-453.
- [16] SIGMUND O, PETERSSON J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 1998, 16(1): 68-75.
- [17] PETERSSON J, SIGMUND O. Slope constrained topology optimization[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2015, 41(8): 1417-1434.
- [18] ROJAS-LABANDA S, STOLPE M. Automatic penalty continuation in structural topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2015, 52(6): 1205-1221.
- [19] LI L, KHANDELWAL K. Volume preserving projection filters and continuation methods in topology optimization[J]. *Engineering Structures*, 2015(15), 85: 144-161.
- [20] WATADA R, OHSAKI M, KANNO Y. Nonuniqueness and symmetry of optimal topology of a shell for minimum compliance[M]. Springer-Verlag New York, 2011.
- [21] STOLPE M, SVANBERG K. On the trajectories of penalization methods for topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, 21(2): 128-139.
- [22] GUEST J K. Imposing maximum length scale in topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2009, 37(5): 463-473.
- [23] 邢晓娟, 荣见华, 邓果. 一种变频率约束限的结构拓扑优化方法[J]. *振动与冲击*, 2008, 27(10): 56-60.
XING Xiaojuan, RONG Jianhua, DENG Guo. A structural topology optimization method with variable frequency constraints[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2008, 27(10): 56-60.
- [24] 荣见华, 葛森, 邓果, 等. 基于位移和应力灵敏度的结构拓扑优化设计[J]. *力学学报*, 2009, 41(4): 518-529.
RONG Jianhua, GE Sen, DENG Guo, et al. Structural topological optimization based on displacement and stress sensitivity analyses[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2009, 41(4): 518-529.
- [25] RONG J H, YI J H. A structural topological optimization method for multi-displacement constraints and any initial topology configuration[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2010, 26(5): 735-744.
- [26] 荣见华, 张强, 葛森, 等. 基于设计空间调整的结构拓扑优化方法[J]. *力学学报*, 2010, 42(2): 256-267.
RONG Jianhua, ZHANG Qiang, GE Sen, et al. A new structural topological optimization method based on design space adjustments[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2010, 42(2): 256-267.
- [27] 俞燎宏, 荣见华, 赵志军, 等. 多工况载荷下连续体结构柔顺度拓扑优化问题的新的求解方法[J]. *机械工程学报*, 2018, 54(5): 210-219.
YU Liaohong, RONG Jianhua, ZHAO Zhijun, et al. A new solving method of the compliance topology optimization problem of continuum structures under multiple load cases[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2018, 54(5): 210-219.
- [28] RONG J H, YU L H, RONG X P, et al. A novel displacement constrained optimization approach for black and white structural topology designs under multiple load

- cases[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization , 2017(2) : 1-20.
- [29] RONG J H , XIAO T T , YU L H , et al. Continuum structural topological optimizations with stress constraints based on an active constraint technique[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering , 2016 , 108(4) : 326-360.
- [30] 石军, 荣见华, 俞燎宏, 等. 考虑载荷随机性的可行域调整的结构拓扑优化设计[J]. 机械工程学报, 2017 , 53(23) : 116-128.
- SHI Jun , RONG Jianhua , YU Liaohong , et al. Feasible domain adjustment topology optimization designs of structures under stochastic loads[J]. Journal of Mechanical Engineering , 2017 , 53(23) : 116-128.
- [31] SVANBERG K. The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering , 1987 , 24(2) : 359-373.
- [32] SVANBERG K. A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations[J]. Siam Journal on Optimization , 2009 , 12(2) : 555-573.
-
- 作者简介：荣见华，男，1963 年出生，博士，教授，博士研究生导师。主要研究方向为结构动力学与优化设计。
E-mail : rongjihua@aliyun.com
- 赵圣俊，男，1994 年出生，硕士研究生。主要研究方向为结构动力学与优化设计。
E-mail : 1226710184@qq.com
- 李方义(通信作者)，男，1978 年出生，博士，副教授，硕士研究生导师。主要研究方向为结构动力学与优化设计，可靠分析与设计。
mail : lfy703 @sina.com
- 俞燎宏，男，1982 年出生，博士，讲师。主要研究方向为结构动力学与优化设计。
E-mail : ylh310@163.com
- 荣轩霁，男，1994 年出生，硕士研究生。主要研究方向为结构动力学与优化设计。
E-mail : 812401736@qq.com
- 陈成，男，1993 年出生，硕士研究生。主要研究方向为结构动力学与优化设计。
E-mail : 1206509431@qq.com