DOI: 10.3901/JME.2018.03.036

四自由度 2PPaR 并联机构运动学及性能分析*

吴存存^{1,2} 杨桂林² 陈庆盈² 张 驰² 刘树林¹

(1. 上海大学机电工程与自动化学院 上海 200240;

2. 中国科学院宁波材料技术与工程研究所浙江省机器人与智能制造装备技术重点实验室 宁波 315201)

摘要: 提出一种可以实现三个移动和一个转动(3T1R)的新型四自由度并联机构—2PPaR 并联机构, 它通过两个转动副将两条相同支链与动平台相连, 每条支链均采用平行四边形机构, 通过安装在水平和垂直方向的两台直线电机驱动。该并联机构具有结构简单、构型对称、工作空间大、速度快且定位精度高的特点, 可广泛用于高速高精度的分拣、包装、码垛操作中, 具有较好的工业应用前景。基于螺旋理论验证了该机构自由度的数目和性质, 分析了该机构的运动学特性, 得到了其位置的封闭解, 并通过算例进行了验证。基于机构的 Jacobian 矩阵分析了该机构的奇异性, 给出了几种典型的奇异构型, 利用解析法和数值法确定了机构的可达位置工作空间, 分析姿态角和各设计参数对可达位置工作空间体积的影响, 研究了机构可达位置工作空间的形状及满足的几何约束条件, 为后续机构的优化设计和轨迹规划提供理论依据。

关键词: 并联机构; 自由度; 运动学; 奇异性; 工作空间

中图分类号: TG156

Kinematic and Performance Analysis of a 4-DOF 2PPaR Parallel Manipulator

WU Cuncun^{1,2} YANG Guilin² CHEN Chinyin² ZHANG Chi² LIU Shulin¹

(1. School of Mechatronic Engineering and Automation, Shanghai University, Shanghai 200240;

2. Zhejiang Key Laboratory of Robotics and Intelligent Equipment Technology, Ningbo Institute of Materials Technology and Engineering, Chinese Academy of Sciences, Ningbo 315201)

Abstract: A new four-degree-of-freedom (4-DOF) 2PPaR parallel manipulator that can produce 3-DOF translations and 1-DOF rotation (3T1R), has been proposed. It has two identical legs connected to the moving platform through passive revolute joints, and each leg is driven by two linear motors that are perpendicular to each other. Due to such a unique kinematic structure, the 4-DOF parallel manipulator has the advantages of simple kinematics, large workspace, high speed, and high positioning accuracy. These advantages make it an appropriate candidate for high-speed and high-precision pick-and-place operations. To validate the proposed parallel manipulator design, mobility analysis is conducted based on screw theory. To understand the kinematic characteristics of the parallel manipulator, the forward kinematics and the inverse kinematics are studied, the closed solution of the position solutions are obtained, and the possible singularities are analysed by the velocity mapping model. Finally, the reachable workspace and the possible workspace shapes are discussed by numerical method and analytic method in details. The research of the parallel manipulator has significant guide for the following researches such as design optimization and trajectory planning.

Key words: parallel manipulator; degree-of-freedom; kinematics; singularity; workspace

0 前言

四自由度并联机构特别是 3T1R(T 代表移动, R 代表转动)并联机构在高速分拣操作中得到了广泛的应用^[1]。

目前, 在市场上应用最广的 3T1R 并联机构主要有两种类型, 第一种是基于三自由度 Delta 机器人的设计研发的。这类高速并联机械手^[2]最早是由 CLAVEL 发明, 它由外转动副驱动且含平行四边形支链, 通过在定、动平台之间加装 RUPU 中间支链来实现转动, 末端由多条支链协同操作, 整体刚度, 末端执行器可以达到很高的速度与加速度^[3], 在快速重复性作业场合应用广泛。由于中间支链的可伸缩杆通过一对分离的万向节连接到动、定平台

* 国家自然科学基金(51575331, 51475448, U1509202)和宁波市新一代机器人核心部件关键技术创新团队(2016B10016)资助项目。20161130 收到初稿, 20170907 收到修改稿

上, 较难实现平稳和精确的运动。

第二种是 PIERROT 等发明的一类由 4 条 R-(SS)² 支链和双平台组成的高速并联机械手, 即 H4^[4]、I4^[5]、Par4^[6]和 Heli4^[7], 其特点是具有双动平台结构, 通过不同形式的传动机构将两子平台之间的相对运动转化为末端执行器绕 z 轴的转动。这类并联机构可实现平稳的转动运动及较大的转动范围, 但双动平台结构增加运动部分的质量, 在结构设计上也较为复杂。类似的机构还有黄田等^[8-11]提出的 CrossIV 系列高速并联机械手, Penta Robotics 公司推出的 Veloce 并联机构等^[12]。

考虑到双动平台结构存在的问题, 一类具有单动平台的并联机构成为研究热点, 并取得了较好的研究进展, 如李泽湘等^[13]提出的 4-RRPaR 并联机构和 4-PRPaR 并联机构; SALGADO 等^[14]提出的 SMG 并联机构; KIM 等^[15]提出的 4-DOF 3T1R 并联机构; WU 等^[16]提出 4-RRPaRR 并联机构; ANGELES 等^[17]提出一种新颖的由两条相同 4-DOF 串联支链组成的 SMG 并联机构; 刘辛军等^[18-19]则创新性地提出一类能够实现 4-DOF 3T1R 运动的全对称 X4 并联机构和 4-RRPaRR 并联机构。虽然受机械结构、杆件布局、机构奇异性和支链间机械干涉的影响, 这些已有并联机构的工作空间尤其是转动工作空间尚有待进一步增大, 但上述研究尤其是文献[17-19]的研究工作为设计单动平台、结构对称的 4-DOF 3T1R 并联机构奠定了基础。

受到文献[17-20]的启发, 并考虑到现有四自由度 3T1R 并联机构存在的问题, 本文期望能够提出一种结构简单对称、工作空间较大、转动能力较强的四自由度 3T1R 并联机构。由于平行四边形机构可保证输出杆件相对于输入杆件保持固定的方向^[20], 在 3T1R 并联机构的构型设计时可考虑引入平行四边形机构。

本文以新型的 2PPPaR 并联机构为研究对象, 基于螺旋理论验证了该并联机构的自由度数目和性质, 证明了该机构能够实现 3T1R 运动。同时对该并联机构的运动学模型、奇异性和工作空间方面的特性做了详细分析, 旨在为后续机构的优化设计和样机开发提供重要的理论基础。研究结果表明, 该并联机构特别适合高速物流生产线上物料的分拣、码垛和包装等操作, 具有较好的应用前景。

1 2PPPaR 并联机构简介

1.1 机构模型

2PPPaR 并联机构的模型如图 1~3 所示, 该并

联机构包括定平台、动平台、第 I 支链和第 II 支链, 其中两条 PPPaR(P 代表移动副, Pa 代表平行四边形机构, R 代表转动副)支链具有相同的结构, 呈对称分布。在每条支链上, 第一、二个移动副(P)是主动副, 它们彼此垂直放置, 可以通过安装在水平和垂直方向的两台直线电机驱动; 第一个移动副(P)与定平台相连接, 转动副(R)与动平台相连接; 在每一条支链中均采用一个由 4 个同轴向转动副(R)构成的闭合回路(简称平行四边形机构 Pa), 其输入杆刚性地连接到两个移动副(P), 输出杆通过被动转动副(R)

图 1 四自由度 2PPPaR 并联机构

图 2 四自由度 2PPPaR 并联机构的运动副回路图

(a) 四自由度 2PPPaR 并联机构的侧视图

(b) 四自由度 2PPPaR 并联机构的俯视图

图 3 四自由度 2PPPaR 并联机构的结构简图

垂直地连接到动平台。在机构运动过程中,动平台始终平行于 xoy 所在的平面。因而,每条支链都是具有 3T1R 运动能力(即沿着 x , y 和 z 轴的平移和绕 z 轴的旋转)的四自由度运动链,故由两个相同 PPPaR 支链支撑的动平台可实现期望的四自由度 3T1R 运动。

如图 3 所示,定坐标系 $\{B\}$: $o-xyz$ 固定在定平台上,原点 o 位于平行于导轨的中心线的起始端, z 轴平行于支链中第二个移动副(P)的轴线方向, y 轴平行于支链中第一个移动副(P)的轴线方向, x 轴方向通过右手定则确定;动坐标系 $\{E\}$: $p-x'y'z'$ 的原点 p 位于动平台中心,为分析机构时方便,在不失一般性的前提下,假定在动平台的初始姿态,动坐标系 $\{E\}$ 的轴线平行于定坐标系 $\{B\}$ 的对应轴线。

2PPPaR 并联机构独立的输入参数为 (q_1, q_2, q_3, q_4) , 即主动移动副的位置,输出参数为 (x, y, z, θ) , 即动平台的位姿。该并联机构的结构参数如表 1 描述,其中 i 表示主动副的数目, $i=1,2,3,4$; j 表示支链数目, $j=1,2$ 或 I, II。考虑到机构的设计要求和应用场合,需要满足如下约束条件: $a \leq b$, $0 \leq \alpha_j \leq \pi$ 。

表 1 2PPPaR 并联机构的结构参数

符号/单位	参数几何意义
a/m	转动副 P_1 到 P_2 的距离
b/m	xoy 平面上两条线性导轨之间的距离
d/m	杆件 C_1C_2 中心 C_j 到动平台 P_1P_2 的距离
q_j/m	主动移动副 B_j 位移
l/m	平行四边形机构的杆长 B_1C_{j1} 或杆长 B_2C_{j2}
L_1/m	y 方向的导轨长度
L_2/m	z 方向的导轨长度
α_j/rad	平行四边形机构中 $B_{j1}B_{j2}$ 到 $B_{j1}C_{j1}$ 的角度
θ/rad	动平台的转动角度

1.2 自由度分析

自由度分析的目的在于验证提出机构是否具有四个自由度及能否实现 3T1R 运动。此外,它也是保证机构有确定运动时选择驱动电机数目的基础。

该并联机构中含有闭环子链(即 4R 平行四边形机构),为了将闭环子链的机构转换为一般并联机构进行分析,首先把闭环子链看作一个多自由度的广义运动副,然后通过约束分析,确定其两个运动副元素间相对自由度的数目和性质,再以相应的若干单自由度运动副代替,形成一个串联链,用以代替并联机构分支中的闭环,使原来复杂的机构变成等自由度的不含闭环的并联机构^[21]。

2PPPaR 并联机构的定坐标系 $\{B\}$ 和动坐标系 $\{E\}$

分别如图 3 所示,则 B_i 和 P_j 在定坐标系 $\{B\}$ 中的坐标表示为

$$\begin{aligned} B_1 &: (-b/2, q_1, 0) & B_2 &: (b/2, q_2, 0) \\ B_3 &: (-b/2, q_1, q_3) & B_4 &: (b/2, q_2, q_4) \\ P_1 &: (-b/2 + l\sin\alpha_1, q_1, q_3 - d - l\cos\alpha_1) \\ P_2 &: (b/2 - l\sin\alpha_2, q_2, q_4 - d - l\cos\alpha_2) \end{aligned} \quad (1)$$

在定坐标系 $\{B\}$ 中对第 I 分支进行分析,分支 I 的运动螺旋可以表示为

$$\begin{cases} \$_{11} = (0 & 0 & 0 & ; & -b/2 & q_1 & 0) \\ \$_{12} = (0 & 0 & 0 & ; & -b/2 & q_1 & q_3) \\ \$_{13} = (0 & 0 & 0 & ; & \cos\alpha_1 & 0 & \sin\alpha_1) \\ \$_{14} = (0 & 0 & 0 & ; & q_1 & b/2 - l\sin\alpha_1 & 0) \end{cases} \quad (2)$$

式中, $\$_{11}$ 表示第 I 分支的第一个移动副的运动螺旋, $\$_{12}$ 表示第 I 分支的第二个移动副的运动螺旋, $\$_{13}$ 表示 4R 平行四边形机构的等效运动螺旋, $\$_{14}$ 表示转动副的运动螺旋。对式(2)求反螺旋得

$$\begin{cases} \$_{11}^r = (0 & 0 & 0 & ; & 1 & 0 & 0) \\ \$_{12}^r = (0 & 0 & 0 & ; & 0 & 1 & 0) \end{cases} \quad (3)$$

同理,分支 II 的运动螺旋可表示为

$$\begin{cases} \$_{21} = (0 & 0 & 0 & ; & b/2 & q_2 & 0) \\ \$_{22} = (0 & 0 & 0 & ; & b/2 & q_2 & q_4) \\ \$_{23} = (0 & 0 & 0 & ; & \cos\alpha_2 & 0 & -\sin\alpha_2) \\ \$_{24} = (0 & 0 & 0 & ; & q_2 & -b/2 + l\sin\alpha_2 & 0) \end{cases} \quad (4)$$

对式(4)求反螺旋得

$$\begin{cases} \$_{21}^r = (0 & 0 & 0 & ; & 1 & 0 & 0) \\ \$_{22}^r = (0 & 0 & 0 & ; & 0 & 1 & 0) \end{cases} \quad (5)$$

因此,2PPPaR 并联机构的约束螺旋系为

$$\begin{cases} \$_1^r = (0 & 0 & 0 & ; & 1 & 0 & 0) \\ \$_2^r = (0 & 0 & 0 & ; & 0 & 1 & 0) \end{cases} \quad (6)$$

对式(6)求反螺旋,得动平台的运动螺旋系为

$$\begin{cases} \$_1^m = (0 & 0 & 1 & ; & 0 & 0 & 0) \\ \$_2^m = (0 & 0 & 0 & ; & 1 & 0 & 0) \\ \$_3^m = (0 & 0 & 0 & ; & 0 & 1 & 0) \\ \$_4^m = (0 & 0 & 0 & ; & 0 & 0 & 1) \end{cases} \quad (7)$$

式(7)中第一个运动螺旋表示动平台有一个绕 z 轴转动的自由度,后三个运动螺旋表示动平台沿 x 、 y 和 z 轴方向的移动自由度。

在该机构任何可能的运动过程中,式(2)~(6)总保持不变,公共约束和冗余约束也保持不变,自由度是全周的。因此,证明 2PPPaR 并联机构具有四个自由度,能实现 3T1R 运动。

2 位置分析

位置分析的目的是找出主动关节的位移和末端执行器的姿态之间的运动学关系。如图 3 和表 1 所示, 设 2PPPaR 并联机构主动关节的位置坐标见式(1), 末端执行器的位置由矢量 $\mathbf{P} = (x, y, z)$ 给出, 姿态用转动角度 θ 表示。根据 2PPPaR 并联机构的运动特性, 并联机构从定坐标系 $\{\mathbf{B}\}$ 到动坐标系 $\{\mathbf{E}\}$ 的转换矩阵 $\mathbf{T}_{BE}$ ($\mathbf{T}_{BE} \in \text{SE}(3)$) 为

$$\mathbf{T}_{BE} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{BE} & \mathbf{P}_{BE} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & x \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

式中, $\mathbf{R}_{BE} \in \text{SO}(3)$ 和 $\mathbf{P}_{BE} \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$ 分别表示动平台相对于定平台的方向和位置。

2.1 位置正解

位置正解是当机构的结构参数和主动关节的位置已知时求解末端执行器的姿态, 即 (q_1, q_2, q_3, q_4) 已知时求动平台位姿 (x, y, z, θ) 。

在 2PPPaR 并联机构中, $\mathbf{B}_i$ 和 $\mathbf{P}_j$ 在定坐标系 $\{\mathbf{B}\}$ 中的坐标如式(1)所示。 $\mathbf{P}_j$ 在动坐标系 $\{\mathbf{E}\}$ 的坐标为 $\mathbf{P}'_j: (-a/2, 0, 0)$, $\mathbf{P}'_2: (a/2, 0, 0)$, 则 $\mathbf{P}_j$ 在定坐标系 $\{\mathbf{B}\}$ 的坐标也可通过转换矩阵 $\mathbf{T}_{BE}$ 表示为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_1^T & \mathbf{P}_2^T \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{BE} \begin{pmatrix} \mathbf{P}'_1^T & \mathbf{P}'_2^T \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

将 $\mathbf{P}_j$ 在动坐标系 $\{\mathbf{E}\}$ 的坐标代入由式(9)可求

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &: (x - (a \cos \theta) / 2, y - (a \sin \theta) / 2, z) \\ \mathbf{P}_2 &: (x + (a \cos \theta) / 2, y + (a \sin \theta) / 2, z) \end{aligned} \quad (10)$$

根据图 3 所示几何关系, 由式(1)可确定 $\mathbf{P}_j$ 在定坐标系 $\{\mathbf{B}\}$ 的另一种坐标表达形式如下

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &: (-b/2 + l \sin \alpha_1, q_1, q_3 - d - l \cos \alpha_1) \\ \mathbf{P}_2 &: (b/2 - l \sin \alpha_2, q_2, q_4 - d - l \cos \alpha_2) \end{aligned} \quad (11)$$

结合 $\mathbf{P}_j$ 在定坐标系 $\{\mathbf{B}\}$ 的两种坐标表示, 消去中间量 $\sin \alpha_j$ 和 $\cos \alpha_j$ ($j=1, 2$), 整理后可确定如下约束关系

$$\begin{aligned} y - (a \sin \theta) / 2 &= q_1 \\ y + (a \sin \theta) / 2 &= q_2 \\ [x + (b - a \cos \theta) / 2]^2 + (z + d - q_3)^2 &= l^2 \\ [x - (b - a \cos \theta) / 2]^2 + (z + d - q_4)^2 &= l^2 \end{aligned} \quad (12)$$

由式(12)可知, 2PPPaR 并联机构沿 y 方向的工

作空间与其他方向是独立的, 只与该方向上驱动电机的行程有关, 而与其他参数无关。解方程组可求得 2PPPaR 并联机构位置正解的封闭解如下

$$\begin{cases} y = (q_1 + q_2) / 2 \\ \theta = \pm \arcsin[(q_2 - q_1) / a] \\ x = \pm [(q_3 - q_4) \sqrt{4l^2 - m^2}] / 2m \\ z = \frac{q_3 + q_4}{2} - d \pm \frac{(b - a \cos \theta) \sqrt{4l^2 - m^2}}{2m} \\ m = \sqrt{(b - a \cos \theta)^2 + (q_3 - q_4)^2} \end{cases} \quad (13)$$

式(13)表明, 2PPPaR 并联机构的移动副(P)作为驱动副时, 机构的位置正解可求, 且正解公式简单, 容易求解, 最多存在 8 组解, 从而证明 2PPPaR 并联机构一个非常显著的特点——运动学分析简单。

2.2 位置反解

位置反解是当机构的结构参数和末端执行器的姿态 (x, y, z, θ) 已知, 即从定坐标系 $\{\mathbf{B}\}$ 到动坐标系 $\{\mathbf{E}\}$ 的转换矩阵 $\mathbf{T}_{BE}$ 已知时, 求解主动关节的位置 (q_1, q_2, q_3, q_4) 。

$\mathbf{P}_j$ 在定坐标系 $\{\mathbf{B}\}$ 的坐标通过转换矩阵 $\mathbf{T}_{BE}$ 可确定如式(10), 同理可求 $\mathbf{C}_j$ 在定坐标系 $\{\mathbf{B}\}$ 的坐标

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &: (x - (a \cos \theta) / 2, y - (a \sin \theta) / 2, z + d) \\ \mathbf{C}_2 &: (x + (a \cos \theta) / 2, y + (a \sin \theta) / 2, z + d) \end{aligned} \quad (14)$$

$\mathbf{B}_i$ 在定坐标系 $\{\mathbf{B}\}$ 的坐标如式(1)所示。根据图 3 可知, $\mathbf{B}_3$ 与 $\mathbf{P}_1$ 、 $\mathbf{B}_4$ 与 $\mathbf{P}_2$ 在 y 方向的投影相等; 另外不考虑杆件重量和杆件变形的影响, 并联机构在运动过程中杆长始终保持不变, 即满足: $\|\mathbf{B}_3 \mathbf{C}_1\|^2 = \|\mathbf{B}_4 \mathbf{C}_2\|^2 = l^2$ 。由此可得到如式(12)所示的约束关系, 求解方程组确定 2PPPaR 并联机构的位置反解公式为

$$\begin{cases} q_1 = y - (a \sin \theta) / 2 \\ q_2 = y + (a \sin \theta) / 2 \\ q_3 = z + d \pm \sqrt{l^2 - [x + (b - a \cos \theta) / 2]^2} \\ q_4 = z + d \pm \sqrt{l^2 - [x - (b - a \cos \theta) / 2]^2} \end{cases} \quad (15)$$

式(15)表明, 2PPPaR 并联机构的位置反解求解简单, 最多存在 4 组解。

2.3 位置正反解算例

为了验证机构位置分析的正确性, 对于确定的 2PPPaR 并联机构, 通过给出几组机构的具体位置, 代入上述所求的位置正反解方程中, 进行对比验证, 检验位置分析结果是否正确。给出一组 2PPPaR 并联机构的计算实例, 机构的设计参数如下

$$a = 0.35 \text{ m} \quad b = 1.1 \text{ m} \quad d = 0.3 \text{ m}$$

$$l = 0.75 \text{ m} \quad L_1 = 2.2 \text{ m} \quad L_2 = 1.65 \text{ m} \quad (16)$$

取三组动平台在定坐标系 $\{B\}$ 中的位姿参数 (x, y, z, θ) , 运用 Matlab 软件编程, 将动平台的三组位姿参数依次代入 2PPPaR 并联机构的位置反解方程式(15)中, 确定主动关节的位置 (q_1, q_2, q_3, q_4) 如表 2 所示。接着, 在表 2 中任取三组位置反解方程所求的主动关节位置 (q_1, q_2, q_3, q_4) , 作为位置正解方程的输入值, 运用 Matlab 软件编程, 代入位置正解方程式(13)中计算, 可确定动平台中心点在定坐标系 $\{B\}$ 中的位姿 (x, y, z, θ) , 如表 3 所示。

表 2 位置反解数值算例

动平台位姿				主动关节位置			
x/m	y/m	z/m	θ/rad	q_1/m	q_2/m	q_3/m	q_4/m
0	0	0	0	0	0.949 5	0	0.949 5
				0	-0.349 5	0	0.949 5
				0	-0.349 5	0	-0.349 5
				0	0.949 5	0	-0.349 5
0.2	-0.5	0.35	$\pi/6$	-0.587 5	1.102 1	-0.412 5	1.373 3
				-0.587 5	0.197 9	-0.412 5	1.373 3
				-0.587 5	0.197 9	-0.412 5	-0.073 3
				-0.587 5	1.102 1	-0.412 5	-0.073 3
-0.2 5	0.4	0.5	$\pi/3$	0.248 4	1.519 3	0.551 6	1.034 2
				0.248 4	0.080 7	0.551 6	1.034 2
				0.248 4	0.080 7	0.551 6	0.565 8
				0.248 4	1.519 3	0.551 6	0.565 8

表 3 位置正解数值算例

主动关节位置				动平台位姿			
q_1/m	q_2/m	q_3/m	q_4/m	x/m	y/m	z/m	θ/rad
0	0.949 5	0	0.949 5	0	0	0.457 5	3.141 6
				0	0	0.841 5	3.141 6
				0	0	0	0
				0	0	1.299 0	0
-0.587 5	0.197 9	-0.412 5	-0.073 3	-0.043 2	-0.500 0	-0.461 4	2.618 0
				-0.043 2	-0.500 0	-0.014 0	2.618 0
				0.043 2	-0.500 0	-0.014 0	2.618 0
				0.043 2	-0.500 0	-0.461 4	2.618 0
				-0.200 0	-0.500 0	-0.825 4	0.523 6
				-0.200 0	-0.500 0	0.350 0	0.523 6
				0.200 0	-0.500 0	0.350 0	0.523 6
				0.200 0	-0.500 0	-0.825 4	0.523 6
				-0.111 0	0.400 0	0.685 1	2.093 9
				-0.111 0	0.400 0	1.268 4	2.093 9
				0.111 0	0.400 0	1.268 4	2.093 9
				0.111 0	0.400 0	0.685 1	2.093 9
0.248 4	1.519 3	0.551 6	1.034 2	-0.249 9	0.400 0	0.500 1	1.047 7
				-0.249 9	0.400 0	1.453 4	1.047 7
				0.249 9	0.400 0	1.453 4	1.047 7
				0.249 9	0.400 0	0.500 1	1.047 7

通过对比分析表 2 和表 3 的数据可知, 位置正

解计算和位置反解计算的结果吻合, 从而验证了 2PPPaR 并联机构位置正反解问题分析的正确性。

特别需要说明的是, 文中的长度单位和角度单位分别采用 m 和 rad , 以下相同, 后续不再赘述。此外, 为了更好地了解 2PPPaR 并联机构的特性并保证分析的完整性, 后续对该机构工作空间的研究算例同样采用这组设计参数。

3 速度分析

速度雅可比矩阵通过建立动平台输出和各个支链的输入之间的速度矢量方程求得, 是深入分析并联机构性能(如奇异性、空间映射、灵活度等)的基础。根据 2PPPaR 并联机构的运动约束方程式(12), 对时间求导可确定运动输入速度和运动输出速度之间的映射关系, 即

$$\mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G} \mathbf{V}_p \quad (17)$$

式中, $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4)$ 代表主动关节的速度, $\mathbf{V}_p = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\theta})$ 代表动平台的速度。引入参数 α_j , 由图 3 可知存在如下约束关系

$$\begin{cases} x + (b - a \cos \theta) / 2 = l \sin \alpha_1 \\ x - (b - a \cos \theta) / 2 = -l \sin \alpha_2 \\ z + d - q_3 = -l \cos \alpha_1 \\ z + d - q_4 = -l \cos \alpha_2 \end{cases} \quad (18)$$

将式(18)代入式(17)的 $\mathbf{J}_q$ 和 $\mathbf{G}$ 中, 化简整理得

$$\mathbf{J}_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -(a \cos \theta) / 2 \\ 0 & 1 & 0 & (a \cos \theta) / 2 \\ \sin \alpha_1 & 0 & -\cos \alpha_1 & (a \sin \theta \sin \alpha_1) / 2 \\ \sin \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 & -(a \sin \theta \sin \alpha_2) / 2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

可求矩阵 $\mathbf{J}_q$ 和 $\mathbf{G}$ 的行列式为

$$\det(\mathbf{J}_q) = -\cos \alpha_1 \cos \alpha_2$$

$$\det(\mathbf{G}) = a \cos \theta \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \quad (20)$$

4 奇异性及转动能力分析

奇异位形是指机构无法运动或瞬时运动无法确定的点, 是机构的固有性质, 严重影响机构运动的连续性, 因此, 一个可行机构应从理论上避免或远

离奇异位形。基于机构的 Jacobian 矩阵, 奇异构型分为三类: 逆向奇异、正向奇异和混合奇异^[22]。

4.1 逆向奇异

当 $|J_q|=0$ 、 $|G|\neq 0$ 时, 逆向奇异发生, 此时可认为动平台失去一个或多个自由度。这意味着在该位形下, 当驱动副上没有任何力矩和力时, 动平台可以承受一个或多个力或力偶。逆向奇异通常发生在工作空间的边界处。对于 2PPPaR 并联机构, 由式(20)可知, 必须满足

$$\begin{cases} \cos\alpha_1\cos\alpha_2=0 \\ \cos\theta\sin(\alpha_1+\alpha_2)\neq 0 \end{cases} \quad (21)$$

即 $\alpha_1=\pi/2$ 或 $\alpha_2=\pi/2$, 且 α_j 不能同时为 $\pi/2$, 如图 4a 所示。

4.2 正向奇异

当 $|G|=0$ 、 $|J_q|\neq 0$ 时, 正向奇异发生, 此时可认为动平台得到一个或多个自由度。这意味着动平台可以在所有驱动都锁住的情况下在某些方向发生运动, 即当所有驱动都锁住时, 机构动平台不能承受一个或多个力或力偶。对于 2PPPaR 并联机构, 由式(20)可知, 必须满足

$$\begin{cases} \cos\theta\sin(\alpha_1+\alpha_2)=0 \\ \cos\alpha_1\cos\alpha_2\neq 0 \end{cases} \quad (22)$$

当式(22)成立时, 存在以下几种情形。

情形 1: $\alpha_1+\alpha_2=0$ 或 2π 。当机构的结构参数和尺度参数确定时, 受并联机构的结构限制, 此种情形很难实现。

情形 2: $\alpha_1+\alpha_2=\pi$ 。当机构的结构参数和尺度参数确定时, 当 $\alpha_1+\alpha_2=\pi$ 且 $\alpha_1\neq\pi/2, \alpha_2\neq\pi/2$ 时, 正向奇异发生, 如图 4b 所示。

(a) 逆向奇异

(b) 正向奇异

(c) 正向奇异

(d) 混合奇异

图 4 四自由度 2PPPaR 并联机构的奇异位形

情形 3: $\cos\theta=0$, 即 $\theta=\pm\pi/2$, 如图 4c 所示。

动平台的转动范围为 $\theta: -\pi/2 < \theta < \pi/2$, 由于在实际应用中该类机构的转动自由度主要用于定位调整, 因而这样的转角范围可满足实际设计要求。

4.3 混合奇异

当 $|J_q|=0$ 、 $|G|=0$ 时, 混合奇异发生。此时, 当所有驱动都锁住的情况下分支可承受一个有限运动, 或当驱动副发生一个有限运动时而动平台不产生运动。对于 2PPPaR 并联机构, 由式(20)可知, 必须满足 $\alpha_1=\alpha_2=\pi/2$, 如图 4d 所示。

4.4 转动能力分析

根据速度 Jacobian 矩阵的行列式式(20)和奇异性分析可知, 2PPPaR 并联机构的转动范围为 $\theta: \theta\in(-\pi/2, \pi/2)$ 。该 2PPPaR 并联机构的动平台结构是简单的刚性单动平台, 不含有复杂的角度放大装置, 下面对具有该特点的四自由度 3T1R 并联机构的转动能力进行对比, 如表 4 所示。

表 4 3T1R 并联机构对比

机构名称	支链数	对称	驱动副	转动范围
4-PPa*(或 4-PRPaR)机构 ^[13]	4	是	P	$[-\pi/6, \pi/6]$
4-RPa*(or 4-RRPaR)机构 ^[13]	4	是	R	$[-\pi/6, \pi/6]$
4-PRIIIR SMG ^[14]	4	是	P	$[-\pi/2, \pi/2]$
4-RRIIIR SMG ^[14]	4	是	R	$[-\pi/4, \pi/4]$
一种 3T1R 并联机构 ^[15]	4	是	R	$[-\pi/2, \pi/2]$
4-RRIIIR 并联机构 ^[16]	4	是	R	$[-\pi/4, \pi/4]$
McGill SMGs ^[17]	2	是	R	$[-\pi/2, \pi/2]$
X4 并联机构 ^[18]	4	是	R	$[-\pi/2, \pi/2]$
4-RR(Pa)RR 并联机构 ^[19]	4	是	R	$[-\pi/4, \pi/4]$
2PPPaR 并联机构	2	是	P	$(-\pi/2, \pi/2)$

注: Pa*或 Pa 或 II: 平行四边形机构构成的广义运动副。

由表 4 可知, 目前调研文献中, 能实现 3T1R 运动的单平台对称并联机构, 在不存在额外装置来放大转动角度的情况下, 最大可达到的转动范围为 $\pm\pi/2$ rad。此外, 目前这类机构大多是 4 条支链、以转动副作为驱动副的形式。

5 工作空间分析

一个机构运动性能的优劣在很大程度上取决于机构工作空间的形状和大小。一般来说, 并联机构的工作空间较小且形状不规则, 在一定程度上限制了它的应用, 因此, 对并联机构工作空间的分析尤其重要。2PPPaR 并联机构的工作空间至少需要 4 个参数描述, 为了使机构工作空间可视化, 需要对一个四维工作空间进行降维处理: 给定一定的姿态

参数 θ 后, 动平台参考点在空间的所有可能位置的集合决定的工作空间, 称为可达位置工作空间。

工作空间求解是一个非常复杂的问题, 目前主要研究方法有数值分析法^[23-24]和解析法^[25], 其中, 解析法很大程度上依赖机构位置解的研究结果^[26]。为了定性和定量地分析 2PPPaR 并联机构的工作空间, 采用解析法和数值法相结合进行研究。

5.1 可达位置工作空间

对 2PPPaR 并联机构, 考虑机构的结构设计及布局特点并忽略机械干扰的影响, 选取动平台中心点为参考点研究该机构的可达位置工作空间, 即求两条支链生成的各自可达工作空间的交集。

当动平台转角 θ 固定时, 2PPPaR 并联机构的可达位置工作空间可视为将 xoz 平面的工作空间沿 y 方向拉伸一定长度形成的空间, 由式(12)可知, xoz 平面的可达位置工作空间实际上是以 $(-b - a\cos\theta)/2, q_3 - d$ 和 $((b - a\cos\theta)/2, q_4 - d)$ 为圆心, 以平行四边形杆长 l 为半径的两圆簇的交集。根据机构特点可知, 如果安装在水平和垂直方向的驱动电机的驱动行程很大, 则该机构在这两个方向(y 轴和 z 轴)的工作空间也会很大, 因而 x 方向的工作空间成为制约整个工作空间大小的主要因素。

为了更形象地了解并联机构的可达位置工作空间, 给出一组 2PPPaR 机构可达位置工作空间的研究算例, 其设计参数见式(16), 约束条件如下

$$\begin{cases} -b/2 \leq x \leq b/2 \\ 0 \leq y \leq L_1 \\ L_2/2 - d \leq z \leq -d + L_2 + l \\ 0 \leq q_1 \leq L_1 \\ 0 \leq q_2 \leq L_1 \\ 0 \leq q_3 \leq L_2 \\ 0 \leq q_4 \leq L_2 \\ l^2 - [x + (b - a\cos\theta)/2]^2 \geq 0 \\ l^2 - [x - (b - a\cos\theta)/2]^2 \geq 0 \end{cases} \quad (23)$$

当动平台的姿态角取 $\theta = 0 \text{ rad}$, 利用数值法可确定 2PPPaR 并联机构的可达位置工作空间如图 5 所示, 大小为 3.0008 m^3 。由工作空间的截面图(图 5b~5d)可知, 该机构的可达位置工作空间内部无空洞区域, 具有良好的性能。

5.2 姿态角 θ 对可达位置工作空间体积的影响

选取上述可达位置工作空间算例, 分析姿态角 θ 对 2PPPaR 并联机构可达位置工作空间体积的影响如图 6 所示。

图 5 2PPPaR 并联机构的可达位置工作空间

图 6 姿态角 θ 对可达位置工作空间体积的影响

由图 6 可知, 机构的可达位置工作空间关于姿态角 $\theta = 0$ 基本对称; 当姿态角 $\theta = 0$ 时, 工作空间体积达到最大值; 当姿态角 $\theta = \pm\pi/2$ 时, 工作空间体积达到最小值, 即当动平台相对于 x 轴转动角度越大, 机构可利用的工作空间越小。

5.3 设计参数对可达位置工作空间体积的影响

对于上述 2PPPaR 并联机构算例, 采用单变量法分析各设计参数(表 1)对机构可达位置工作空间的影响, 如图 7 所示, 具体分析如下。

(1) 参数 b 对可达位置工作空间的影响趋势是先增大后减小, 呈现非线性的特点, 如图 7b 所示。

(2) 当机构的可达位置工作空间存在时, 参数 a 、 l 、 L_1 、 L_2 增大, 可达位置工作空间也增大, 如图 7a、7c、7e、7f 所示。区别是: a 、 l 、 L_2 对工作空间的影响是非线性的, 影响程度不同; L_1 对工作空间的影响则是线性的, 即只要存在工作空间, 那么导轨长度 L_1 越大, 工作空间越大, 因而可根据实际的应用需求选择。

(3) 参数 d 对可达位置工作空间没有影响, 如图 7d 所示。当 d 在给定区域变化时, 工作空间几乎没有变化, 因而在设计过程中可根据实际情况给定。

(4) 当各参数满足一定条件时才开始出现工作

空间, 该条件为: $l > (b - a \cos \theta) / 2$ 。

上述分析结果可为后续 2PPPaR 并联机构的尺寸优化设计和样机试制提供参考。

(a) 参数 a 对可达位置工作空间体积的影响

(b) 参数 b 对可达位置工作空间体积的影响

(c) 参数 l 对可达位置工作空间体积的影响

(d) 参数 d 对可达位置工作空间体积的影响

(e) 参数 L_1 对可达位置工作空间体积的影响

(f) 参数 L_2 对可达位置工作空间体积的影响

图 7 设计参数对可达位置工作空间体积的影响

5.4 可达位置工作空间形状

根据 2PPPaR 并联机构工作空间在 x - z 截面的形

状及奇异位形的情况, 可将机构的可达位置工作空间划分为如下几种类型(图 8)。

图 8 2PPPaR 并联机构可达位置工作空间

在 Oxz 截面的形状

类型 1: 当杆长 l 满足

$$0 < l \leq (b - a \cos \theta) / 2$$

两组圆簇无交集, 该并联机构工作空间不存在, 如图 8a 所示。其中半径 $l = (b - a \cos \theta) / 2$ 是该机构是否存在工作空间的临界条件。

类型 2: 当杆长 l 满足

$$\frac{b - a \cos \theta}{2} < l \leq \frac{L_2^2}{8(b - a \cos \theta)} + \frac{b - a \cos \theta}{2}$$

此时存在工作空间, 并且其内部无“空洞”区域, 如图 8b。半径 $l = \frac{L_2^2}{8(b - a \cos \theta)} + \frac{b - a \cos \theta}{2}$ 是该并联机构内部是否存在“空洞区域”的临界条件。

类型 3: 当杆长 l 满足

$$\frac{L_2^2}{8(b - a \cos \theta)} + \frac{b - a \cos \theta}{2} < l \leq \frac{\sqrt{L_2^2 + (b - a \cos \theta)^2}}{2}$$

此时, 机构的工作空间内部存在“空洞”区域, 但是上下工作空间没有分离, 如图 8c 所示。其中 $l = \frac{\sqrt{L_2^2 + (b - a \cos \theta)^2}}{2}$ 是工作空间上下是否分离的临界条件。

类型 4: 当杆长 l 满足

$$\frac{\sqrt{L_2^2 + (b - a \cos \theta)^2}}{2} < l \leq \frac{L_2^2}{2(b - a \cos \theta)} + \frac{b - a \cos \theta}{2}$$

此时, 机构的工作空间上下分离, 并且上部或下部工作空间内部存在奇异位形, 如图 8d 所示。其中

$l = \frac{L_2^2}{2(b - a \cos \theta)} + \frac{b - a \cos \theta}{2}$ 是上部或下部工作空间内部是否存在奇异位形的临界条件。

类型5: 当杆长 l 满足

$$l \geq \frac{L_2^2}{2(b - a \cos \theta)} + \frac{b - a \cos \theta}{2}$$

此时工作空间上下分离, 并且上部工作空间内部无奇异位形, 如图 8e 所示。

由图 8 和式(12)可以得出如下结论。

(1) 2PPPaR 并联机构如果存在工作空间, 则工作空间的形状共有 4 种类型, 即图 8b~8e。

(2) 在 x 方向, 2PPPaR 并联机构的每一种工作空间的形状分布关于两条导轨的中心平面对称。

(3) 在 z 方向, 2PPPaR 并联机构的每一种工作空间的形状分布关于直线 $z = L_2 / 2 - d$ 对称。

通过分析 2PPPaR 并联机构的工作空间形状, 可为后续路径规划提供参考, 同时不同类型工作空间临界条件的确定, 有利于后续机构的尺寸优化。

6 结论

本文提出一种可实现 3T1R 运动的新型四自由度并联机构——2PPPaR 并联机构, 该机构结构简单、构型对称、工作空间较大且转动能力较强, 可广泛用于高速高精度的分拣、包装、码垛操作中, 具有较好的工业应用前景。

(1) 基于螺旋理论验证了 2PPPaR 并联机构自由度的数目和性质, 证明该机构具有四个自由度, 可以实现 3T1R 运动。

(2) 基于机构的运动特性和结构特点, 确定了机构位置解的封闭形式: 2PPPaR 并联机构位置正解的封闭解最多有 8 组解, 位置反解最多有 4 组解; 分析结果表明: 运动学分析简单是 2PPPaR 并联机构的显著特点之一。

(3) 确定了 2PPPaR 并联机构动平台输出和各支链输入之间的速度映射模型, 分析了该并联机构可能发生的奇异位形, 为后续机构的运动轨迹规划提供依据。

(4) 基于数值法和解析法研究了机构的可达位置工作空间和可能的可达位置工作空间形状, 分析了可达位置工作空间体积的影响因素和各种类型工作空间满足的约束条件; 分析结果表明: x 方向的工作空间是制约整个工作空间大小的主要因素, y 方向的工作空间独立于其他方向, 仅受驱动电机行程的限制。

(5) 后续工作将围绕 2PPPaR 并联机构的优化设计和样机开展开。

参 考 文 献

- [1] HERVE J. The Lie group of rigid body displacements, a fundamental tool for mechanism design[J]. Mechanism and Machine theory, 1999, 34: 719-730.
- [2] CLAVEL R. Device for the movement and positioning of an element in space: USA, US4976582[P]. 1990-12-11.
- [3] 刘辛军, 谢福贵, 汪劲松. 当前中国机构学面临的机遇[J]. 机械工程学报, 2015, 51(13): 2-12.
LIU Xinjun, XIE Fugui, WANG Jinsong. Current opportunities in the field of mechanisms in China[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(13): 2-12.
- [4] PIERROT F, COMPANY O. H4: A new family of 4-dof parallel robots[C]// Proceedings of the IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, New York, 1999: 508-513.
- [5] KRUT S, BENOIT M, OTA H, et al. I4: A new parallel mechanism for Scara motions[C]// Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2003: 1875-1880.
- [6] COMPANY O, KRUT S, PIERROT F, et al. Par4: Very high speed parallel robot for pick-and-place[C]// IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2005: 553-558.
- [7] KRUT S, COMPANY O, NABAT V, et al. Heli4: A parallel robot for scara motions with a very compact traveling plate and a symmetrical design[C]// IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2006: 1656-1661.
- [8] 黄田, 赵学满, 梅江平, 等. 一种具有三维平动一维转动的并联机构: 中国, ZL201220007884.X[P]. 2012-11-14.
HUANG Tian, ZHAO Xueman, MEI Jiangping, et al. A parallel mechanism with three translations and one rotation: China, ZL201220007884.X[P]. 2012-11-14.
- [9] 黄田, 宋铁民. 一种具有三维平动一维转动的并联机构: 中国, ZL200910228105.1[P]. 2010-05-19.
HUANG Tian, SONG Yimin. A parallel mechanism with three translations and one rotation: China, ZL200910228105.1[P]. 2010-05-19.
- [10] 黄田, 赵学满. 一种可实现四自由度运动的并联机构: 中国, ZL201110149529.6[P]. 2011-11-02.
HUANG Tian, ZHAO Xueman. A 4-DOF parallel mechanism: China, ZL201110149529.6[P]. 2011-11-02.
- [11] 李玉航, 梅江平, 刘松涛, 等. 一种新型 4 自由度高速并联机械手动力尺度综合[J]. 机械工程学报, 2014, 50(19): 32-40.
LI Yuhang, MEI Jiangping, LIU Songtao, et al. Dynamic Dimensional Synthesis of a 4-DOF High-speed Parallel

- Manipulator[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(19): 32-40.
- [12] About pentarobotics.com[EB/OL]. [2017-03-31]. <http://pentarobotics.com/news/>.
- [13] LI Zhibin, LOU Yunjiang, LI Zexiang, et al. Type synthesis, kinematic analysis, and optimal design of a novel class of Schönflies-motion parallel manipulators[J]. IEEE Transactions on Automation Science & Engineering, 2013, 10(3): 674-686.
- [14] SALGADO O, ALTUZARRA O, PETUYA V, et al. Synthesis and design of a novel 3T1R fully-parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Design, 2008, 130(4): 137-139.
- [15] KIM S M, KIM W, YI B J. Kinematic analysis and optimal design of a 3T1R type parallel mechanism[C]// IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2009: 2199-2204.
- [16] WU Guanglei, BAU S, HJORN P. Recent advances in mechanism design for robotics[M]. Springer, 2015.
- [17] CAMMARATA A, ANGELES J, SINATRA R. The dynamics of parallel Schönflies motion generators: The case of a two-limb system[J]. Journal of Veterinary Diagnostic Investigation Official Publication of the American Association of Veterinary Laboratory Diagnosticians Inc., 2009, 223(1): 29-52.
- [18] XIE Fugui, LIU Xinjun. Design and development of a high-speed and high-rotation robot with four identical arms and a single platform[J]. Journal of Mechanisms & Robotics, 2015, 7(4): 041015.
- [19] XIE Fugui, LIU Xinjun. Analysis of the kinematic characteristics of a high-speed parallel robot with Schönflies motion: Mobility, kinematics, and singularity[J]. Frontiers of Mechanical Engineering, 2016, 11(2): 135-143.
- [20] LIU Xinjun, WANG Jinsong. Some new parallel mechanisms containing the planar four-bar parallelogram[J]. International Journal of Robotics Research, 2003, 22(9): 717-732.
- [21] 黄真, 刘靖芳, 李艳文. 论机构自由度: 寻找了 150 年的自由度通用公式[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
- HUANG Zhen, LIU Jingfang, LI Yanwen. On the degrees of freedom: Searching for the general formula of freedom in 150 years[M]. Beijing: Science Press, 2011.
- [22] GOSSELIN C, ANGELES J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains[J]. IEEE transactions on robotics and automation, 1990, 6: 281-290.
- [23] SHAO Jiejie, CHEN Wenyu, FU Xin. Position, singularity and workspace analysis of 3-PSR-O spatial parallel manipulator[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2015, 28(3): 437-450.
- [24] FU Jianxun, GAO Feng. Optimal design of a 3-leg 6-DOF parallel manipulator for a specific workspace[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2016, 29(4): 659-668.
- [25] GOSSELIN C. Determination of the workspace of 6-DOF parallel manipulators[J]. Journal of Mechanical Design, 1990, 112: 331-336.
- [26] 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- HUANG Zhen, ZHAO Yongsheng, ZHAO Tieshi. Advanced spatial mechanism[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006.

作者简介: 吴存存, 女, 1986 年出生。主要研究方向为并联机器人。

E-mail: wucuncun@nimte.ac.cn

杨桂林(通信作者), 男, 1965 年出生, 博士, 高级研究员, 博士研究生导师。主要研究方向为精密运动系统、先进机器人及智能制造装备技术。

E-mail: glyang@nimte.ac.cn

陈庆盈, 男, 1976 年出生, 博士, 研究员, 硕士研究生导师。主要研究方向为机电一体化、机器人设计、水下载具设计。

E-mail: chenchinyin@nimte.ac.cn

张驰, 男, 1978 年出生, 博士, 博士研究生导师。主要研究方向为精密运动系统及控制。

E-mail: zhangchi@nimte.ac.cn

刘树林, 男, 1963 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为复杂设备故障诊断。

E-mail: lsl346@shu.edu.cn