DOI: 10.3901/JME.2019.19.092

转子运动激励下叶片的振动特性分析*

武立明^{1,2,3} 曹树谦^{1,2,3}

- (1. 天津大学力学系 天津 300354 ;
2. 天津市非线性动力学与控制重点实验室 天津 300354 ;
3. 力学国家级实验教学示范中心(天津大学) 天津 300354)

摘要:研究了航空发动机叶片在转子运动激励下的非线性动力学特性,利用一阶活塞理论来计算气动力,考虑大变形所带来的几何非线性影响,利用 Hamilton 原理建立了叶片的连续体模型,采用伽辽金法将叶片简化为单自由度模型,通过多尺度法导出了叶片在参数激励与强迫激励作用下联合共振幅频响应的一阶近似方程;分析了转子扭转角度的幅值、稳定转速、气体的来流速度以及叶片的形状参数对于叶片幅频响应特性的影响。通过解析和数值分析,表明以上的参数是促使叶片动力学行为发生变化的敏感参数。同时应用奇异性理论得到系统主参数共振-主共振稳态响应的转迁集和分岔图,并对低风速情况下的叶片进行了试验分析。

关键词:航空发动机叶片;多尺度法;联合共振;奇异性理论

中图分类号: TH113

Analysis of Vibration Characteristics of Blade under Rotor Motion

WU Liming^{1,2,3} CAO Shuqian^{1,2,3}

- (1. Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300354;
2. Tianjin Key Laboratory of Nonlinear Dynamics and Control, Tianjin 300354;
3. National Demonstration Center for Experimental Mechanics Education (Tianjin University), Tianjin 300354)

Abstract: The nonlinear dynamic characteristics of aero engine blades under rotor excitation are studied. Using the large deflection nonlinear relation and the first order piston theory of supersonic flow, the continuum model of blade is established by using Hamilton principle and simplified to a single degree of freedom model by Galerkin method. The first order approximate equation for resonance amplitude frequency response of blades under the combined action of parametric excitation and forced excitation is derived by means of multi-scale method. The influence of the amplitude of the torsional angle, the steady speed of the rotor, the velocity of gas flow and the shape parameters of the blade on the amplitude-frequency response characteristics of the blade are analysed. Through analytical and numerical analyses, it is shown that the presented parameters are sensitive parameters for the dynamical properties of blades. At the same time, by using the singularity theory, the transition set and bifurcation diagram of the principal parametric resonance-primary resonance steady-state response of the system are obtained, and the experimental analysis of the blades under low flow velocity is carried out.

Key words: aero-engine blade; multiple scales method; combined resonance; singularity theory

0 前言

航空发动机叶片是航空发动机最重要的零件之一,叶片的可靠性直接影响着发动机能否正常工作,甚至是整架飞机的安全。叶片在工作中载荷状况严酷,不仅要承受机械离心力、气动力和热负荷,还

要承受强迫振动或自激振动引起的共振和颤振等载荷。在叶片工作过程中,共振引起的叶片疲劳损伤故障比率往往占发动机零件疲劳故障 30% ~ 40%^[1-2]。叶片在振动过程中所受到的强迫激励主要是由转子-叶片系统的各种周期振动所引起的机械激励。AL-BEDDOOR 等^[3-4]基于多体动力学方法,建立了转子扭转和叶片弯曲振动的耦合模型,该模型显示了转子和叶片在模态和参数激励方面会产生明显的耦合。孙艳红等^[5-6]研究了汽轮机干摩擦阻尼器叶片在多谐波(第一、二阶低频和第一阶高频)激励

* 国家重点基础研究发展计划(2015CB057400)、国家自然科学基金(11672201, 11872045)和国家科技重大专项(2017-IV-0008-0045)资助项目。20180904 收到初稿,20190421 收到修改稿

作用下的振动。WANG 等^[7]建立了转子-叶片-轴承系统的模型，在滑动轴承支撑下将叶片考虑成单摆模型，分析了转子振动的非线性现象以及转子的非线性振动对叶片振动的影响。DIKEN 等^[8]研究了转子和叶片的耦合振动，其中考虑了转子涡动对叶片振动的影响，通过分析得到了转子在通过临界转速时，会带来叶片剧烈振动的结论，还分析了在亚临界和超临界情况下，叶片模态的变化。YAO 等^[9]分析了在可变转速、高温超音速气流共同作用下的叶片，得到了带有预扭转和预安装角的各向同性旋转叶片的 1:1 内共振的平均方程，数值结果表明系统存在周期运动和混沌运动。HAN 等^[10]考虑了榫与榫槽之间的间隙、气动力以及转子的位移激励，分析了叶片弯扭耦合振动的特性。韩刚等^[11]研究了航空发动机呼吸裂纹叶片，分析了在转子位移激励条件下联合共振的幅频响应变化规律。

以上工作虽然对转子运动激励下叶片的非线性特性有了一定研究，但是针对在转子扭转振动激励下，进行叶片的主参数共振-主共振的幅频响应分析、奇异性的分析以及试验研究还是比较欠缺。本文基于 Hamilton 原理和伽辽金方法，考虑叶片的几何大变形、气动力以及离心力的作用，利用多尺度法导出叶片主参数共振-主共振幅频响应的一阶近似方程以及分岔方程，分析了转子扭转角度的幅值、稳定转速、气体的来流速度以及叶片的形状参数对系统幅频特性曲线的影响，通过选定分岔参数和开折参数对系统幅频曲线的拓扑结构进行了分析，并对低风速情况下叶片的振动进行了试验研究。

1 叶片动力学建模

在转子运动激励下，旋转叶片的等截面如图 1 所示，叶片一端固定在半径为 R 的轮毂上，轮毂的扭转角度为 ϕ ，且将叶片等效成等截面的旋转悬臂梁。坐标系 xoy 为固定的惯性坐标系，坐标系 $x_1O_1y_1$ 为固定在轮毂上的旋转坐标系，旋转角速度为 $\dot{\theta}$ ，

图 1 旋转叶片的截面图

坐标系 $x_2O_2y_2$ 为固定在叶片上的旋转坐标系，旋转角速度为 $\dot{\theta} + \dot{\phi}$ 。叶片的长度为 L ，宽度为 b ，厚度为 h ，叶片的线密度为 ρ ，转子扭转振动的扭角 $\phi = \Omega \sin \tilde{\omega} t$ ， Ω 为扭转角度的幅值， $\tilde{\omega}$ 为扭转振动的频率 i 和 j 分别为惯性参考系 xoy 中的单位矢量， i_2 和 j_2 分别为旋转坐标系 $x_2O_2y_2$ 中的单位矢量。

在平面运动当中，变形后叶片上的一点 M 的位移为

$$\mathbf{r}_{M2} = (x + R)\mathbf{i}_2 + w\mathbf{j}_2 \quad (1)$$

式中 x 为 M 点在坐标系 $x_2O_2y_2$ 中的横坐标， $w(x, t)$ 为悬臂梁上 M 点变形的位移。

采用如下的坐标变换

$$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = A(\theta)B(\phi)\begin{pmatrix} i_2 \\ j_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中， $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ， $B(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -\phi \\ \phi & 1 \end{pmatrix}$ ，

由于其中的角度变形 ϕ 是一个小量，进行了近似线性处理，可以得到在惯性参考系中 M 点位移的表达式为

$$\mathbf{r}_M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\phi \\ \phi & 1 \end{pmatrix} \mathbf{r}_{M2} \quad (3)$$

M 点速度可以表示为

$$\dot{\mathbf{r}}_M = A(\theta)B(\phi)\dot{\mathbf{r}}_{M2} + \dot{\theta}A_\theta(\theta)B(\phi)\mathbf{r}_{M2} + \dot{\phi}A(\theta)B_\phi(\phi)\mathbf{r}_{M2} \quad (4)$$

式中， $A_\theta(\theta) = dA/d\theta$ ， $B_\phi(\phi) = dB/d\phi$ ，解得 M 点速度的展开式为

$$\dot{\mathbf{r}}_M = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \cos \theta - \beta_1 \sin \theta \\ \beta_1 \cos \theta - \alpha_1 \sin \theta \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\alpha_1 = [\dot{w}\phi + \dot{\theta}(x\phi + R\phi + w) + w\dot{\phi}]$$

$$\beta_1 = [\dot{w} + \dot{\theta}(x + R - w\phi) + (x + R)\dot{\phi}]$$

叶片的动能可以表示为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \dot{\mathbf{r}}_M^T \dot{\mathbf{r}}_M dx \quad (6)$$

将式(5)代入式(6)中得到

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} [\dot{\theta}^2 \phi^2 + (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2] \int_0^L \rho (x + R)^2 dx + \\ & \frac{1}{2} [(\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 + \dot{\theta}^2 \phi^2] \int_0^L \rho w^2 dx + \\ & \phi \dot{\phi} \int_0^L \rho w \dot{w} dx + \frac{1}{2} (1 + \phi^2) \int_0^L \rho \dot{w}^2 dx + \\ & (\dot{\theta} + \dot{\phi} + \dot{\theta} \phi^2) \int_0^L \rho (x + R) \dot{w} dx \end{aligned} \quad (7)$$

式中， ρ 为叶片的线密度， L 为叶片的长度， b 为

叶片的宽度, 其中“·”指的是对时间 t 的偏导。

动能的变分为

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \rho \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [(\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 w + \dot{\theta}^2 \phi^2 w - \phi \dot{\phi} w - \\ \dot{\phi}^2 w - 2\phi \dot{\phi} \frac{\partial w}{\partial t} - (\ddot{\phi} + 2\dot{\theta} \dot{\phi})(x+R) - \\ (1 + \phi^2) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}] \delta w dx dt + \rho \int_0^L [\phi \dot{\phi} w + \frac{\partial w}{\partial t} + \\ \phi^2 \frac{\partial w}{\partial t} + (\dot{\theta} + \dot{\phi} + \dot{\theta} \phi^2)(x+R)] \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} dx \quad (8) \end{aligned}$$

利用超音速活塞理论模拟气动压力, 气动压力采用线性势流理论的一阶活塞理论, 其计算公式在 $1.5 < Ma < 5$ 的范围内具有较高的精度。

$$\Delta p = \frac{2q_\infty}{\sqrt{(Ma)^2 - 1}} \left[\frac{(Ma)^2 - 2}{(Ma)^2 - 1} \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (9)$$

气动压力做功的变分为

$$\begin{aligned} \delta W = \int_\Omega \Delta p \delta w ds = \\ \int_\Omega \frac{2q_\infty}{\sqrt{(Ma)^2 - 1}} \left[\frac{(Ma)^2 - 2}{(Ma)^2 - 1} \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \delta w ds \quad (10) \end{aligned}$$

式中, $\sqrt{(Ma)^2 - 1}$ 为压缩性修正因子, Ma 为马赫数, $q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2$, ρ_∞ 为空气密度, V_∞ 为气体来流速度。

关于势能的计算考虑横向弯曲变形能、横向位移引起的轴向变形能和离心惯性力引起的轴向变形能。根据冯卡门的大横向位移、适度的旋转和小轴力的假设得应变和位移的非线性关系如下, 在不考虑剪切的情况下, 其轴向应变^[12]

$$\varepsilon_x = u' + \frac{1}{2} w'^2 \quad (11)$$

式中, $u(x, t)$ 为叶片的轴向位移, $w(x, t)$ 为叶片的横向位移, “'”指的是对 x 的偏导数。考虑轴向应变时忽略较小的轴向位移 $u(x, t)$ 和 u' 项, 得到轴向应变的表达式

$$\varepsilon_x \approx \frac{1}{2} w'^2 \quad (12)$$

横向和轴向变形能之和为

$$\begin{aligned} U_1 = 0.5 \int_0^L (EA \varepsilon_x^2 + EI \kappa(x)^2) dx = \\ \frac{1}{8} EA \int_0^L w'^4 dx + \frac{1}{2} EI \int_0^L \kappa(x)^2 dx \quad (13) \end{aligned}$$

式中, 根据材料力学 $\kappa(x) = \frac{w''}{(1 + w'^2)^{3/2}}$, E 和 I 分别是叶片材料的弹性模量和叶片截面的惯性矩。

设由弯曲变形引起的横截面的转角为 $\varphi(x, t)$,

由材料力学的知识可知, 其值是一个相对较小的量, 故可近似认为

$$\tan \varphi = \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi \quad (14)$$

令 $g(\varphi) = [1 + (\tan \varphi)^2]^{-\frac{3}{2}} = \cos^3 \varphi$, 对其泰勒展开得

$$g(\varphi) = \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \varphi^{2k}}{(2k)!} \right]^3 \quad n = 1, 2, \dots \quad (15)$$

所以得到

$$\kappa^2(x) = w''^2(1 - 3w'^2) \quad (16)$$

将式(16)代入式(13)得到

$$\begin{aligned} U_1 = \frac{1}{2} \int_0^L [EA \varepsilon_x^2 + EI w''^2(1 - 3w'^2)] dx = \\ \frac{1}{8} EA \int_0^L w'^4 dx + \frac{1}{2} EI \int_0^L w''^2(1 - 3w'^2) dx \quad (17) \end{aligned}$$

离心惯性力为

$$\begin{aligned} F_p = \int_x^L \rho(R+r)(\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 dr = \\ \frac{1}{2} \rho(\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 [(R+L)^2 - (R+x)^2] \quad (18) \end{aligned}$$

考虑几何刚化的效应, 故 $d\delta = \frac{1}{2} w'^2$, 所以由离心惯性力引起的轴向伸长变形能为

$$\begin{aligned} U_2 = \int_0^L F_p d\delta = \\ \frac{1}{4} \rho \int_0^L (\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 [(R+L)^2 - (R+x)^2] w'^2 dx \quad (19) \end{aligned}$$

势能的变分为

$$\begin{aligned} \delta U = U_1 + U_2 = \\ \left[\frac{1}{2} EA \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 - 3EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right] \delta w \Big|_0^L + \\ \left\{ \frac{1}{2} \rho(\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 [(R+L)^2 - (R+x)^2] \times \right. \\ \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right\} \delta w \Big|_0^L - EI \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \left[1 - 3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. 6 \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right\} \Big|_0^L \delta w + EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \times \\ \left[1 - 3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_0^L + \\ \int_0^L -\frac{3}{2} EA \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 3EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^3 \delta w dx + \\ \int_0^L EI \left\{ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \left[1 - 3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. 12 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 6 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^3 \right\} \delta w dx - \\ \int_0^L \frac{1}{2} \rho(\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} [(R+L)^2 - \right. \end{aligned}$$

$$(R+x)^2] - 2 \frac{\partial w}{\partial x} (R+x) \Big\} \delta w dx \quad (20)$$

将式(8)、(10)、(20)代入 Hamilton 变分方程

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W) dt = 0 \quad (21)$$

得到叶片的动力学方程

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left\{ \rho [(\ddot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi} - \phi\ddot{\phi})w - 2\phi\dot{\phi} \frac{\partial w}{\partial t} - \right. \\ & \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (\ddot{\phi} + 2\dot{\theta}\dot{\phi})(x+R)] + \right. \\ & \quad \left. \frac{3}{2} EA \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 3EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^3 + \right. \\ & \quad \left. \frac{2q_\infty a}{\sqrt{(Ma)^2 - 1}} \left[\frac{(Ma)^2 - 2}{(Ma)^2 - 1} \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \right\} \times \\ & \quad \delta w dx - \int_0^L EI \left\{ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} [1 - 3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2] - \right. \\ & \quad \left. 12 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 6 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^3 \right\} \delta w dx + \\ & \quad \int_0^L \frac{1}{2} \rho (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} [(R+L)^2 - \right. \\ & \quad \left. (R+x)^2] - 2 \frac{\partial w}{\partial x} (R+x) \right\} \delta w dx = 0 \quad (22) \end{aligned}$$

边界条件如下。\$x=0\$ 处

$$w=0 \quad \frac{\partial w}{\partial x}=0$$

\$x=L\$ 处

$$\begin{aligned} \delta w' : & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} [1 - 3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2] = 0 \\ \delta w : & \frac{1}{2} EA \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 - 3EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x} - \\ & EI \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} [1 - 3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2] - 6 \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right\} = 0 \end{aligned}$$

引入量纲一的参数

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \frac{R}{L} \quad \bar{w} = \frac{w}{L} \quad \bar{x} = \frac{x}{L} \\ \bar{V}_\infty &= V_\infty L \sqrt{\frac{\rho}{EI}} \quad \bar{\omega} = \tilde{\omega} L^2 \sqrt{\frac{\rho}{EI}} \quad \bar{t} = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \\ \bar{\theta} &= \dot{\theta} L^2 \sqrt{\frac{\rho}{EI}} \quad \bar{\rho}_\infty = \frac{\rho_\infty L^2}{\rho} \end{aligned}$$

将量纲一的参数代入式(22)得到

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left\{ a_1 \bar{w} - a_3 \left(\bar{x} + \frac{R}{L} \right) + a_4 \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + a_5 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right)^3 - \right. \\ & \quad 2a_9 \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \left(\frac{R}{L} + \bar{x} \right) + a_6 \left(a_7 \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) - a_8 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^4} \times \\ & \quad \left. [1 - 3 \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2] - \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} + 12a_8 \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^3} + a_9 \times \right. \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} [a_{10} - \left(\frac{R}{L} + \bar{x} \right)^2] - a_2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right\} d\bar{x} = 0 \quad (23)$$

式中系数如下所示

$$\begin{aligned} a_1 &= \bar{\theta}^2 + 2\Omega\omega\bar{\theta}\cos\omega\bar{t} - \Omega^2\omega^2(\sin\omega\bar{t})^2 \\ a_2 &= \Omega^2\omega\sin 2\omega\bar{t} \quad a_8=1 \quad a_5=3 \\ a_3 &= \Omega^2\omega\bar{\theta}(\sin 2\omega\bar{t} - \frac{\omega}{\Omega\dot{\theta}}\sin\omega\bar{t}) \quad a_4 = \frac{3AL^2}{2I} \\ a_6 &= \frac{b\rho_\infty V_\infty^2}{L\sqrt{(Ma)^2-1}} \quad a_7 = \frac{(Ma)^2-2}{(Ma)^2-1} \frac{1}{V_\infty} \\ a_9 &= \frac{1}{2}(\bar{\theta} + \Omega\omega\cos\omega\bar{t})^2 \quad a_{10} = \left(\frac{R}{L} + 1 \right)^2 \end{aligned}$$

实际表明, 结构共振时共振模态起主要作用, 而其他的模态影响较小。根据系统的实际状态, 认为外激励频率与系统的一阶模态相接近。为了简化计算, 本文只考虑第一阶模态对叶片振动响应的影响, 利用伽辽金方法将叶片简化为单自由度模型。

选择满足边界条件的模态函数进行离散^[13]

$$\begin{aligned} \bar{w}(\bar{x}, \bar{t}) &= q(\bar{t})\varphi(\bar{x}) \\ \varphi(\bar{x}) &= \frac{\sin\beta - \text{sh}\beta}{\cos\beta + \text{ch}\beta} (\sin\beta\bar{x} - \text{sh}\beta\bar{x}) + \\ & \quad \cos\beta\bar{x} - \text{ch}\beta\bar{x} \quad (24) \end{aligned}$$

式中, \$\beta=1.875\$, sh 为双曲正弦函数, ch 为双曲余弦函数。

将式(24)代入式(23)中, 并进行归一化处理, 得到单自由度的常微分方程

$$\ddot{q} + (c_1 + c_5 \sin 2\omega\bar{t})\dot{q} + (c_3 + c_{411} \cos \omega\bar{t} + c_{412} \cos 2\omega\bar{t})q + b_1 q^3 = c_2 \sin 2\omega\bar{t} - c_4 \sin \omega\bar{t} \quad (25)$$

式中, \$c_3 = -c_{31} - c_{311}\$, \$c_1 = -a_6 a_7 + \xi\$, \$\xi\$ 为系统量刚一黏性阻尼, 其余系数如下所示

$$f_2 = \Omega^2 \omega \quad f_1 = \frac{\omega}{\Omega\dot{\theta}} \quad c_4 = c_{21} f_1 \quad c_{31} = \omega_0^2$$

$$\begin{aligned} b_1 &= -\int_0^1 (a_4 \varphi_1'^2 \varphi_1'' + a_5 \varphi_1''^3 + 3a_8 \varphi_1'''' \varphi_1'^2 + \\ & \quad 12a_8 \varphi_1' \varphi_1'' \varphi_1''') \varphi_1 d\bar{x} \end{aligned}$$

$$c_{21} = -\Omega^2 \omega \bar{\theta} \int_0^1 \left(\bar{x} + \frac{R}{L} \right) \varphi_1 d\bar{x}$$

$$c_{31} = \frac{\bar{\theta}^2}{2} \int_0^1 \varphi_1 [a_{10} \varphi_1'' - \bar{x}^2 \varphi_1'' - 2\bar{x} \varphi_1' - \frac{R^2}{L^2} \varphi_1'' -$$

$$\frac{R}{L} (2\bar{x} \varphi_1'' + 2\varphi_1')] d\bar{x} + \int_0^1 \varphi_1 (a_6 \varphi_1' - a_8 \varphi_1''''') d\bar{x} + \bar{\theta}^2$$

$$c_{311} = \frac{\Omega^2 \omega^2}{4} \int_0^1 \varphi_1 [a_{10} \varphi_1'' - \bar{x}^2 \varphi_1'' - 2\bar{x} \varphi_1' - \frac{R^2}{L^2} \varphi_1'' -$$

$$\frac{R}{L} (2\bar{x} \varphi_1'' + 2\varphi_1')] d\bar{x} + \frac{\Omega^2 \omega^2}{2}$$

$$c_{411} = -2 \int_0^1 \varphi_1 [a_{10} \varphi_1'' - \bar{x}^2 \varphi_1'' - 2\bar{x} \varphi_1' - \frac{R^2}{L^2} \varphi_1'' - \frac{R^2}{L^2} \varphi_1'' - \frac{R}{L} (2\bar{x} \varphi_1'' + 2\varphi_1')] d\bar{x} + \frac{\Omega^2 \omega^2}{2}$$

2 主参数共振-主共振分析

从式(25)可以看出系统可能存在多种联合共振的情况, 通过实际对叶片的分析, 认为系统最有可能出现外部激励和参数激励联合共振的情况。下面采用多尺度法^[14]研究式(25)中的周期响应。

引入小扰动参数 ε 和调谐参数 σ , 将式(25)写成如下形式, 其中 ω_0 为系统线性的固有频率

$$\begin{aligned} \ddot{q} + \omega_0^2 q &= \varepsilon (c_2 \sin 2\omega t - c_4 \sin \omega t) - \\ &\varepsilon (c_1 + c_5 \sin 2\omega t) \dot{q} - \varepsilon b_1 q^3 - \\ &\varepsilon (c_{311} + c_{411} \cos \omega t + c_{412} \cos 2\omega t) q \end{aligned} \quad (26)$$

令

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \omega^2 + \varepsilon \sigma \\ T_0 &= t \\ T_1 &= \varepsilon t \\ X(T_0, T_1) &= X_0(T_0, T_1) + \varepsilon X_1(T_0, T_1) \\ X(T_0, T_1) &= q \end{aligned} \quad (27)$$

所以得到

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \frac{\partial X_0}{\partial T_0} + \varepsilon \left(\frac{\partial X_1}{\partial T_0} + \frac{\partial X_0}{\partial T_1} \right) \\ \frac{d^2 X}{dt^2} &= \frac{\partial^2 X_0}{\partial T_0^2} + \varepsilon \left(2 \frac{\partial^2 X_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{\partial^2 X_1}{\partial T_0^2} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

将式(27)、(28)代入式(26)中, 选取两端 ε 同次幂且让其系数相等得到

$$\frac{\partial^2 X_0}{\partial T_0^2} + \omega^2 X_0 = 0 \quad (29a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X_1}{\partial T_0^2} + \omega^2 X_1 &= -2 \frac{\partial^2 X_0}{\partial T_0 \partial T_1} - \sigma X_0 + \\ &(\omega^2 c_{311} - c_{411} \cos \omega t - \\ &\omega^2 c_{412} \cos 2\omega t) X_0 - \\ &(c_1 + \omega f_2 \sin 2\omega t) \frac{\partial X_0}{\partial T_1} - b_1 X_0^3 + \\ &\omega c_{21} (\sin 2\omega t - \omega f_1 \sin \omega t) \end{aligned} \quad (29b)$$

设

$$\begin{aligned} X_0 &= A \exp(i\omega T_0) + cc \quad A = \frac{1}{2} a \exp(i\theta) \\ a &= a(T_1) \quad \theta = \theta(T_1) \end{aligned}$$

将其代入式(29b)中得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X_1}{\partial T_0^2} + \omega^2 X_1 &= -2 \frac{\partial A}{\partial T_1} i\omega \exp(i\omega T_0) - \\ &\sigma A \exp(i\omega T_0) - i c_1 A \omega \exp(i\omega T_0) - \\ &\frac{f_2 A \omega^2}{2} \exp(3i\omega T_0) + \frac{f_2 \bar{A} \omega^2}{2} \exp(i\omega T_0) - \\ &\frac{\bar{A} c_{411}}{2} - \frac{A \omega^2 c_{412}}{2} \exp(3i\omega T_0) + \\ &c_{311} A \omega^2 \exp(i\omega T_0) - \frac{A c_{411}}{2} \exp(2i\omega T_0) - \\ &b_1 [A^3 \exp(3i\omega T_0) + 3A^2 \bar{A} \exp(i\omega T_0)] - \\ &\frac{\bar{A} \omega^2 c_{412}}{2} \exp(i\omega T_0) - \frac{i\omega c_{21}}{2} \exp(2i\omega T_0) + \\ &\frac{i\omega^2 c_{21} f_1}{2} \exp(i\omega T_0) + cc \end{aligned} \quad (30)$$

根据消除永年项条件得到

$$\begin{aligned} -2 \frac{\partial A}{\partial T_1} i\omega - \sigma A - i c_1 A \omega - \frac{f_2 \bar{A} \omega^2}{2} - \\ 3b_1 A^2 \bar{A} + c_{311} A \omega^2 - \frac{\bar{A} \omega^2 c_{412}}{2} + \frac{i\omega^2 c_{21} f_1}{2} = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

将 A 的表达式代入并分离虚实部得到

$$\begin{aligned} a \frac{\partial \theta}{\partial T_1} \omega &= -\frac{\omega^2 a c_{311}}{2} + \frac{3}{8} b_1 a^3 - \frac{c_{21} f_1 \omega^2}{2} \sin \theta + \\ &\frac{1}{2} \sigma a - \frac{f_2 a \omega^2 - c_{412} a \omega^2}{4} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \omega \frac{\partial a}{\partial T_1} &= -\frac{\omega a c_1}{2} - \frac{f_2 a \omega^2 - c_{412} a \omega^2}{4} \sin 2\theta + \\ &\frac{c_{21} f_1 \omega^2}{2} \cos \theta \end{aligned} \quad (33)$$

对于稳态运动, $\frac{\partial \theta}{\partial T_1} = 0$, $\frac{\partial a}{\partial T_1} = 0$, 得到以下

的方程

$$\begin{aligned} -\frac{\omega a c_1}{2} - \frac{f_2 a \omega^2 - c_{412} a \omega^2}{4} \sin 2\theta + \\ \frac{c_{21} f_1 \omega^2}{2} \cos \theta = 0 - \end{aligned} \quad (34a)$$

$$\begin{aligned} \frac{f_2 a \omega^2 - c_{412} a \omega^2}{4} \cos 2\theta - \frac{c_{21} f_1 \omega^2}{2} \sin \theta + \\ \frac{1}{2} \sigma a - \frac{\omega^2 a c_{311}}{2} + \frac{3}{8} b_1 a^3 = 0 \end{aligned} \quad (34b)$$

将式(34)中的两式平方相加, 得到

$$\sin \theta = \frac{4 \left[\left(\frac{f_2 a \omega^2 - c_{412} a \omega^2}{4} \right)^2 + \left(\frac{c_{21} f_1 \omega^2}{2} \right)^2 \right]}{(f_2 a \omega^2 - c_{412} a \omega^2) c_{21} f_1 \omega^2}$$

$$4 \left[\left(-\frac{1}{2} \sigma a + \frac{\omega^2 a c_{311}}{2} - \frac{3}{8} b_1 a^3 \right)^2 - \left(\frac{\omega a c_1}{2} \right)^2 \right] \quad (35)$$

$$(f_2 a \omega^2 - c_{412} a \omega^2) c_{21} f_1 \omega^2$$

将式(35)代入式(34a)中得到如下结果。

(1) 平凡解, $a=0$ 。

(2) 非平凡解 $a \neq 0$ 时, a 满足下式

$$\frac{\omega^2 a c_{311}}{2} - \frac{1}{2} \sigma a - \frac{3}{8} b_1 a^3 + \frac{f_2 a \omega^2 - c_{412} a \omega^2}{4} \times$$

$$\left\{ 1 - \frac{\left[\left(-\frac{1}{2} \sigma a + \frac{\omega^2 a c_{311}}{2} - \frac{3}{8} b_1 a^3 \right)^2 + \left(\frac{\omega a c_1}{2} \right)^2 \right]}{2 \left(\frac{f_2 a \omega^2 - c_{412} a \omega^2}{4} \right)^2 \left(\frac{c_{21} f_1 \omega^2}{2} \right)^2} - \right.$$

$$\frac{\left(\frac{f_2 a \omega^2 - c_{412} a \omega^2}{4} \right)^2 - \left(\frac{c_{21} f_1 \omega^2}{2} \right)^2}{2 \left(\frac{f_2 a \omega^2 - c_{412} a \omega^2}{4} \right)^2 \left(\frac{c_{21} f_1 \omega^2}{2} \right)^2} +$$

$$\frac{\left(\frac{f_2 a \omega^2 - c_{412} a \omega^2}{4} \right)^2 + \left(\frac{c_{21} f_1 \omega^2}{2} \right)^2}{2 \left(\frac{f_2 a \omega^2 - c_{412} a \omega^2}{4} \right)^2} -$$

$$\left. \frac{\left(-\frac{1}{2} \sigma a + \frac{\omega^2 a c_{311}}{2} - \frac{3}{8} b_1 a^3 \right)^2 - \left(\frac{\omega a c_1}{2} \right)^2}{2 \left(\frac{f_2 a \omega^2 - c_{412} a \omega^2}{4} \right)^2} \right\} = 0 \quad (36)$$

3 数值讨论与试验研究

3.1 幅频响应分析与数值验证

对解析得到的幅频响应方程式(36)进行响应分析,其中图2~5分别分析了转子的扭转振动的角度幅值 Ω 、转子的稳定转速 $\dot{\theta}$ 、气体的来流速度 V_∞ 以及叶片的形状参数对叶片主参数共振-主共振响应的影响。其中表1中的参数为图2~4的不变参数。

图2 叶片在不同扭转角度幅值下的幅频响应

表1 图1~3中的不变物理参数

参数	数值	参数	数值
叶片线密度 $\rho/(\text{kg/m})$	3.768	空气密度 $\rho_a/(\text{kg/m}^3)$	1.29
叶片长度 L/m	0.6	叶片弹性模量 E/GPa	70
叶片宽度 b/m	0.06	轮毂半径 R/m	0.2
叶片厚度 h/m	0.008	量刚-黏性阻尼 ζ	0.8

图2中给出了转子扭转振动角度的幅值对叶片共振峰值的影响,可以看出随着转子扭角幅值的增大,共振曲线的峰值是不断增大的,并且共振曲线呈现软特性的现象。转子扭角幅值的增加,增大了叶片强迫激励和参数激励的幅值,所以共振曲线的峰值是不断增大的,曲线出现软特性的原因,主要是由于非线性项前的系数 b_1 是负值所产生。

(a) 叶片在转子不同的稳定转速下的响应

(b) 共振峰左侧数值验证

图3 转子稳定转速对共振曲线的影响及其数值验证

图3a中给出了在转子不同稳定转速下,叶片幅频响应曲线的变化。可以看出随着转子转速的不断增大,叶片的共振峰发生了偏移,叶片的共振频率也在不断增大。这是由于转子转速增大,使得离心惯性力增大,从而叶片动频增大。从图像中还可以看出,随着转子转速的不断增大,叶片共振峰的峰值也在不断增大,这是由于转子转速增加,叶片受到的参数激励增大的缘故。在实际中叶片的工作状态所受到的激励为低频激励,所以激励频率主要是处于共振峰的左侧位置,从图3a中的 $\omega=2.8$ 处可以看出在激励频率不变的情况下,随着转子稳定转

速的增加,振幅是不断减小的。转子转速增加会增大参数激励项的幅值,但同时也会使得叶片动频增大从而使激励频率远离共振频率从而降低振幅,从综合效果来看,叶片动频变化产生的影响要大于参数激励项幅值变化产生的影响。为了验证这个规律,对式(25)利用 ode45 进行数值求解,选取量刚一激励频率为 2.8,得到量刚一振幅和转子稳定转速的关系,如图 3b 所示。可以看出随着转速的提高,振幅是不断降低的,数值求解的结果与图 3a 中幅频响应的规律是一致的。

图 4a 中给出了在不同的气流速度下,叶片幅频曲线的变化,可以看出随着气流速度的增加(即马赫数从 1.5 至 3 变化),叶片共振曲线的峰值是逐渐增大的,这是由于增大的来流速度,起到了负阻尼的作用。在实际中叶片主要是工作在共振峰的左侧,在 $\omega = 3.48$ 处可以看出在激励频率一定时,随着来流速度的不断增加,叶片的振幅是不断增大的。为验证这个规律,对式(25)利用 ode45 进行数值求解,结果如图 4b 所示,叶片的响应振幅随着来流速度的增加而增大,验证了图 4a 中的幅频响应的规律。

图4 气体的来流速度对共振曲线的影响及其数值验证

图 5 给出了叶片的形状参数对叶片共振曲线的影响。在图 5a 中,给出了叶片长度对共振曲线的影响,可以看出随着叶片长度的增大(0.6 ~ 1.2 m),叶片的软特性在不断加强,同时叶片的共振峰值在不

断降低,这主要是由于叶片长度的增大使得非线性项的系数 b_1 的绝对值在不断增大。在图 5b 中,给出了叶片宽度对共振幅值大小的影响,可以看出随着叶片宽度的增大(0.04 ~ 0.10 m),叶片的软特性在不断减弱,同时叶片的共振峰值在不断增大,这主要是由于叶片宽度的增大使得非线性项的系数 b_1 的绝对值在不断减小。在图 5c 中,给出了叶片厚度对共振曲线的影响,可以看出随着叶片厚度的增大(0.008 ~ 0.014 m),叶片的软特性在不断减弱,同时叶片的共振峰值在不断增大,这主要是由于叶片厚度的增大也使得非线性项的系数 b_1 的绝对值在不断减小。

图5 叶片形状参数对共振曲线的影响

3.2 奇异性分析

对式(36)展开并合并,得到系统的分岔方程

$$J_0 a^{10} + J_1 a^8 + J_2 a^6 + J_3 a^4 + J_4 a^2 + J_5 = 0 \quad (37)$$

式中系数如下所示

$$J_0 = -0.1977539062b_1^4 \quad J_1 = 0.2109375(0.5\omega^2 + 0.5c_{31} + 0.5e_{311}\omega^2\Omega^2)b_1^3$$

$$J_2 = 0.140625[-(0.5\omega^2 + 0.5c_{31} + 0.5e_{311}\omega^2\Omega^2)^2 - 0.25\omega^2c_1^2 + (-0.25e_{412}\omega^2\Omega^2 + 0.25\omega^2\Omega^2)^2]b_1^2$$

$$J_3 = 0.03515625e_{21}^2e_1^4\Omega^2b_1^2 - 0.75[-(0.5\omega^2 + 0.5c_{31} + 0.5e_{311}\omega^2\Omega^2)^2 - 0.25c_1^2\omega^2 + (0.25\omega^2\Omega^2 - 0.25e_{412}\omega^2\Omega^2)^2](0.5\omega^2 + 0.5c_{31} + 0.5e_{311}\omega^2\Omega^2)b_1 + 0.75(0.5\omega^2 + 0.5c_{31} + 0.5e_{311}\omega^2\Omega^2) \times b_1[(0.5\omega^2 + 0.5c_{31} + 0.5e_{311}\omega^2\Omega^2)^2 + 0.25c_1^2\omega^2 - (-0.25e_{412}\omega^2\Omega^2 + 0.25\omega^2\Omega^2)^2]$$

$$J_4 = -0.1875(-0.25e_{412}\omega^2\Omega^2 + 0.25\omega^2\Omega^2)e_{21}^2e_1^2 \times \omega^4\Omega^2b_1 - 0.1875e_{21}^2e_1^2\omega^4\Omega^2(0.5\omega^2 + 0.5c_{31} + 0.5e_{311}\omega^2\Omega^2)b_1 - [(0.5\omega^2 + 0.5c_{31} + 0.5e_{311}\omega^2\Omega^2)^2 + 0.25\omega^2c_1^2 - (0.25\omega^2\Omega^2 - 0.25e_{412}\omega^2\Omega^2)^2] \times [(0.5\omega^2 + 0.5c_{31} + 0.5e_{311}\omega^2\Omega^2)^2 + 0.25\omega^2c_1^2 - (0.25\omega^2\Omega^2 - 0.25e_{412}\omega^2\Omega^2)^2]$$

$$J_5 = 0.5(0.25\omega^2\Omega^2 - 0.25e_{412}\omega^2\Omega^2)e_{21}^2 \times e_1^2\omega^4\Omega^2(0.5\omega^2 + 0.5c_{31} + 0.5e_{311}\omega^2\Omega^2 - 0.25e_{412}\omega^2\Omega^2 + 0.25\omega^2\Omega^2) + 0.25e_{21}^2e_1^2\omega^4 \times \Omega^2[(0.5\omega^2 + 0.5c_{31} + 0.5e_{311}\omega^2\Omega^2)^2 + 0.25\omega^2c_1^2 - (0.25\omega^2\Omega^2 - 0.25e_{412}\omega^2\Omega^2)^2]$$

$$e_{21} = -\Omega^2\omega\bar{\theta}\int_0^1(\bar{x} + \frac{R}{L})\phi_1d\bar{x}$$

$$e_{311} = \frac{\Omega^2}{4}\int_0^1\phi_1[a_{10}\phi_1'' - \bar{x}^2\phi_1'' - 2\bar{x}\phi_1' - \frac{R^2}{L^2}\phi_1'' -$$

$$\frac{R}{L}(2\bar{x}\phi_1'' + 2\phi_1')d\bar{x} + \frac{\Omega^2}{2}$$

$$e_{412} = -\frac{\Omega^2}{2}\int_0^1\phi_1[a_{10}\phi_1'' - \bar{x}^2\phi_1'' - 2\bar{x}\phi_1' - \frac{R^2}{L^2}\phi_1'' -$$

$$\frac{R}{L}(2\bar{x}\phi_1'' + 2\phi_1')d\bar{x} + \frac{\Omega^2}{2}$$

令 $X = a^2$ 得到

$$J_0X^5 + J_1X^4 + J_2X^3 + J_3X^2 + J_4X + J_5 = 0 \quad (38)$$

对式(38)进行线性变换, $X = y - \frac{J_1}{5J_0}$ 且令

$$h_i = \frac{J_i}{J_0} \quad i=1, 2, \dots, 5$$

可以转化为余维三分岔方程

$$y^5 - \lambda + \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 = 0 \quad (39)$$

$$\lambda = -\frac{4h_1^5}{3125} + \frac{h_1^3h_2}{125} - \frac{h_1^2h_3}{25} + \frac{h_1h_4}{5} - h_5$$

$$\alpha = -\frac{2h_1^2}{5} + h_2, \quad \beta = \frac{4h_1^3}{25} - \frac{3h_1h_2}{5} + h_3$$

$$\gamma = -\frac{3h_1^4}{125} + \frac{3h_1^2h_2}{25} - \frac{2h_1h_3}{5} + h_4$$

选取 λ 为分岔参数 α, β, γ 为开折参数, 所以式(39)可视为 3 参数的普适开折^[15], 即

$$G = y^5 - \lambda + \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 \quad (40)$$

(1) $\gamma = 0$ 时, 分岔点集

$$B = \{(\alpha, \beta, 0) | G = G_y = G_\lambda = 0\} = \Phi$$

滞后点集

$$H = \{(\alpha, \beta, 0) | G = G_y = G_{yy} = 0\} =$$

$$\{(\alpha, \beta, 0) | \alpha = \frac{3}{2}\beta\sqrt{\frac{\beta}{10}}\}$$

双极限集

$$D = \Phi$$

式中, Φ 为空集。

(2) $\beta = 0$ 时, 分岔点集

$$B = \{(\alpha, 0, \gamma) | G = G_y = G_\lambda = 0\} = \Phi$$

滞后点集

$$H = \{(\alpha, 0, \gamma) | G = G_y = G_{yy} = 0\} =$$

$$\{(\alpha, 0, \gamma) | \alpha = \frac{9}{20}\gamma^2\}$$

双极限集

$$D = \Phi$$

(3) $\alpha = 0$ 时, 分岔点集

$$B = \{(0, \beta, \gamma) | G = G_y = G_\lambda = 0\} = \Phi$$

滞后点集

$$H = \{(0, \beta, \gamma) | G = G_y = G_{yy} = 0\} =$$

$$\{(0, \beta, \gamma) | \beta = \gamma\sqrt{-\frac{\gamma}{5}}\}$$

双极限集

$$D = \Phi$$

在上述的三种情况下,系统的转迁集和分岔图见图 6~8。从分岔图可以看出在图 6 的 I 区域和图 7 的 I 区域内,没有出现极限点和鞍结分岔,即系统的频率响应曲线不会出现多值和跳跃的现象。同时,在其他区域会存在多个极限点。由此可知,为了避免系统出现分岔和跳跃的现象,在进行系统参数设计时,应将参数选定在图 6 的 I 区域和图 7 的 I 区域,系统便不会出现多值和跳跃的现象。反之,如果将参数选择在曲线的多值区域,系统的频响曲线便会出现分岔、多值和跳跃的现象。

图 6 转迁集及其分岔图($\gamma=0$)

图 7 转迁集及其分岔图($\beta=0$)

图 8 转迁集及其分岔图($\alpha=0$)

3.3 低风速试验研究

在试验中忽略了由于转子稳定转速所带来的叶片刚度的变化,主要研究叶片在周期位移激励以及气动力的作用下,振动响应的变化。试验装置如图 9 所示。试验中激励器的激励频率是 40 Hz,通过调节功率放大器的旋钮,分别选用 1.5 V 和 2.0 V 两种激励电压来提供不同的激励振幅。通过激光测振仪测定叶片振动的位移变化,并将信号输入 PSV 动态信号测试分析系统,导出数据并用 Matlab 计算出在不同风速下叶片振动的振幅,其中试验中叶片物理参数如表 2 所示。

图 9 低风速试验装置

表 2 试验中叶片物理参数

参数	数值	参数	数值
叶片密度 $\rho/(\text{kg}/\text{m}^3)$	0.5495	叶片长度 L/m	0.35
叶片宽度 b/m	0.035	叶片厚度 h/m	0.002

试验结果如图 10 所示,可以看出在低风速下,周期位移激励的频率和振幅恒定时,随着来流速度

的不断增加,叶片振动的振幅是不断增大的;同时在激励频率和来流速度不变的情况下,叶片振动的振幅会随着周期位移激励幅值的增加而增大,在一定程度上可以与高风速下的幅频响应的规律形成对照。在本试验中主要是探究了低风速下叶片的振动响应特性,原因主要有两个方面,一方面由于试验设备的限制,在高风速风洞中难以实现叶片的运动激励;另一方面是在低风速下受周期位移激励的叶片的试验探究的文献比较少见,研究还有待深入。

图10 不同来流速度下叶片振动的振幅

4 结论

(1) 在气体来流速度、转子稳定转速和叶片形状参数一定时,由于扭转振动的角度幅值的增加增大了叶片所受的强迫激励和参数激励,所以叶片幅频响应的峰值会随着转子扭振幅值的增大而增大。

(2) 在气体来流速度、转子扭振幅值和叶片物理参数一定时,转子稳定转速的增加增大了叶片的动频,使得叶片幅频响应共振峰的位置发生右移。同时转子转速的增加,增大了叶片的参数激励项,使得叶片共振峰的峰值也在增大。叶片正常工作在曲线共振峰的左侧,在激励频率不变的情况下,由于叶片动频变化所产生的影响要大于参数激励项幅值变化的影响,所以随着稳定转速的增加,叶片振动的幅值是不断减小的,并通过对叶片方程的数值求解验证了这一规律的正确性。

(3) 在转子扭振幅值、转子稳定转速和叶片形状参数一定时,在 $1.5Ma \sim 3Ma$ 的范围内叶片共振峰的峰值会随着气体来流速度的增加而增大。叶片正常工作在幅频曲线共振峰的左侧,在激励频率不变的情况下,由于气体来流速度的增加起到了负阻尼的作用,所以叶片振动幅值是不断增大的,并通过对叶片方程的数值求解,验证了这一规律的正确性。叶片的形状参数(长度、宽度和厚度)对叶片共振曲线的影响主要是通过影响非线性项的系数,从

而来影响叶片共振响应的特性。

(4) 系统的奇异性分析表明,在开折参数的界定下,将系统分成6个区域,在进行系统参数设计时为避免系统出现分岔和跳跃现象,应将参数选定在图6的I区域和图7的I区域内,系统便不会出现多值和跳跃的现象。

(5) 低风速下的试验表明,在激励频率不变的情况下,风速增加会增大叶片的振动振幅;同时周期位移激励振幅的增加,也会增大叶片的响应振幅,与高风速下的幅频规律形成一定的对照。

参 考 文 献

- [1] 金向明,高德平,蔡显新,等. 整体离心叶轮叶片的振动可靠性分析[J]. 航空动力学报, 2004, 19(5): 610-613.
JIN Xiangming, GAO Deping, CAI Xianxin, et al. Analysis of integrated centrifugal impeller blade vibration reliability[J]. Journal of Aeronautical Power, 2004, 19(5): 610-613.
- [2] 刘庆琰. 发动机级压气机转子叶片断裂分析[J]. 失效分析与预防, 2007, 2(2): 34-36.
LIU Qingquan. Fracture analysis on rotor blades of compressor for a series engine[J]. Failure Analysis and Prevention, 2007, 2(2): 34-36.
- [3] Al-BEDDOOR B O. Vibrations of a rotating blade with flexible coupling in the drive system[J]. ASME Pressure Vessels Piping, PVP, 1998, 368: 69-76.
- [4] Al-BEDDOOR B O. Reduced-order nonlinear dynamic model of coupled shaft-torsional and blade-bending vibrations in rotors[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines & Power, 2001, 123(1): 82-88.
- [5] 孙艳红. 多频激励下干摩擦阻尼叶片的共振响应[D]. 天津: 天津大学, 2004.
SUN Yanhong. Resonances of dry-friction damper turbine blades under multi-harmonic excitation[D]. Tianjin: Tianjin University, 2004.
- [6] 丁千,孙艳红. 干摩擦阻尼叶片多谐波激励下的共振响应[J]. 振动与冲击, 2005, 24(4): 12-18.
DING Qian, SUN Yanhong. Resonances of dry-friction damper turbine blades under multi-harmonic excitation[J]. Journal of Vibration and Shock, 2005, 24(4): 12-18.
- [7] WANG L, CAO D Q, HUANG W. Nonlinear coupled dynamics of flexible blade-rotor-bearing systems[J]. Tribology International, 2010, 43(4): 759-778.
- [8] DIKEN H, ALNEFAIE K. Effect of unbalanced rotor whirl on blade vibrations[J]. Journal of Sound & Vibration, 2011, 330(14): 3498-3506.
- [9] YAO M H, CHEN Y P, ZHANG W. Nonlinear vibrations of blade with varying rotating speed[J]. Nonlinear

- Dynamics , 2012 , 68(4) : 487-504.
- [10] HAN G , CHEN Y. Principal resonance bifurcation of bending-torsion coupling of aero-engine compressor blade with assembled clearance under lateral displacement excitation of rotor shaft[J]. Nonlinear Dynamics , 2014 , 78(3) : 2049-2058.
- [11] 韩刚, 陈予恕. 受转子位移激励的航空压气机呼吸裂纹叶片的联合共振[J]. 振动与冲击, 2015 , 34(18) : 87-93.
- HAN Gang , CHEN Yushu. Combination resonance of aero-engine compressor blade with a breathing crack under displacement excitation of rotor shaft[J]. Journal of Vibration and Shock , 2015 , 34(18) : 87-93.
- [12] 吴恒立, 孙君宁. 薄板和三维体应变位移关系的二次完整表达式——兼评 T.Von Karman 方程[J]. 重庆交通大学学报, 2002 , 21(1) : 9-11.
- WU Hengli , SUN Junning. The 2nd order complete formula with relationship of strain and displacement in the thin plate and three dimensions body[J]. Journal of Chongqing Jiaotong University , 2002 , 21(1) : 9-11.
- [13] 曹树谦, 张文德, 萧龙翔. 振动结构模态分析[M]. 天津: 天津大学出版社, 2014.
- CAO Shuqian , ZHANG Wende , XIAO Longxiang. Modal analysis of vibration structure[M]. Tianjin : Tianjin University Press , 2014.
- [14] 陈予恕. 非线性振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
- CHEN Yushu. Nonlinear vibration[M]. Beijing : Higher Education Press , 2002.
- [15] 符文彬, 唐驾时. 强迫 Duffing 振动系统的主共振鞍结分岔控制[J]. 振动工程学报, 2004 , 17(3) : 365-368.
- FU Wenbin , TANG Jiashi. Primary resonance saddle-node bifurcation control of forced duffing system[J]. Journal of Vibration Engineering , 2004 , 17(3) : 365-368.
-
- 作者简介: 武立明, 男, 1993 年出生。主要研究方向为旋转机械非线性动力学。
E-mail : limingwu@tju.edu.cn
- 曹树谦(通信作者), 男, 1964 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为旋转机械非线性动力学、结构动力学与优化。
E-mail : sqcao@tju.edu.cn