

DOI: 10.3901/JME.2019.15.183

基于多维振动响应 GSC-TARMA 模型的 时变结构模态参数辨识*

余磊^{1,2} 刘莉^{1,2} 马志赛^{3,4} 康杰^{1,2}

- (1. 北京理工大学宇航学院 北京 100081;
2. 北京理工大学飞行器动力学与控制教育部重点实验室 北京 100081;
3. 天津大学机械工程学院 天津 300350;
4. 天津大学非线性动力学与控制重点实验室 天津 300350)

摘要: 针对多维振动响应测量信号下的仅输出时变结构模态参数辨识问题, 基于广义随机约束时变自回归滑动平均模型 (Generalized stochastic constraints time-dependent auto-regressive moving average, GSC-TARMA), 拓展出广义随机约束向量时变自回归滑动平均模型 (Generalized stochastic constraints vector time-dependent auto-regressive moving average, GSC-VTARMA)。为降低计算复杂度, 进一步提出改进的 GSC-VTARMA 模型 (GSC-VTARMA*), 并利用时变刚度数值系统与移动质量简支梁时变结构实验系统的非平稳振动响应信号对所提模型进行了验证。通过与单维 GSC-TARMA 模型和传统的泛函序列向量时变自回归滑动平均 (Functional series vector time-dependent auto-regressive moving average, FS-VTARMA) 模型进行对比, 辨识结果表明: 相较于 GSC-VTARMA 模型, GSC-VTARMA* 模型在保持辨识精度相同的前提下降低了计算复杂度; 相较于单维 GSC-TARMA 模型, GSC-VTARMA* 模型具有更高的数据利用率与辨识鲁棒性; GSC-VTARMA* 模型具有与传统的 FS-VTARMA 模型相近的辨识精度, 但由于采用了递推算法, 该模型计算效率更高, 在线辨识能力更强。

关键词: 时变结构; 模态参数辨识; 多维振动响应; 广义随机约束

中图分类号: TP391; TH113

Modal Parameter Estimation of Time-varying Structures Using GSC-TARMA Models Based on Vector Vibration Response Measurements

YU Lei^{1,2} LIU Li^{1,2} MA Zhisai^{3,4} KANG Jie^{1,2}

- (1. School of Aerospace and Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081;
2. Key Laboratory of Dynamics and Control of Flight Vehicle, Ministry of Education, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081;
3. School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300350;
4. Tianjin Key Laboratory of Nonlinear Dynamics and Control, Tianjin University, Tianjin 300350)

Abstract: The problem of output-only identification of time-varying structures based on vector vibration response measurements is considered. A generalized stochastic constraints vector time-dependent auto-regressive moving average (GSC-VTARMA) model is presented, which is an extension form of the generalized stochastic constraints time-dependent ARMA (GSC-TARMA) model. In order to reduce computation complexity, an improved generalized stochastic constraints vector time-dependent auto-regressive moving average (GSC-TARMA*) model is subsequently proposed. The proposed model is validated by non-stationary vibration signals of a numerical system with time-varying stiffness and a laboratory time-varying structure consisting of a simply supported beam and a moving mass. The results indicate that the proposed GSC-VTARMA* model achieves same identification accuracy but less computation complexity to the GSC-VTARMA model, and achieves better identification robustness and higher data utilization to the GSC-TARMA model. Furthermore, the proposed model shows a similar identification accuracy and lower computational cost than the traditional FS-VTARMA model. Due to the recursive algorithm used by the GSC-VTARMA* model, its enhanced online

* 国家自然科学基金(11802201)和中国博士后科学基金(2017M621075)资助项目。20180705 收到初稿, 20190505 收到修改稿

identification capability has also been demonstrated.

Key words: time-varying structures; modal parameter estimation; vector vibration responses; generalized stochastic constraints

0 前言

随着工程应用领域的不断拓展以及任务需求的不断提升,越来越多具有时变特性的复杂结构如桥梁^[1]、机械臂^[2]、旋转机械^[3]、柔性结构^[4]和可变形飞行器^[5]等不断进入应用,导致结构自身的时变特性在动力学分析过程中无法被忽略。在实际工程中,结构的真实激励很难获取,因此基于响应的仅输出模态参数辨识方法受到了广泛关注与应用。

按照是否采用参数化的辨识模型,仅输出时变结构模态参数辨识方法可分为参数化和非参数化方法两类。参数化的辨识模型主要包括时变状态空间模型、时变时间序列模型等^[6]。按照时变时间序列模型的参数演化形式,可进一步分为三类^[7]:非结构化方法^[8],假设参数无数学模型,采用递推法来估计参数,跟踪精度不高;随机的结构化方法^[9],假设时变系数是满足特定约束的随机过程,适用于模型参数具有随机演化的特点,如生物医学信号,风车振动信号等;确定的结构化方法^[10-11],假设时变系数为泛函序列的线性组合,对基函数的选取与模型阶数的选择十分敏感。

在实际工程应用中,充分利用多个传感器得到的振动响应信号,可以更完整的获取结构的特征信息,从而改善单维模型仅在某些传感器上具有良好辨识结果的缺陷^[12]。基于多维响应信号的辨识模型能够提供更加完整的模型描述,提升数据集的一致性,提高模态辨识能力^[13]。但是随着信号维度的增加,多维模型将面临计算量急剧增加的“维度困境”,减少多维模型的计算量成为亟待解决的一个问题。

基于多维响应信号辨识方法的研究在最近几十年得到了一定的发展。其中,递归法与短时子空间法得到了广泛的应用。马志赛等^[14]对近年来的多维时变模态参数辨识方法进行了综述。YANG 等^[15-16]采用递归最小二乘法对相似的结构进行辨识,通过调整遗忘因子改善模态参数跟踪精度。GOETHALS 等^[17]和 MEVEL 等^[18]分别利用递归方法和短时子空间法跟踪了颤振状态下飞行器的时变结构模态。LIU 和 DENG^[19]利用子空间方法辨识了可平移机械臂的时变动力学特征。在确定化方法中,KITAGAWA 等^[20]利用泛函序列 VTAR(FS-VTAR)模型,分析了多维非平稳经济序列。在基函数形式的选取上,SATO 等^[21]提出了小波方法,对 FS-VTAR

模型的基函数空间做了进一步的补充。FASSOIS 等^[11]提出了完整的 FS-VTARMA 模型,并将模型应用于辨识移动质量梁实验装置的时变结构模态辨识。在随机结构化方法中,KITAGAWA 等^[22]开展了随机结构化方法的早期研究,将光滑约束作用于 TARMa(SP-TARMA)模型的 AR 系数,采用卡尔曼滤波对模型参数进行估计,得到了时变谱密度;KITAGAWA 和 GERSCH^[23-24]提出了光滑先验 TAR 模型,并将其应用于分析地震振动信号。CHEN^[25]将光滑约束引入 VTAR(SP-VTAR)模型中,应用于风速数据建模中。AVENDANO 等^[26]拓展了 SP-TARMA 模型,进一步提出了广义随机约束 TARMa(GSC-TARMA)模型,并用 EM 算法估计了模型参数与超参数,但是模型局限于单维响应信号,而且受限于扩维状态方程的描述形式,该模型计算效率较低。总体上,相较于前两类方法,针对随机结构化方法的研究还相对较少,相关方法也尚未发展成熟。

本文针对随机结构化方法,对基于多维振动响应信号的辨识问题进行研究,首先对 GSC-TARMA 模型进行拓展,提出 GSC-VTARMA 模型,使之适应多维振动测量响应信号;其次,提出改进的 GSC-TARMA 模型,以便提高 GSC-VTARMA 模型的计算效率,使之适应在线辨识要求;最后利用时变刚度系统与移动质量简支梁时变实验系统的非平稳响应信号对所提模型的有效性进行验证。

1 GSC-VTARMA 模型

1.1 GSC-VTARMA 模型描述

为研究多维振动响应信号下的仅输出时变结构模态参数辨识问题,对 GSC-TARMA 模型^[26]进行扩展,得到 GSC-VTARMA 模型。令 n_a 和 n_c 分别表示 AR 与 MA 阶数, n_p 表示随机约束的阶数,则 GSC-VTARMA(n_a, n_c, n_p) 可表示为

$$\begin{aligned} x[t] &= \phi^T[t] \theta[t] + e[t], e[t] \sim NID(0, \Sigma_e[t]) \\ \theta[t] &= -\sum_{k=1}^{n_p} M_k \theta[t-k] + v[t], v[t] \sim NID(0, \Sigma_v[t]) \end{aligned} \quad (1)$$

式中, t 为离散化时间; $x[t] \in \mathbf{R}^{k \times 1}$ 为非平稳振动响应(多维)信号; $e[t] \in \mathbf{R}^{k \times 1}$ 为满足零均值和协方差 $\Sigma_e[t] \in \mathbf{R}^{k \times k}$ 的不相关残差序列, $v[t] \in \mathbf{R}^{k^2(n_a+n_c) \times 1}$ 为满足均值为 0 和协方差 $\Sigma_v[t] \in \mathbf{R}^{k^2(n_a+n_c) \times k^2(n_a+n_c)}$ 的不相关残差序列,且 $e[t]$ 与 $v[t]$ 互不相关;

$\mathbf{M}_k \in \mathbf{R}^{k^2(n_a+n_c) \times k^2(n_a+n_c)}$ 为随机约束矩阵; 回归矩阵 $\boldsymbol{\varphi}[t]$ 和时变参数矢量 $\boldsymbol{\theta}[t]$ 分别具有如下展开形式

$$\boldsymbol{\varphi}[t] \triangleq \begin{bmatrix} -\mathbf{x}[t-1] \otimes \mathbf{I}_k \\ \vdots \\ -\mathbf{x}[t-n_a] \otimes \mathbf{I}_k \\ \mathbf{e}[t-1] \otimes \mathbf{I}_k \\ \vdots \\ \mathbf{e}[t-n_c] \otimes \mathbf{I}_k \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{k^2(n_a+n_c) \times k} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\theta}[t] = [\mathbf{a}_{1,1}^1[t], \dots, \mathbf{a}_{k-1,k}^{n_a}[t], \mathbf{a}_{k,k}^{n_a}[t], \mathbf{c}_{1,1}^1[t], \dots, \mathbf{c}_{k-1,k}^{n_c}[t], \mathbf{c}_{k,k}^{n_c}[t]]^T \in \mathbf{R}^{k^2(n_a+n_c) \times 1} \quad (3)$$

式中, \mathbf{I}_k 为阶数为 k 的单位矩阵, \otimes 为 Kronecker 积。

为应用递推格式进行模型参数估计, 需将式(1)进一步改写为状态空间模型形式, 如下

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[t] &= \mathbf{h}^T[t] \mathbf{z}[t] + \mathbf{e}[t], \mathbf{e}[t] \sim NID(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_e[t]) \\ \mathbf{z}[t] &= \mathbf{F}(\mathbf{u}) \mathbf{z}[t-1] + \mathbf{G} \mathbf{v}[t], \mathbf{v}[t] \sim NID(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_v[t]) \end{aligned} \quad (4)$$

其中,

$$\mathbf{z}[t] = [\boldsymbol{\theta}^T[t] \quad \dots \quad \boldsymbol{\theta}^T[t-n_p+1]]^T \in \mathbb{R}^{k^2(n_a+n_c)n_p \times 1} \quad (5)$$

$$\mathbf{h}[t] = [\boldsymbol{\varphi}^T[t] \quad \mathbf{0}_{k \times k^2(n_a+n_c)(n_p-1)}]^T \in \mathbb{R}^{k^2(n_a+n_c)n_p \times k} \quad (6)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}_1 & -\mathbf{M}_2 & \dots & -\mathbf{M}_{n_p-1} & -\mathbf{M}_{n_p} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{k^2(n_a+n_c)n_p \times k^2(n_a+n_c)n_p} \quad (7)$$

$$\mathbf{G} = [\mathbf{1} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0}]^T \otimes \mathbf{I} \in \mathbf{R}^{k^2(n_a+n_c)n_p \times k^2(n_a+n_c)} \quad (8)$$

$$\mathbf{u} = [\text{vec}(\mathbf{M}_1)^T \quad \dots \quad \text{vec}(\mathbf{M}_{n_p})^T]^T \quad (9)$$

式中, $\text{vec}(\cdot)$ 表示矢量化算子。状态转移矩阵 $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ 可以由随机约束矢量 \mathbf{u} 唯一决定, 表征了参数矩阵的传递关系, $\mathbf{v}[t] \in \mathbf{R}^{k^2(n_a+n_c) \times 1}$ 为零均值状态噪声, 且

满足 $E[\mathbf{v}[t] \mathbf{v}[j]^T] = \boldsymbol{\Sigma}_v[t] \delta_{t,j}$, $\mathbf{e}[t] \in \mathbf{R}^{k \times 1}$ 为零均值量测噪声, 且满足 $E[\mathbf{e}[t] \mathbf{e}[j]^T] = \boldsymbol{\Sigma}_e[t] \delta_{t,j}$, 并满足 $E[\mathbf{v}[t] \mathbf{e}[j]^T] = \mathbf{0}$ 。其中, $E[\cdot]$ 表示数学期望, $\delta_{t,j}$ 为 Kronecker delta 函数, 当 $t=j$ 时, $\delta_{t,j}=1$, 当 $t \neq j$ 时, $\delta_{t,j}=0$ 。

1.2 VTARMA 模型 “时间冻结” 模态参数

VTARMA 模型 “时间冻结” 模态参数可通过在

每一时刻求解如下特征值问题^[27]获得

$$(\mathbf{p}_i[t] \mathbf{I}_{k \times k} - \mathbf{D}[t]) \boldsymbol{\gamma}_i[t] = \mathbf{0}, i=1, 2, \dots, kn_a \quad (10)$$

式中, $\mathbf{p}_i[t]$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_i[t] = [\mathbf{p}_i[t]^{-n_a} \mathbf{L}_i^T, \dots, \mathbf{p}_i[t]^{-1} \mathbf{L}_i^T]^T$ 分别表示伴随矩阵 $\mathbf{D}[t]$ 的 “时间冻结” 特征值和特征矢量, \mathbf{L}_i 为 “时间冻结” 模态振型矢量。伴随矩阵 $\mathbf{D}[t]$ 由 AR 系数矩阵构成, 形式如下

$$\mathbf{D}[t] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_{n_a}[t] & -\mathbf{A}_{n_a-1}[t] & \dots & -\mathbf{A}_1[t] \end{bmatrix} \quad (11)$$

更进一步, 可得 TARMA 模型 “时间冻结” 固有频率和阻尼比分别为

$$f_i[t] = \frac{|\ln \mathbf{p}_i[t]|}{2\pi\Delta t}, \zeta_i[t] = \frac{-\text{Re}(\ln \mathbf{p}_i[t])}{|\ln \mathbf{p}_i[t]|} \quad (12)$$

1.3 GSC-VTARMA 模型超参数先验假设

随机约束矢量 \mathbf{u} , 量测噪声协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_e[t]$, 状态噪声协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_v[t]$, 构成了 GSC-VTARMA 的超参数集合, 定义为^[28]

$$\mathbf{P} = \{\mathbf{u}, \boldsymbol{\Sigma}_e[t], \boldsymbol{\Sigma}_v[t]\} \quad (13)$$

将 GSC-VTARMA 模型简化, 即假设随机约束矩阵 $\mathbf{M}_k = \mathbf{u}_k \mathbf{I}_{k^2(n_a+n_c) \times k^2(n_a+n_c)}$, 状态噪声协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_v[t] = \sigma_v^2 \mathbf{I}_{k^2(n_a+n_c) \times k^2(n_a+n_c)}$, 量测噪声协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_e[t] = \sigma_e^2 \mathbf{I}_{k \times k}$ 。

参数辨识作为一类反问题, 其主要目的是通过分析振动响应测量信号 $\mathbf{x}_1^N = \{\mathbf{x}[1], \mathbf{x}[2], \dots, \mathbf{x}[N]\}$, 利用合适的算法, 进而确定 GSC-VTARMA 模型的超参数 \mathbf{P} 与时变参数 $\boldsymbol{\theta}_1^N = \{\boldsymbol{\theta}[1], \boldsymbol{\theta}[2], \dots, \boldsymbol{\theta}[N]\}$ 。

对于时变参数矢量 $\boldsymbol{\theta}[t]$, 可以假设其满足如下的光滑先验约束^[7]

$$\Delta^{n_p} \boldsymbol{\theta}[t] = \mathbf{v}[t] \quad (14)$$

其中, Δ 为差分算子。将式(14)展开并与式(1)进行比较, 即可得到

$$\begin{aligned} n_p=1 \quad & \mathbf{F} \triangleq \mathbf{I} \quad \mathbf{G} \triangleq \mathbf{I} \\ n_p=2 \quad & \mathbf{F} \triangleq \begin{bmatrix} 2\mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ n_p=3 \quad & \mathbf{F} \triangleq \begin{bmatrix} 3\mathbf{I} & -3\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

根据不同的差分阶数 n_p , 可以得到满足光滑先

验约束的状态转移矩阵 $F(u)$ 。

1.4 GSC-VTARMA 模型参数估计

当 $F(u)$, $\Sigma_v[t]$ 和 $\Sigma_e[t]$ 已知, 根据离散系统卡尔曼滤波基本方程^[29], 可得时变参数矢量 $\theta[t]$ 的递推估计过程如下

$$\begin{aligned}\hat{z}[t] &= F(u)\hat{z}[t-1] + K[t]\hat{e}[t, t-1] \\ \hat{e}[t, t-1] &= x[t] - h^T[t]F(u)\hat{z}[t-1] \\ K[t] &= (F(u)P[t-1]F(u)^T + GRG^T)h[t] \times \\ &\quad [I_e + h^T[t](F(u)P[t-1]F(u)^T + GRG^T)h[t]]^{-1} \\ P[t] &= (I - K[t]h^T[t])(F(u)P[t-1]F(u)^T + GRG^T)\end{aligned}\quad (16)$$

其中, $R \triangleq \frac{\sigma_v^2}{\sigma_e^2} I_{k^2(n_a+n_c)} \triangleq \nu I_{k^2(n_a+n_c)}$, $I_e \in \mathbf{R}^{k \times k}$, $K[t] \in \mathbf{R}^{k^2(n_a+n_c) \times k}$ 为卡尔曼增益矩阵, $P[t] \in \mathbf{R}^{k^2(n_a+n_c)n_p \times k^2(n_a+n_c)n_p}$ 为卡尔曼协方差矩阵, $\hat{e}[t, t-1]$ 为信号的一步超前预测误差。

由式(11)可知, VTARMA 模型的广义特征根数目由 AR 阶数和信号通道数目所决定。针对同一个对象而言, GSC-VTARMA 模型与 GSC-TARMA 相比, 可以充分的利用多通道数据信息, 使得辨识结果更为准确、鲁棒, 并以更低的 AR 阶数来获得所关心的模态参数。

然而, 多维模型所带来的计算量增加是限制其应用的主要问题。将仅考虑乘法操作的渐进时间复杂度简称为计算复杂度, 用 $\Theta(\cdot)$ 表示, 对于(16)的计算复杂度为 $\Theta(k^5(n_a+n_c)^2 n_p^2)$ 。随着信号维度或模型阶数 n_a 、 n_c 和 n_p 的升高, 该模型的计算复杂度也将明显增大。

2 改进的 GSC-VTARMA 模型

对于上述递推估计过程而言, 其计算复杂度主要取决于回归矩阵 $\phi[t] \in \mathbf{R}^{k^2(n_a+n_c) \times k}$ 的维度。因此, 降低回归矩阵 $\phi[t]$ 的维度, 可有效降低估计过程中的计算复杂度, 提高计算效率^[30]。以式(1)中 GSC-VTARMA 模型为基础, 本文提出一种改进的 GSC-VTARMA 模型, 如下

$$\begin{aligned}x[t] &= \theta^T[t]\phi[t] + e[t], e[t] \sim NID(0, \Sigma_e[t]) \\ \theta^T[t] &= -\sum_{k=1}^{n_p} M_k \theta^T[t-k] + v[t], v[t] \sim NID(0, \Sigma_v[t])\end{aligned}\quad (17)$$

式中, 回归矩阵 $\phi[t]$ 和时变参数矩阵 $\theta[t]$ 分别具有如下形式

$$\phi[t] \triangleq \begin{bmatrix} -x[t-1] \\ \vdots \\ -x[t-n_a] \\ e[t-1] \\ \vdots \\ e[t-n_c] \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{k(n_a+n_c) \times 1} \quad (18)$$

$$\theta^T[t] \triangleq [A_1[t], \dots, A_{n_a}[t], C_1[t], \dots, C_{n_c}[t]] \in \mathbf{R}^{k \times k(n_a+n_c)} \quad (19)$$

将式(17)进一步改写为状态空间形式

$$\begin{aligned}x^T[t] &= h^T[t]z[t] + e^T[t], e^T[t] \sim NID(0, \Sigma_e[t]) \\ z[t] &= F(u)z[t-1] + Gv[t], v[t] \sim NID(0, \Sigma_v[t])\end{aligned}\quad (20)$$

$$z[t] = [\theta^T[t] \quad \dots \quad \theta^T[t-n_p+1]]^T \in \mathbf{R}^{k^2(n_a+n_c)n_p \times k} \quad (21)$$

$$h[t] = \begin{bmatrix} \phi^T[t] & 0_{1 \times k(n_a+n_c)(n_p-1)} \end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^{k(n_a+n_c)n_p \times 1} \quad (22)$$

$$F(u) = \begin{bmatrix} -M_1 & -M_2 & \dots & -M_{n_p-1} & -M_{n_p} \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{k(n_a+n_c)n_p \times k(n_a+n_c)n_p} \quad (23)$$

$$G = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T \otimes I \in \mathbf{R}^{k(n_a+n_c)n_p \times k(n_a+n_c)} \quad (24)$$

$$M_k = u_k \cdot I \in \mathbf{R}^{k(n_a+n_c) \times k(n_a+n_c)} \quad (25)$$

当 $F(u)$, $\Sigma_v[t]$ 和 $\Sigma_e[t]$ 根据先验作出假设, 根据离散系统卡尔曼滤波基本方程, 可得改进的 GSC-VTARMA 模型时变参数矢量 $\theta[t]$ 的递推估计过程如下

$$\begin{aligned}\hat{z}[t] &= F(u)\hat{z}[t-1] + K[t]\hat{e}^T[t, t-1] \\ \hat{e}^T[t, t-1] &= x^T[t] - h^T[t]F(u)\hat{z}[t-1] \\ K[t] &= (F(u)P[t-1]F(u)^T + GRG^T)h[t] \times \\ &\quad [1 + h^T[t](F(u)P[t-1]F(u)^T + GRG^T)h[t]]^{-1} \\ P[t] &= (I - K[t]h^T[t])(F(u)P[t-1]F(u)^T + GRG^T)\end{aligned}\quad (26)$$

改进后的 GSC-VTARMA 模型的计算复杂度为 $\Theta(k^2(n_a+n_c)^2 n_p^2)$, 对信号维度的敏感程度得到有效抑制。在不改变原有模型估计精度的前提下, 改进模型的这一显著计算优势将在后续的数值与实验验证中得到进一步验证, 为便于书写, 后续将改进的 GSC-VTARMA 模型表述为 GSC-VTARMA*模型。

3 模型结构选择

3.1 模型阶数选择

GSC-VTARMA 模型的阶数选择包括 AR 阶数 n_a , MA 阶数 n_c 和随机约束阶数 n_p 。对于参数的递推估计过程,一般根据残差特性来选择模型的阶数。残差平方和^[7,11](Residual sum of squares, RSS)和序列平方和(Series sum of squares, SSS)分别如下

$$RSS = \sum_{\tau=1}^t \hat{e}^T[t] \hat{e}[t], SSS = \sum_{\tau=1}^t x^T[t] x[t] \quad (27)$$

其中, $\hat{e}[t]$ 为残差序列估计值。RSS/SSS 在一定程度上反应了 GSC-VTARMA 模型对信号的拟合误差,基于 RSS 准则选取模型阶数的步骤归纳如下。

(1) 选择 n_a , n_c 和 n_p 的搜索区间,假定 $n_a = n_c$ 并在搜索区间内对 n_p 进行搜索。当 RSS/SSS 曲线无明显变化时,即可确定 n_p 。

(2) 在搜索区间内对 $n_a = n_c$ 进行搜索,当 RSS/SSS 曲线无明显变化时,即可确定 AR 阶数 n_a 。

(3) 在确定 AR 阶数 n_a 后,以 $[0, n_c]$ 为 MA 阶数搜索区间,依次对 n_c 进行赋值,当 RSS/SSS 曲线取极小值时,即可确定 MA 阶数 n_c 。

对于复杂结构的模型阶数选择问题,一般要基于真实物理系统的阶数,不能一味追求过低的 RSS/SSS 的比值,要在拟合精度与计算效率之间做折中。

3.2 模型结构参数选择

协方差初始矩阵 $P[0] = \alpha I$, 其中, α 一般选取较大的正数(例如, $\alpha = 10^4$), 旨在保证初始阶段的协方差矩阵足够大。其次, σ_e 、 σ_v 及其之间的比值 ν 很大程度影响着模型的跟踪性能,可基于真实物理系统时变特性的先验知识进行选择。本文基于 RSS 准则,通过试凑法,得到 ν 的一个较为合理的数值,并在后续的模型结构中直接给出所选择的数值。

4 数值算例

4.1 时变刚度结构系统

本节以时变刚度系统的非平稳振动信号来验证所提出的模型,如图 1 所示。

该时变刚度系统的运动学方程为

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + K(t)x(t) = br(t) \quad (28)$$

其中, $x(t)$ 为位移响应, $r(t)$ 为白噪声随机激励,为使参数满足摄动规律,设弹簧刚度的变化规律为

$$\begin{cases} k_i[t] = 1.2k_i[t-1] - 0.2k_i[t-2] + Y[t] & t \geq 2 \\ k_i[t] = k_{i,0} & 0 < t \leq 2 \end{cases} \quad (i=2,3) \quad (29)$$

其中, Y 为白噪声。

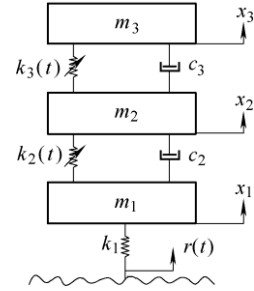


图 1 时变刚度系统

系统的各个参数值如表 1 所示。

表 1 时变系统参数

参数	数值
质量 m/kg	$m_1=0.5, m_2=1.5, m_3=1.0$
阻尼 $c/(\text{N}/(\text{m}/\text{s}))$	$c_2=0.5, c_3=0.3$
刚度 $k/(\text{N}/\text{m})$	$k_1=300, k_{2,0}=100, k_{3,0}=120$

取一组合适的离散刚度数据用于后续运算,为消除初始时刻对数值积分的影响取 $t = [-16.67, 850]$ s, 采用变步长的龙格-库塔法(ODE45)对时变刚度系统运动方程式(28)求解,且最大积分步长为 1/96 s, 进行 48 Hz 重采样,取 $t = [0, 850]$ s ($N = 40\,800$) 为最终的分析信号。利用 Monte Carlo 分析,产生 30 组白噪声激励,重复以上过程,生成 30 组分析信号。将上述 30 组分析信号通过截止频率为 6 Hz 的低通滤波器,并以 12 Hz 重采样,舍去初始的 200 个数据点,使得数据总长度为 $N = 10\,200$ 。

4.2 模型参数选择与计算结果

在模型结构选择中,所有模型均基于第一次 Monte Carlo 实验中时变刚度结构系统的位移响应信号来完成。为了方便对比, GSC-VTARMA 和 GSC-VTARMA*模型采用相同的模型结构。图 2 与图 3 给出了 RSS/SSS 随模型阶数变化的规律,即 GSC-TARMA 模型的模型阶数推荐值为 $n_a = 6, n_c = 2, n_p = 2$, GSC-VTARMA 模型及 GSC-VTARMA*模型

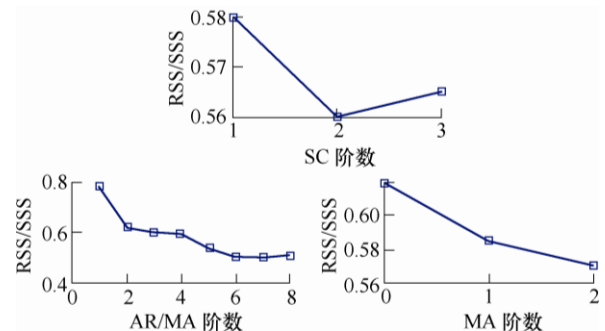


图 2 基于 GSC-TARMA 模型的阶数选择

的模型阶数推荐值为 $n_a = 2, n_c = 2, n_p = 1$ ，对于传统的 FS-VTARMA 模型，采用 $n_a = 2, n_c = 1$ ，基函数为三角函数，基函数阶数取 20 阶。

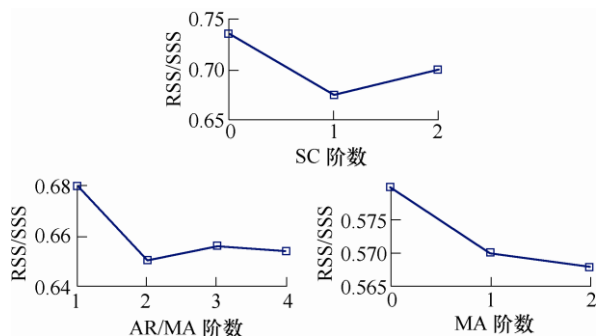
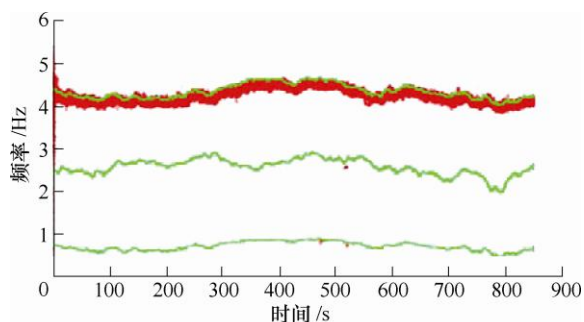
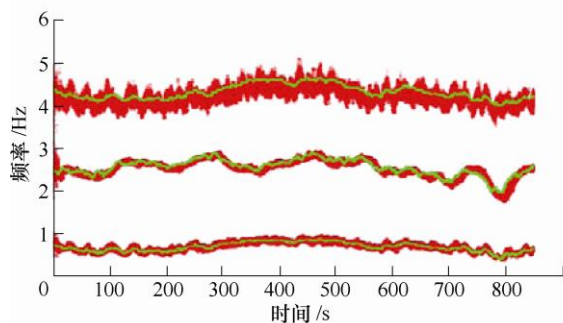


图 3 基于 GSC-VTARMA 模型的阶数选择

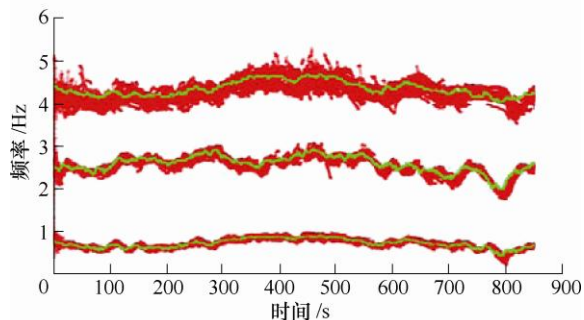
在模型超参数选择上，GSC-TARMA 模型超参数 $\nu = 6 \times 10^{-7}$ ，GSC-VTARMA 和 GSC-VTARMA* 模型超参数 $\nu = 6 \times 10^{-3}$ 。辨识模型基于 30 次 Monte Carlo 试验数据得到的模态参数辨识结果，如图 4~6 所示(图中粗线为“时间冻结”理论值，细线为辨识值)。



(a) 第一个自由度辨识结果



(b) 第二个自由度辨识结果



(c) 第三个自由度辨识结果

图 4 GSC-TARMA 模型估计的模态频率值

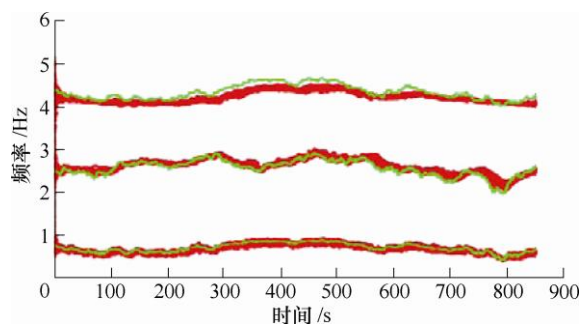


图 5 GSC-VTARMA 及改进模型估计的模态频率值

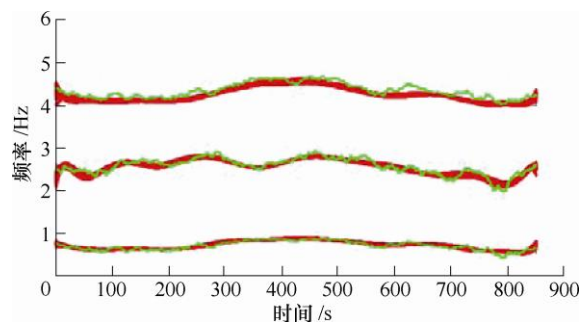


图 6 FS-VTARMA 模型估计的模态频率值

由图 4、5 可知，GSC-TARMA 模型在每个自由度上的辨识的效果均不相同：在第一个自由度上，第一、二阶模态无法较好的辨识。多维辨识模型(GSC-VTARMA/GSC-VTARMA*、FS-VTARMA)在辨识结果上，弥补了第一个自由度一、二阶模态辨识结果不佳的缺陷，得到了完整的三阶模态频率估计结果，具有更高的数据利用率和更强的辨识鲁棒性；所提模型与传统的 FS-VTARMA 相比，在一、二阶模态频率的细节估计上具有相当的辨识精度。

为了定量比较不同模型的辨识精度与时变跟踪能力，定义均值绝对误差为^[30]

$$\text{MAE} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \left(\frac{1}{L} \sum_{t=1}^L |f(t) - \hat{f}_i(t)| \right) \quad (30)$$

式中， $f(t)$ 为固有频率理论值， $\hat{f}_i(t)$ 为第 i 次 Monte Carlo 实验中固有频率的辨识值， R 为 Monte Carlo 实验次数， L 为数据长度。由于 GSC-VTARMA 与 GSC-VTARMA* 在精度上相同，故在后续的固有频率辨识中不予以区分，统一称为 GSC-VTARMA 模型辨识结果。模型的固有频率辨识结果如表 2 所示(括号内的数字表示单维辨识模型所采用的不同自由度的响应信号)

表 2 固有频率估计误差

估计模型	一阶频率 误差/Hz	二阶频率 误差/Hz	三阶频率 误差/Hz
GSC-TARMA(1)	/	/	5.817 5
GSC-TARMA(2)	0.072 3	1.587 9	3.618 5
GSC-TARMA(3)	0.043 2	1.423 6	3.692 1
GSC-VTARMA	0.037 9	1.390 7	3.322 0
FS-VTARMA	0.039 5	1.437 3	3.439 1

由表 2 可知,与单维 GSC-TARMA 模型和传统的 FS-VTARMA 模型相比,多维 GSC-VTARMA 模型具有更高的辨识精度。不同自由度上的振动响应信号对单维 GSC-TARMA 模型各阶模态的辨识结果有着很大影响,因此单维模型仅仅对“某些”自由度响应具有较好的辨识效果。多维辨识模型在处理多个通道的数据时,能够弥补各个通道响应数据的缺陷,增加了数据的利用率,在精度上也获得了较好的效果。

为了进一步比较多维辨识模型之间的计算效率,将估计过程所花费的 CPU 计算时间均值进行归一化,用于表征不同模型的计算效率。以 GSC-VTARMA 模型作为归一化计算基准(100%),三种多维模型的归一化计算时间如图 7 所示。

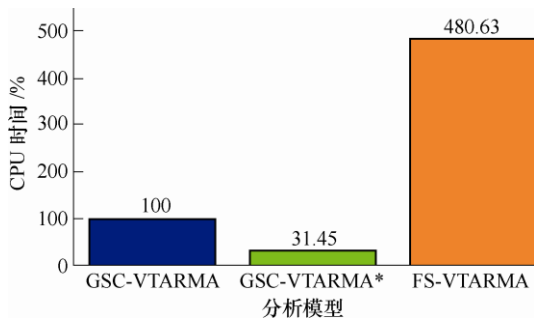


图 7 归一化计算时间

理论推导以及数值验证(图 7)已经表明,在信号维度 $k=3$ 时, GSC-VTARMA* 模型可以有效的降低计算复杂度,与 GSC-VTARMA 模型相比,计算耗时由 100% 降低到 31.45%,计算效率也高于采用非递推算法的 FS-VTARMA 模型(480.63%)。因此, GSC-VTARMA* 模型具有更高的计算效率,在线辨识能力更强。随着信号维度不断增大,改进模型的计算优势将更加凸显,这一点将在后续实验验证过程中得到体现。

5 试验验证与分析

5.1 试验结构及测试系统

移动质量简支梁试验系统^[31]包括时变结构、激励系统、力和运动传感器、测量与分析系统、电动机系统和支撑台体六部分,其设计方案及实物如图 8a 和 8b 所示。

时变结构包括简支梁和移动质量块,简支梁为 $2\,000 \times 60 \times 10\text{ mm}$ (长 \times 宽 \times 高)的钢质梁,质量为 9.420 kg 。移动质量块的尺寸为 $80 \times 60 \times 10\text{ mm}$ (长 \times 宽 \times 高),质量为 4.865 kg 。

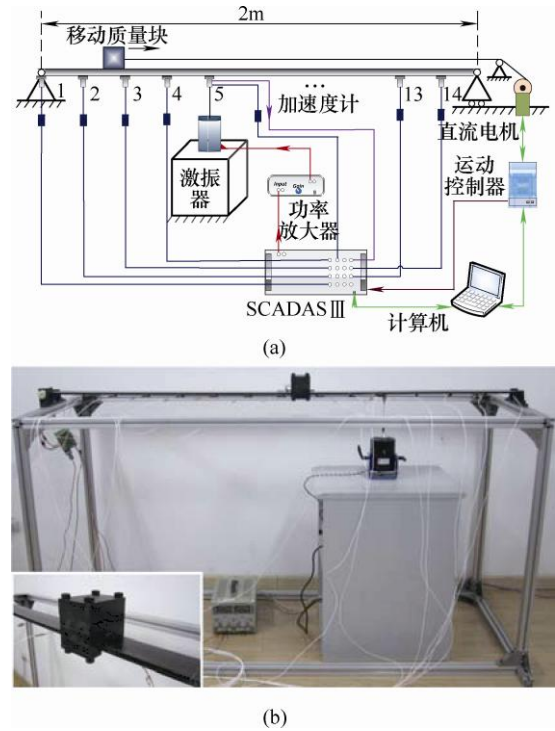


图 8 移动质量简支梁试验系统设计及实物图

5.2 “时间冻结”模态试验

在简支梁下表面沿轴向均匀布置 15 个传感器,5 号传感器位置为激励的施加位置,选用机械阻抗传感器同时测量该处的激励力和加速度响应信号;其余 14 个传感器均为加速度传感器,用以测量所在位置的加速度响应信号。

对于移动质量简支梁试验系统,把从简支梁中点到其右侧与中点相距 0.8 m 的区间做 80 等分,自左向右分别将质量块置放于等分点处,依次进行 81 组时不变结构动力学试验。试验过程中,激励为 $0 \sim 256\text{ Hz}$ 的随机激励,激励力和加速度响应信号的采样频率均为 512 Hz ,采样时长为 4 s 。辨识得到试验系统前 4 阶固有频率随质量块位置的变化规律如图 9 所示(“○”、“△”、“◇”和“+”分别代表第一、二、三和四阶模态)。

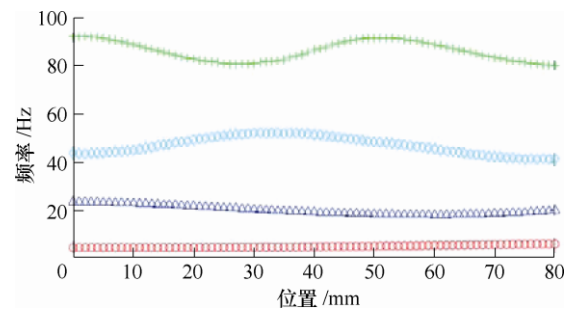


图 9 “时间冻结”模态频率

5.3 时变结构动力学试验

在时变结构的试验中,通过可控电机的牵引,控制质量块在简支梁上连续移动。试验中质量块的

运动形式为 0.10 m/s 的匀速运动, 加速度响应的采样频率为 512 Hz, 采样时长为 8 s。力和运动传感器的采样开始时刻为质量块通过简支梁中点的时刻。在上述条件下, 进行 30 组 Monte Carlo 试验, 得到 30 组加速度响应信号作为待分析信号, 用于后续的时变结构模态参数辨识。

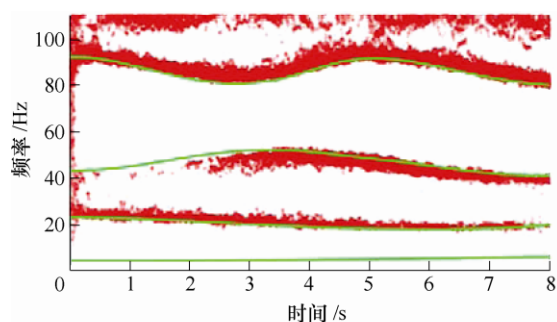
5.4 试验结果与分析

采用时变结构实验系统的非平稳加速度信号对 GSC-TARMA 模型、GSC-VTARMA/GSC-VTARMA* 模型和 FS-VTARMA 模型进行验证。在模型结构的选择中, 上述模型均只基于第一次 Monte Carlo 实验中的加速度响应信号来完成, 表 3 给出了不同模型的模型结构与超参数的选取。

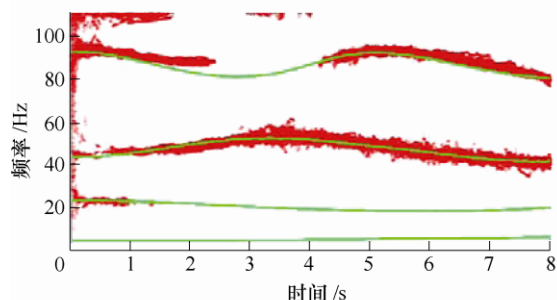
表 3 模型结构选择

估计模型	模型阶数	结构参数
GSC-TARMA	AR阶数 $n_a = 18$	超参数 $\nu = 6 \times 10^{-5}$
	MA阶数 $n_c = 4$	
	SC阶数 $n_p = 1$	
GSC-VTARMA/ GSC-VTARMA*	AR阶数 $n_a = 4$	超参数 $\nu = 6 \times 10^{-4}$
	MA阶数 $n_c = 4$	
	SC阶数 $n_p = 1$	
FS-VTARMA	AR阶数 $n_a = 2$ MA阶数 $n_c = 2$ 基函数阶数=20	/

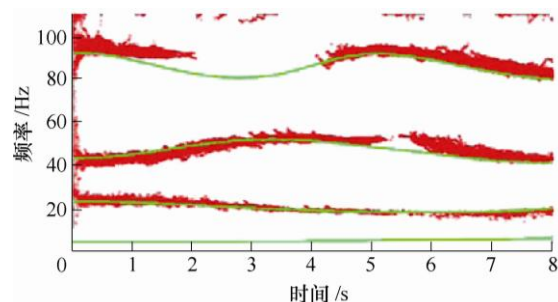
将表 3 中的模型结构与超参数应用于辨识模型中, 辨识结果如图 10~12 所示, 其中 GSC-TARMA 模型仅列出 7 号、9 号和 11 号传感器上的辨识结果。



(a) 7 号传感器加速度信号辨识结果



(b) 9 号传感器加速度信号辨识结果



(c) 11 号传感器加速度信号辨识结果

图 10 GSC-TARMA 模型试验辨识结果

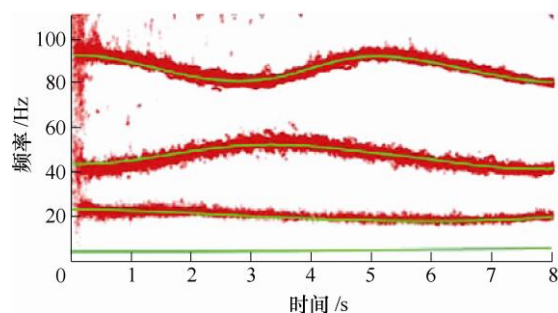


图 11 GSC-VTARMA 模型试验辨识结果

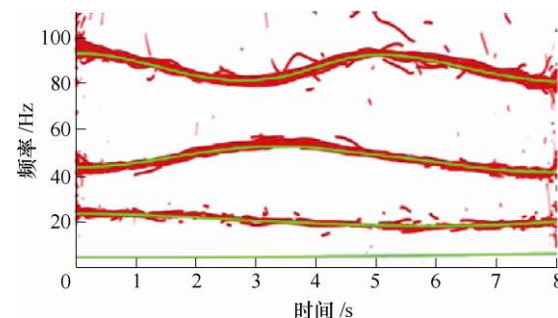


图 12 FS-VTARMA 模型试验辨识结果

由图 10~12 可知, 三种模型对第一阶模态的辨识均不太理想, 这是因为第一阶模态的频率值太低, 简支梁受到了支撑框架的影响, 而无法有效辨识。GSC-TARMA 模型在 7、9 和 11 号传感器加速度响应信号上的辨识结果均不完整, 其中 7 号传感器上的第四阶模态出现大量虚假模态, 第三阶模态无法完整辨识, 9 号传感器第二、四阶模态无法完整辨识, 11 号传感第四阶模态无法完整辨识。GSC-VTARMA/GSC-VTARMA* 模型则充分利用了所有传感器的加速度响应数据, 较好地识出了完整的第二、三和四阶模态, 并且第四阶模态附近的虚假模态也相对较少。与传统的 FS-VTARMA 模型相比, GSC-TARMA/GSC-TARMA* 模型的第二阶模态频率估计更加完整, 并且具有较少的虚假模态。综上, GSC-VTARMA/GSC-VTARMA* 模型与单维辨识模型相比, 具有更高的数据利用效率, 更强的辨识鲁棒性, 并且具有良好的估计精度, 该结论与理论推导和数值仿真算例相同。

将 30 次 Monte Carlo 试验中估计过程所花费的 CPU 计算时间的均值进行归一化, 用于表征不同模型的计算效率。以 GSC-VTARMA 模型作为计算基准(100%), 三种模型的归一化计算时间如表 4 所示(表示信号维度)

表 4 归一化计算时间

估计模型	信号维度		
	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$
GSC-VTARMA	100	100	100
GSC-VTARMA*	8.30	4.54	2.80
FS-VTARMA	1 623	2 426	2 839

由表 4 可知, GSC-TARMA*模型的归一化时间在三种模型中是最小的, 并且随着信号维度的不断增加, GSC-VTARMA*模型的归一化计算时间将继续减小, 相对计算效率也随之增高, 这与理论推导和数值算例的结果一致。因此, GSC-VTARMA*模型不仅具备了描述与处理多维信号的能力, 并且降低了模型对信号维度的敏感度, 提高了计算效率, 具有更好的在线辨识能力。

6 结论

(1) 针对多维振动响应信号下的仅输出时变结构模态参数辨识问题, 本文在单维 GSC-TARMA 模型基础上进行拓展, 提出了适应多维振动响应信号的 GSC-VTARMA 模型。

(2) 对于多维模型的计算量随信号维度增加而剧增的问题, 进一步给出了改进模型 GSC-VTARMA*。

(3) 通过数值与实验算例对所提模型进行了验证, 辨识结果表明: GSC-VTARMA 模型和 GSC-VTARMA*模型与单维 GSC-TARMA 模型相比, 具有更高的数据利用率与更强的辨识鲁棒性。

(4) GSC-VTARMA 模型和 GSC-VTARMA*模型与传统的 FS-VTARMA 模型相比, 具有相似的辨识精度以及更高的辨识效率。

(5) GSC-VTARMA*模型与 GSC-VTARMA 相比, 进一步减少了计算复杂度, 降低了模型对信号维度的敏感度, 提高了计算效率, 具有更好的在线辨识能力。

参 考 文 献

- [1] AU F T K, IANG R J, CHEUNG Y K. Parameter identification of vehicles moving on continuous bridges[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 269(1): 91-111.
- [2] KOPMAZ O, ANDERSON K S. On the eigenfrequencies of a flexible arm driven by a flexible shaft[J]. Journal of Sound & Vibration, 2001, 240(4): 679-704.
- [3] AVENDANO-VALENCIA L D, FASSOIS S D. Stationary and non-stationary random vibration modelling and analysis for an operating wind turbine[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2014, 47(1): 263-285.
- [4] WIE B. Solar sail attitude control and dynamics, Part 1[J]. Journal of Guidance Control & Dynamics, 2004, 27(4): 536-544.
- [5] CHAKRAVARTHY A, GRANT D, LIND R. Time-varying dynamics of a micro air vehicle with variable-sweep morphing[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2012, 35(3): 890-903.
- [6] 杨武, 刘莉, 周思达, 等. 移动最小二乘法的时变结构模态参数辨识[J]. 机械工程学报, 2016, 52(3): 79-85.
- [7] YANG Wu, LIU Li, ZHOU Sida, et al. Modal parameter identification of time-varying structures via moving least square method[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(3): 79-85.
- [8] POULIMENOS A G, FASSOIS S D. Parametric time-domain methods for non-stationary random vibration modelling and analysis — A critical survey and comparison[J]. Mechanical Systems & Signal Processing, 2006, 20(4): 763-816.
- [9] NIEDŹWIECKI M. Identification of time-varying processes[M]. Hoboken: John Wiley & Sons, LTD, 2000.
- [10] KITAGAWA G, GERSCH W. Smoothness priors analysis of time series[M]. Berlin: Springer, 1996.
- [11] XU Xiuzhong, ZHANG Zhiyi, HUA Hongxing, et al. Identification of time-variant modal parameters by a time-varying parametric approach[J]. Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica, 2003, 24(3): 230-233.
- [12] SPIRIDONAKOS M D, FASSOIS S D. Parametric identification of a time-varying structure based on vector vibration response measurements[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2009, 23(6): 2029-2048.
- [13] SPIRIDONAKOS M D, FASSOIS S D. Non-stationary random vibration modelling and analysis via functional series time-dependent ARMA (FS-TARMA) models — A critical survey[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2014, 47(1): 175-224.
- [14] FLORAKIS A, FASSOIS S D, HEMEZ F M. MIMO LMS-ARMAX identification of vibrating structures-Part II: A critical assessment[J]. Mechanical Systems & Signal Processing, 2001, 15(4): 737-758.
- [15] 马志赛, 丁千, 刘莉, 等. 线性时变结构模态参数时域辨识方法的研究进展[J]. 机械工程学报, 2018, 54(23): 137-159.

- MA Zhisai, DING Qian, LIU Li, et al. Reaearch progress on time-domain modal parameter estimation methods for linear time-varying structures[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(23): 137-159.
- [15] YANG J N, LIN S. Identification of parametric variations of structures based on least squares estimation and adaptive tracking technique[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2005, 131(3): 290-298.
- [16] YANG J N, PAN S, LIN S. Least-squares estimation with unknown excitations for damage identification of structures[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2007, 133(1): 12-21.
- [17] GOETHALS I, MEVEL L, BENVENISTE A, et al. Recursive output only subspace identification for in-flight flutter [C]//Proceedings of the 22nd International Modal Analysis Conference, Dearborn, Michigan, 2004.
- [18] MEVEL L, BASSEVILLE M, BENVENISTE A. Fast in-flight detection of flutter onset : A statistical approach[J]. Journal of Guidance Control & Dynamics, 2003, 28(3): 431-438.
- [19] LIU K, DENG L. Identification of pseudo-natural frequencies of an axially moving cantilever beam using a subspace-based algorithm[J]. Mechanical Systems & Signal Processing, 2006, 20(1): 94-113.
- [20] GERSCH W, KITAGAWA G. A time varying multivariate autoregressive modeling of econometric time series [C]//Proceedings of the Business and Statistics ASA Annual Meeting, Toronto, 1983, 399-404.
- [21] SATO J R, MORETTIN P A, ARANTES P R, et al. Wavelet based time-varying vector autoregressive modelling[J]. Computational Statistics & Data Analysis, 2007, 51(12): 5847-5866.
- [22] KITAGAWA G. Changing spectrum estimation[J]. Journal of Sound and Vibration, 1983, 89(3): 433-445.
- [23] KITAGAWA G, GERSCH W. A smoothness priors time-varying AR coefficient modeling of nonstationary covariance time series[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1985, 30(1): 48-56.
- [24] GERSCH W, KITAGAWA G. A time varying AR coefficient model for modelling and simulating earthquake ground motion[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1985, 13(1): 243-254.
- [25] CHEN L. Vector time-varying autoregressive (TVAR) models and their application to downburst wind speeds [D]. Texas: Texas Tech University, 2005.
- [26] AVENDANO-VALENCIA L D, FASSOIS S D. Generalized stochastic constraint TARMA models for in-operation identification of wind turbine non-stationary dynamics[J]. Key Engineering Materials, 2013, 570: 587-594.
- [27] YANG Wu, LIU Li, ZHOU Sida, et al. Moving kriging shape function modeling of vector TARMA models for modal identification of linear time-varying structural systems[J]. Journal of Sound & Vibration, 2015, 354: 254-277.
- [28] AVENDANO-VALENCIA L D, FASSOIS S D. Markov chain Monte Carlo estimation of non-stationary GSC-TARMA models: Application to random vibration modelling and analysis for an operating wind turbine [C]//Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering, Leuven, 2016.
- [29] DAN S. Optimal state estimation: Kalman, H^∞ , and nonlinear approaches[M]. New York: Wiley-Interscience, 2006.
- [30] 马志赛. 线性时变结构模态参数仅输出递推辨识方法研究[D]. 北京理工大学, 2017.
- MA Zhisai. Output-only modal parameter recursive estimation for linear time-varying structures[D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2017.
- [31] 马志赛, 刘莉, 周思达, 等. 移动质量简支梁耦合时变系统建模与实验设计[J]. 振动、测试与诊断, 2015, 35(5): 913-920.
- MA Zhisai, LIU Li, ZHOU Sida, et al. Modelling and experimental design of the coupled moving-mass and simply supported beam time-varying system[J]. Journal of Vibration Measurement and Dagnosis, 2015, 35(5): 913-920.

作者简介: 余磊, 男, 1990 年出生, 博士研究生。主要研究方向为时变结构模态参数辨识。

E-mail: bit_yulei@foxmail.com

刘莉(通信作者), 女, 1964 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为飞行器总体设计、飞行器结构设计与分析等。

E-mail: liuli@bit.edu.cn