DOI: 10.3901/JME.2015.13.069

机构自由度公式的基本形式、自由度 分析及其物理内涵*

杨廷力¹ 沈惠平¹ 刘安心² 戴建生³

- (1. 常州大学现代机构研究中心 常州 213016;
2. 中国人民解放军解放军理工大学 南京 210007;
3. 伦敦大学国王学院 伦敦 WC2R 2LS 英国)

摘要: 对近十年提出的7种自由度(Degree of freedom, DOF)公式及其主要特点进行回顾。给出基于约束分析的DOF公式的统一形式与基于运动分析的DOF公式的基本形式。给出基于运动分析的DOF计算方法与基于约束分析的DOF计算方法。基于DOF公式,确定机构的拓扑结构特征,如机构的DOF、动平台的方位特征集及其维数、独立位移方程数、过约束度、冗余自由度,判定消极运动副与选取驱动副等。揭示DOF公式的物理内涵,即DOF公式表述了机构DOF、拓扑结构与运动方位特征三者之间的映射关系,而机构的拓扑结构和方位特征的运动过程不变性是构建这一映射关系的理论基础。

关键词: 并联机构; 自由度; 拓扑结构; 方位特征; 约束分析; 运动分析; 拓扑结构特征

中图分类号: TH112

Review of the Formulas for Degrees of Freedom in the Past Ten Years

YANG Tingli¹ SHEN Huiping¹ LIU Anxin² DAI Jiansheng³

- (1. Research Center for Advanced Mechanism Theory, Changzhou University, Changzhou 213016;
2. PLA University of Science and Technology, Nanjing 210007;
3. King's College, University of London, London WC2R 2LS, UK)

Abstract: A review of seven significant DOF formulas proposed over the past ten years with their main characteristics is presented. On this basis, significant aspect related DOF on their basic form of constraint-analysis-based DOF formulas of motion-analysis-based DOF formulas is presented, their procedures are given. The characteristics of a mechanism topology structure are determined based on DOF formulas, such as mechanism DOF, position and orientation characteristic (POC) set of moving platform and its dimension, number of independent position equations, over constraint degree, redundant DOF and the determination of passive and active kinematic pairs. The mapping relationship among mechanism DOF, topology structure and POC set is further revealed with the invariance property of the mechanism topology structure and the POC set as the theoretical foundation for constructing this mapping relationship is presented.

Key words: parallel mechanism; degree of freedom; topological structure; position and orientation characteristic; constraint analysis; motion analysis; topology structure characteristics

0 前言

机构自由度(Degree of freedom, DOF)也称活动度,是机构拓扑结构的一个主要参数,也是机构拓扑结构学、运动学和动力学的最基本的概念之一。

世界机构与机器联合会定义机构自由度或活动度为确定一个运动链或机构装配构形的独立参量数^[1]。

一百多年来,众多文献提出了30多种DOF公式,文献[2]对这些公式进行了比较详细的回顾与评述,其中,比较重要的早期经典公式如下。

Moroskine 公式^[3]

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \xi_M \quad (1)$$

* 国家自然科学基金资助项目(51175366, 51375062, 51365036, 51475050)。
20140618收到初稿,20150522收到修改稿

式中 F ——机构 DOF;

f_i ——第 i 个运动副的自由度;

m ——运动副数目;

ξ_M ——机构速度方程组的秩($\xi_M = \xi_{ve}$ 时)或
机构位移方程组的独立位移方程数
($\xi_M = \xi_{di}$ 时)。

式(1)的主要特点如下。

(1) 该法无例外地适用于所有机构, 但需要首先建立运动约束方程。

(2) 当 $\xi_M = \xi_{di}$ 时, 确定 ξ_{di} 为较困难的非线性问题, 但得到整周 DOF; 当 $\xi_M = \xi_{ve}$ 时, 确定 ξ_{ve} 为简单的线性问题, 得到瞬时 DOF, 且需要进行整周 DOF 判定。

(3) 对非奇异位置, $\xi_{di} = \xi_{ve}$, 瞬时 DOF 等于整周 DOF; 对奇异位置, $\xi_{ve} < \xi_{di}$, 瞬时 DOF 大于整周 DOF。

该方法不能用于机构的拓扑结构设计, 因该设计阶段不可能建立运动约束方程。因此, 应寻求不需要建立运动约束方程的 DOF 计算的简单方法。

Grübler-Kutzbach 公式^[4]

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - d(m - n + 1) \quad (2)$$

式中 d ——机构的阶数(对空间机构, $d = 6$; 对平面与球面机构, $d = 3$);

n ——构件数目;

ν ——独立回路数($\nu = m - n + 1$)。

式(2)的主要特点如下。

(1) 适用于独立回路阶数 d 相同的机构。

(2) 尚未给出确定独立回路阶数 d 的一般方法。

(3) 尚未考虑不同回路阶数 d 之间的相关性。

Zhang 公式^[5], Freudenstein-Alizade 公式^[6]

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{\nu} \xi_j \quad (3)$$

式中 ξ_j ——第 j 个回路的独立位移方程数。

式(3)的主要特点如下。

(1) 适用于回路具有不同 ξ_j 的机构, 但尚未给出确定 ξ_j 的一般方法。

(2) 尚未考虑不同回路的 ξ_j 之间的相关性。

为计算含有简单支路和复杂支路的并联机构 DOF, 最近十多年, 又提出一些新的 DOF 公式^[7-20]。本文在第 2~7 节回顾与分析这些公式的基本结构及其特点、DOF 公式的基本形式及其计算方法, 以及 DOF 公式的物理内涵。

1 近十年提出的 DOF 公式

1.1 Zhao-Zhou-Feng 公式

该公式如下^[7]

$$F = 6 - d + \sum_{j=1}^{\nu+1} r_j \quad (4)$$

式中 d ——动平台约束螺旋系的秩;

r_j ——第 j 条支路的运动螺旋系的元素数与其秩之间的差值;

$\nu + 1$ ——并联机构的支路数。

式(4)的主要特点如下。

(1) 利用解析形式的运动螺旋系及其约束螺旋系, 计算 DOF。

(2) 得到瞬时 DOF, 并给出其整周性判定与奇异性分析相结合的方法。

(3) DOF 计算已考虑驱动副选取方案。

1.2 Dai-Huang-Lipkin 公式

该公式如下^[8-9]

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - 6(m - n + 1) + [\text{card}\langle S^r \rangle - \dim(S^r)] \quad (5)$$

式中 $\text{card}\langle S^r \rangle$ ——动平台约束螺旋集合的元素数;

$\dim(S^r)$ ——动平台约束螺旋集合的秩。

式(5)的主要特点如下。

(1) 利用有限位移螺旋系^[10-11]及其约束螺旋系^[12], 计算 DOF。

(2) 得到阶段性的 DOF, 其在奇异点间为非瞬时 DOF, 并给出了整周性判定。

(3) 可视为对 Grübler-Kutzbach formula (式(2))的修正, 修正项为式(5)等号右侧的第 3 项。

1.3 Gogu 公式

该公式如下^[13]

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{\nu+1} \text{rank}(R_{Aj}) + \text{rank}\left(\bigcap_{j=1}^{\nu+1} R_{Aj}\right) \quad (6)$$

式中 $\text{rank}(R_{Aj})$ ——第 j 条支路两端构件的相对速度空间的维数;

R_{Aj} ——第 j 条支路两端构件的相对速度空间。

式(6)的主要特点如下。

(1) 基于速度空间分析, 计算 DOF。

(2) 得到瞬时 DOF, 用观察法判定整周 DOF。

(3) 当速度空间含非独立元素时, 尚未见到确定式(6)等号右边第 3 项的方法。

1.4 Huang-Zhao-Zhao 公式

该公式如下^[14-16]

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - d(m-n+1) + (\sum_{j=1}^p q_j - \lambda \cdot p - k) \quad (7)$$

式中 d ——运动螺旋系的秩, $d=6-\lambda$;
 λ ——机构的公共约束, 即与运动螺旋系所有螺旋相逆的反螺旋的数目;
 p ——并联机构支路数;
 q_j ——每个支路的约束螺旋数;
 k —— $p(q_j - \lambda)$ 个约束螺旋的秩。

式(7)的主要特点如下。

- (1) 利用运动螺旋系与约束螺旋系, 计算 DOF。
- (2) 得到瞬时 DOF, 需要进行整周 DOF 判定。
- (3) 可视为对 Grübler-Kutzbach 公式(式(2))的修正, 修正项为式(7)等号右侧的第 3 项。
- (4) 基本思想: “将坐标系建立在分支上, 并使螺旋的 6 个元素尽量地简单, 让很多元素为零或 1”; “不依赖统一的坐标系来汇总各个分支部分的螺旋, 而是通过以逻辑思维和形象思维相结合的办法以逻辑推理的方法, 导出整个机构的约束螺旋系和运动螺旋系以及它们的阶”^[15]。

顺便说明: 为使该方法便于操作, 文献[25]提出了对其改进的方法。

1.5 Kong-Gosselin 公式

该公式如下^[17-18]

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{\nu+1} C^j + C \quad (8)$$

式中 f_i ——第 i 个运动副的自由度;
 M ——运动副数目;
 C^j ——第 j 条支路的运动螺旋系的秩;
 C ——动平台的运动螺旋系的秩。

式(8)的主要特点如下。

- (1) 利用运动螺旋系与约束螺旋系, 计算 DOF。
- (2) 得到瞬时 DOF, 需要进行整周 DOF 判定。

1.6 Rico 公式

该公式如下^[19]

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{\nu+1} \dim(A_j^{mlf}) + \dim(\bigcap_{j=1}^{\nu+1} A_j^{mlf}) \quad (9)$$

式中 $\dim(A_j^{mlf})$ ——第 j 条支路末端构件位移子群的维数;
 $\dim(\bigcap_{j=1}^{\nu+1} A_j^{mlf})$ ——动平台位移子群的维数。

式(9)的主要特点如下。

- (1) 得到全周 DOF。
- (2) 当含非独立元素时, 尚未见到确定式(9)等号右边第 3 项的方法。
- (3) 可用于具有位移子群结构的并联机构, 尚不能涵盖子流形机构。

1.7 Yang-Sun 公式^[20-24]

该公式如下^[20-24]

$$\begin{cases} F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{\nu} \xi_{L_j} \\ \xi_{L_j} = \dim(\bigcap_{i=1}^j M_{b_i}) \cup M_{b_{(j+1)}} \end{cases} \quad (10)$$

或记作

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{\nu} \dim\{(\bigcap_{i=1}^j M_{b_i}) \cup M_{b_{(j+1)}}\}$$

式中 M_{b_j} ——第 j 条支路末端构件的方位特征集 (POC 集), 且 POC 集可含非独立元素;
 $M_{b_{(j+1)}}$ ——第 $(j+1)$ 条支路末端构件的 POC 集;
 ξ_{L_j} ——第 j 个独立回路的独立位移方程数。

式(10)的特点如下。

- (1) 得到全周 DOF。
- (2) 用于并联机构与任意多回路空间机构, 可视为对经典 DOF 公式(式(3))的发展。
- (3) 基于式(10), 给出了消极运动副判定准则^[20-24, 28]: 对 $\text{DOF} > 0$ 的机构, 假想某个运动副被锁定, 可得到一个新机构。如果新机构与原机构的 DOF 相等, 则被锁定的运动副为原机构的消极运动副; 否则, 不是消极运动副。
- (4) 基于式(10), 给出了驱动副选定准则^[20-24, 28]: 对 $\text{DOF} = F$ 的机构, 可预选 F 个运动副为驱动副, 并将它们锁定, 可得到一个新机构。如果新机构的 $\text{DOF} = 0$, 则预选的 F 个运动副可同时为驱动副; 如果新机构的 $\text{DOF} > 0$, 则预选的 F 个运动副不能同时为驱动副。

顺便说明: 若将集合论公式

$$\dim(R_A \cup R_B) = \dim(R_A) + \dim(R_B) - \dim(R_A \cap R_B)$$

代入式(10), 可得到式(10)的另一种等价形式^[22, 24]

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{\nu+1} \dim\{M_{b_j}\} + \dim\{\bigcap_{j=1}^{\nu+1} M_{b_j}\} \quad (11)$$

当 POC 集含非独立元素时, 应考虑到^[24-28]

$$\dim\{\bigcap_{j=1}^{\nu+1} M_{b_j}\} \leq \text{DOF} \quad (12)$$

因此, 式(11)只能用于 POC 集不含非独立元素的 DOF 计算, 仅是式(10)的特例。

2 DOF 公式的基本形式

2.1 基于约束分析的 DOF 公式的统一形式

由第 1 节已知, 基于螺旋理论的 DOF 公式(式(4)~(7))具有不同形式, 但可化为统一形式, 即式(13), 其证明详见文献[25]

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{(\nu+1)} \text{rank}(S_{b_j}) + \text{rank}(S_{Pa}) \quad (13)$$

式中 $\text{rank}(S_{b_j})$ ——第 j 条支路的运动螺旋系的秩;

$\text{rank}(S_{Pa})$ ——动平台运动螺旋系的秩。

式(13)的主要特点如下。

(1) 利用运动螺旋系与约束螺旋系, 计算 DOF。

(2) 得到瞬时 DOF, 需要进行整周 DOF 判定。

式(13)可改记为

$$F = D_{Re} + \text{rank}(S_{Pa}) \quad (14)$$

式中 D_{Re} ——冗余自由度, 即

$$D_{Re} = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{\nu+1} \text{rank}(S_{b_j}) \quad (15)$$

因此, 机构 DOF(式(13))等于机构的冗余 DOF 与动平台输出 DOF 之和。

(3) $\text{rank}(S_{Pa})$ 的计算可以采用第 1.1、1.3~1.7 节的算法, 得到瞬时 DOF。当按照第 1.2 节采用有限位移旋量^[10-12]时, 得到非瞬时旋量, 由此给出阶段性 DOF, 其在奇异点间为非瞬时 DOF^[12]。

由于式(4)、(5)和式(7)、(8)与式(13)的 DOF 计算都涉及约束螺旋系分析, 故称式(13)为基于约束分析的 DOF 公式的统一形式, 如表 1 所示。

表 1 DOF 公式的基本形式

DOF 公式	DOF 公式的基本形式
Zhao-Zhou-Feng 式(4)	
Dai-Huang-Lipkin 式(5)	基于约束分析的式(13), 得到瞬时
Huang-Zhao-Zhao 式(7)	DOF, 需要整周 DOF 判定
Kong-Gosselin 式(8)	
Gogu 式(6)	瞬时 DOF, 需要整周 DOF 判定
Rico 式(9)	基于运动分析的式(10), 得到整周 DOF
Yang-Sun 式(10)	

2.2 基于运动分析的 DOF 公式的基本形式

由第 1 节已知以下几点。

(1) 基于速度空间的 DOF 公式(式(6))不适用于速度空间含非独立元素的机构, 因为动平台速度空间的独立元素数目还受到机构 DOF 的约束(式(12))。

(2) 基于位移子群的 DOF 公式(式(9))尚不适用于子流形机构, 如图 1 与图 2 所示的并联机构。

图 1 一种 4 支路并联机构

图 2 一种 4 支路并联机构

(3) 基于 POC 集的 DOF 公式(式(11))不适用于 POC 集含非独立元素的机构, 因为动平台 POC 集的独立元素数还受到机构 DOF 的约束(式(12)), 如图 2 所示的并联机构。

(4) 相对于以上三种 DOF 公式(式(6)、(9)、(11)), 基于 POC 集的 DOF 公式(式(10))具有一般性: 可用于 POC 集含非独立元素的机构, 又可用于任意多回路空间机构, 且已涵盖位移子群机构与子流形机构。

因此, 式(10)可称为基于运动分析的 DOF 公式的基本形式, 如表 1 所示。

3 基于运动分析的 DOF 计算

3.1 主要步骤

基于运动分析的 DOF 公式(式(10)), 计算 DOF 的主要分以下几步。

(1) 确定机构的拓扑结构。

(2) 选取固联在动平台上的动坐标系。

(3) 确定各支路的 POC 集。

对固联在动平台上的同一个动坐标系, 用串联机构 POC 方程(式(16)), 确定各支路末端构件的 POC 集, 其中, 串联机构 POC 方程为^[23-28]

$$M_S = \bigcup_{i=1}^m M_{J_i} \quad (16)$$

式中 M_S ——末端构件相对于机架的 POC 集;

M_{J_i} ——第 i 个运动副的 POC 集, 如表 2 所示。

表 2 运动副的 POC 集

运动副	P	R	H
POC 集	$\begin{pmatrix} l^1(\parallel P) \\ r^0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} l^1(\perp(R, \rho)) \\ r^1(\parallel R) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} l^1(\parallel H) \cup l^1(\perp(H, \rho)) \\ r^1(\parallel H) \end{pmatrix}$

(4) 确定机构的整周 DOF。将各支路的 POC 集代入 DOF 公式(式(10)), 并由串联机构 POC 方程(式(16))与并联机构 POC 方程(式(17)), 确定机构的整周 DOF。其中, 并联机构 POC 方程为^[23-28]

$$M_{Pa} = \bigcap_{j=1}^{\nu+1} M_{b_j} \quad (17)$$

式中 M_{Pa} ——动平台相对于定平台的 POC 集;

M_{b_j} ——第 j 条支路的 POC 集。

(5) 确定动平台的 POC 集。已知机构 DOF, 由并联机构 POC 方程(式(17)), 确定动平台的 POC 集, 并标注独立元素与非独立元素。

3.2 举例

例 1, 确定图 1 并联机构(动平台 R 副轴线交于一点)的 DOF 与动平台的 POC 集。

(1) 机构拓扑结构。支路拓扑结构: 4 条支路 $SOC\{-R_{i1}(\perp P_{i2}) \parallel R_{i3} - \overline{R_{i4}R_{i5}}-\}$, $i=1, 2, 3, 4$ 。

两平台拓扑结构: 定平台 $R_{11} \parallel R_{21}; R_{31} \parallel R_{41}$, 但 R_{11} 与 R_{31} 为空间任意交叉; 动平台 $R_{14}, R_{15}, R_{24}, R_{25}, R_{34}, R_{35}, R_{44}$ 和 R_{45} 的轴线交于同一点 o' 。

(2) 选定支路末端 8 个 R 副轴线的交点 o' 为动坐标系原点(即基点 o'), 如图 1 所示。

(3) 确定支路末端构件的 POC 集。将表 2 的运动副 POC 集代入串联机构 POC 方程(式(16)), 并考虑到支路拓扑结构的几何条件, 可得到支路相对于基点 o' 的 POC 集

$$M_{b_i} = \begin{bmatrix} t^1(\perp R_{i1}) \\ r^1(\parallel R_{i1}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^1(\parallel P_{i2}) \\ r^0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^1(\perp R_{i3}) \\ r^1(\parallel R_{i3}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^0 \\ r^1(\parallel R_{i4}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^0 \\ r^1(\parallel R_{i5}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{i1}) \\ r^3 \end{bmatrix} \quad i=1, 2, 3, 4$$

(4) 确定机构的 DOF。将各支路 POC 集代入式(10), 由式(16)、(17), 并考虑到拓扑结构的几何条件, 可依次得到各独立回路的独立位移方程数

$$\begin{aligned} \xi_{L_1} &= \dim\{M_{b_1} \cup M_{b_2}\} = \\ \dim\left\{\begin{bmatrix} t^2(\perp R_{11}) \\ r^3 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{21}) \\ r^3 \end{bmatrix}\right\} &= 5 \\ \xi_{L_2} &= \dim\left\{\left(\bigcap_{i=1}^2 M_{b_i}\right) \cup M_{b_3}\right\} = \\ \dim\left\{\left(\begin{bmatrix} t^2(\perp R_{11}) \\ r^3 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{21}) \\ r^3 \end{bmatrix}\right) \cup \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{31}) \\ r^3 \end{bmatrix}\right\} &= 6 \\ \xi_{L_3} &= \dim\left\{\left(\bigcap_{i=1}^3 M_{b_i}\right) \cup M_{b_4}\right\} = \\ \dim\left\{\left(\begin{bmatrix} t^2(\perp R_{11}) \\ r^3 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{21}) \\ r^3 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{31}) \\ r^3 \end{bmatrix}\right) \cup \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{41}) \\ r^3 \end{bmatrix}\right\} &= 5 \end{aligned}$$

因此

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^p \dim\left\{\left(\bigcap_{i=1}^j M_{b_i}\right) \cup M_{b_{(j+1)}}\right\} = 20 - (5 + 6 + 5) = 4$$

(5) 确定并联机构动平台的 POC 集。由式(17), 并考虑到 $DOF = 4$, 并联机构动平台的 POC 集为

$$M_{Pa} = \bigcap_{i=1}^4 \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{i1}) \\ r^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^1(\perp (R_{11}, R_{31})) \\ r^3 \end{bmatrix}$$

由 M_{Pa} 可知: 动平台存在 3 个独立转动; 又在 R_{11} 和 R_{31} 副的两轴线的公垂线方向, 存在 1 个独立移动。

应注意到: 图 1 机构的 POC 集不含非独立元素, 但它是子流形机构。因此, 式(10)和式(11)可用于该机构 DOF 计算。但式(9)不能用于该并联机构 DOF 计算。

例 2, 确定图 2 并联机构(动平台 R 副轴线交于两点)的 DOF 与动平台的 POC 集。

(1) 机构拓扑结构。支路拓扑结构: 4 条支路 $SOC\{-R_{i1}(\perp P_{i2}) \parallel R_{i3} - \overline{R_{i4}R_{i5}}-\}$, $i=1, 2, 3, 4$ 。两平台拓扑结构: 定平台 $R_{11} \parallel R_{21}; R_{31} \parallel R_{41}$, 但 R_{11} 与 R_{31} 为空间任意交叉; 动平台 R_{14}, R_{15}, R_{44} 与 R_{45} 的轴线交于一点 o_1' ; R_{24}, R_{25}, R_{34} 与 R_{35} 的轴线交于另一点 o_2' 。

(2) 选定支路 1 和 4 的末端 4 个 R 副轴线的交点 o_1' 为动坐标系原点, 如图 2 所示。

(3) 确定支路末端构件的 POC 集。类似于例 1 之(3), 将表 2 的运动副 POC 集代入串联机构 POC 方程(式(16)), 并考虑到支路拓扑结构的几何条件, 可得到支路相对于基点 o_1' 的 POC 集如下。

1) 支路 1 与 4 的 POC 集为

$$M_{b_i} = \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{i1}) \\ r^3 \end{bmatrix} \quad i=1, 4$$

2) 支路 2 与 3 的 POC 集为

$$M_{b_i} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \quad i=2, 3$$

(4) 确定机构的 DOF。将各支路 POC 集代入式(10), 由式(16)和式(17), 并考虑到机构拓扑结构的几何条件, 可依次得到各独立回路的独立位移方程数 ξ_{L_j}

$$\xi_{L_1} = \dim\{M_{b_1} \cup M_{b_2}\} = \dim\left\{\begin{bmatrix} t^2(\perp R_{11}) \\ r^3 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix}\right\} = 6$$

$$\begin{aligned} \xi_{L_2} &= \dim\left\{\left(\bigcap_{i=1}^2 M_{b_i}\right) \cup M_{b_3}\right\} = \\ \dim\left\{\left(\begin{bmatrix} t^2(\perp R_{11}) \\ r^3 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix}\right) \cup \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{31}) \\ r^3 \end{bmatrix}\right\} &= 6 \end{aligned}$$

$$\xi_{L_3} = \dim \left\{ \left(\bigcap_{i=1}^3 M_{b_i} \right) \cup M_{b_4} \right\} =$$

$$\dim \left\{ \left[\begin{array}{c} t^2(\perp R_{11}) \\ r^3 \end{array} \right] \cap \left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^3 \end{array} \right] \cap \left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^3 \end{array} \right] \cup \left[\begin{array}{c} t^2(\perp R_{41}) \\ r^3 \end{array} \right] \right\} = 6$$

因此

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{\nu} \dim \{ (\bigcap_{i=1}^j M_{b_i}) \cup M_{b_{(j+1)}} \} =$$

$$20 - (6 \times 3) = 2$$

(5) 确定并联机构动平台的 POC 集。由式(17), 并联机构动平台的 POC 集为

$$M_{Pa} = \left[\begin{array}{c} t^2(\perp R_{11}) \\ r^3 \end{array} \right] \cap \left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^3 \end{array} \right] \cap \left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^3 \end{array} \right] \cap \left[\begin{array}{c} t^2(\perp R_{41}) \\ r^3 \end{array} \right] =$$

$$\left[\begin{array}{c} t^1(\perp (R_{11}, R_{41})) \\ r^3 \end{array} \right]$$

由 M_{Pa} 可知: 动平台存在 3 个转动, 又在 R_{11} 和 R_{31} 副的两轴线的公垂线方向, 存在 1 个移动。但机构 $\text{DOF} = 2$, 由式(12), M_{Pa} 的 4 个元素中只能取 2 个为独立元素, 则另 2 个为非独立元素(应置于大括号内)。显然, 可有多种选取方案。如方案之一可取为

$$M_{Pa} = \left[\begin{array}{c} t^1(\perp (R_{11}, R_{41})) \\ r^1 \cup \{r^2\} \end{array} \right]$$

该 M_{Pa} 表示: 动平台存在 1 个独立转动和 2 个非独立转动(置于大括号内), 又在 R_{11} 和 R_{31} 两轴线的公垂线方向, 存在 1 个独立移动。

应注意到: 该机构是子流形机构, 且 POC 集含有非独立元素。因此, 式(6)、(9)和(11)都不能用于图 2 并联机构的 DOF 计算。

由例 1 与例 2 可知, DOF 公式(式(10))揭示了机构的 DOF, 拓扑结构与方位特征 3 者之间的映射关系。DOF 计算与运动位置无关, 因此, 称为 DOF 计算的几何化方法。

4 基于约束分析的 DOF 计算

4.1 主要步骤

基于约束分析的 DOF 公式(式(13)), 计算 DOF 的主要步骤如下。

(1) 确定机构的拓扑结构。

(2) 由各支路坐标系分别确定支路的运动螺旋系, 经互易积得到各支路的约束螺旋系。再在同一个定坐标系中, 获取动平台的约束螺旋系。

(3) 确定各支路约束螺旋系的秩和动平台约束

螺旋系的秩, 及其对应的运动螺旋系的秩。

(4) 将各支路和动平台的运动螺旋系的秩代入式(13), 得到机构的瞬时 DOF。

(5) 瞬时 DOF 的整周性判定。

(6) 由动平台的约束螺旋系, 经互易积得到动平台的运动螺旋系。

4.2 DOF 的非瞬时性判定方法

基于约束分析的 DOF 计算得到瞬时 DOF, 因此需要判定它是否是全周 DOF。目前, 已提出如下判定方法。

(1) 基于“不变螺旋系”的整周 DOF 判定方法, 但尚不适用于子流形机构^[29]。

(2) 基于有限位移旋量^[10-12], 完成有限位移约束旋量的构造, 有限位移旋量给出了分布在奇异点间的全周运动, 由此在奇异点间的 DOF 为整周 DOF^[11-12]。

(3) 整周 DOF 判定的五步法^[18]。

(4) 基于机构的“足够小有限位移”的判别方法^[15]。

4.3 举例

例 3, 确定图 1 并联机构(动平台 R 副轴线交于一点)的 DOF 与动平台的运动螺旋系, 本例中的 $\text{rank}(S_{Pa})$ 采用第 1.2 节的有限位移旋量方法^[10-12] 计算。

(1) 机构拓扑结构。支路拓扑结构: 4 条支路 $\text{SOC}\{-R_{i1}(\perp P_{i2}) \parallel R_{i3} - \widehat{R_{i4}R_{i5}} -\}$, $i=1, 2, 3, 4$ 。两平台拓扑结构: 定平台 $R_{11} \parallel R_{21}; R_{31} \parallel R_{41}$, $R_{11} \perp R_{41}$; 且 4 个 R 副分布如图 3 所示; 动平台 $R_{14}, R_{15}, R_{24}, R_{25}, R_{34}, R_{35}, R_{44}$ 和 R_{45} 的轴线交于一点 O' 。

图 3 定平台 4 个 R 副的方位

(2) 确定机构的定坐标系与支路的坐标系。机构定坐标系如图 3 所示, 且 z 轴线通过 O' 点。支路的坐标系如图 4 所示。

(3) 在支路坐标系中, 确定支路的运动螺旋系与约束螺旋系。

在图 4 所示支路坐标系中, 支路 b 的有限位移螺旋系为

(3) 在支路坐标系中, 确定支路的有限位移螺旋系与约束螺旋系。

已知, 完全同于例 3 的支路有限位移螺旋系与约束螺旋系, 支路运动螺旋系的秩为 $\text{rank}(S_{b_j})=5$ 。

(4) 在定坐标系中, 确定机构动平台约束旋量系与有限位移螺旋系的秩。将各支路约束螺旋系转化到定坐标系 $Ox_0y_0z_0$ 中, 得到动平台约束螺旋系为

$$S_{Pa}^r = \left\{ \begin{array}{l} S_{11}^r = (0, -1, 0, m_1, 0, a + n_1)^T \\ S_{21}^r = (0, 1, 0, -m_2, 0, a + n_2)^T \\ S_{31}^r = (1, 0, 0, 0, m_3, a + n_3)^T \\ S_{41}^r = (1, 0, 0, 0, m_4, a + n_4)^T \end{array} \right\}$$

且有

$$m_1 \equiv m_4 \quad m_2 \equiv m_3$$

因此, 动平台约束螺旋系的秩为

$$\text{rank}(S_{Pa}^r)=4$$

动平台有限位移螺旋系的秩为

$$\text{rank}(S_{Pa})=6-4=2$$

(5) 确定机构自由度

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^{\nu+1} \text{rank}(S_{b_j}) + \text{rank}(S_{Pa}) = 20 - 4 \times 5 + 2 = 2$$

(6) 确定动平台有限位移螺旋系

$$S_{Pa} = \left\{ \begin{array}{l} S_{f1} = \left(\frac{n'_1 + n'_2}{m_2 - m_1}, \frac{n'_4 - n'_3}{m_2 - m_1}, 1, \frac{m_1 n'_3 - m_2 n'_4}{m_2 - m_1}, \frac{m_1 n'_2 + m_2 n'_1}{m_2 - m_1}, 0 \right)^T \\ S_{f2} = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T \end{array} \right\}$$

$$n'_1 = a + n_1 \quad n'_2 = a + n_2 \quad n'_3 = a + n_3 \quad n'_4 = a + n_4$$

因此, 动平台具有一个转动 DOF 和一个平移 DOF。

(7) 瞬时 DOF 的整周性判定。有限位移旋量可以构成群结构以表达机构的整周运动, 具有非瞬时性特征^[10-12]。支链运动旋量系与动平台约束旋量系均采用有限位移旋量, 因此求出的机构 DOF 为非瞬时的; 从另一个角度看, 尽管支链运动旋量系随机构运动不断发生变化, 但动平台约束旋量系的秩并不发生改变(除奇异位型外), 这也说明采用求出的 DOF 具有非瞬时性。

这种非瞬时性存在奇异点之间。由此需要对有限位移旋量系进行奇异性分析, 则奇异点之间的 DOF 为整周 DOF。

由例 3 与例 4 可知, DOF 公式(式(13))揭示了机构的 DOF, 拓扑结构与有限位移螺旋系三者之间的映射关系。DOF 计算与运动位置有关, 因此简称为 DOF 计算的代数化方法。

顺便说明: 文献[25]对式(6)的改进方法就属于 DOF 计算的代数化与几何化相结合的方法。

5 机构的 DOF 分析

由于机构的拓扑结构具有运动过程不变性(包括两个相邻奇异位置之间的过程; 两个相邻改变拓扑的位置之间的过程等)^[23-28], 机构还能保持不变的一些特性称为拓扑结构特征。所谓 DOF 分析就是由 DOF 公式确定机构的如下拓扑结构特征。

(1) 机构 DOF。DOF 由式(10)或式(13)确定。

(2) 机构的 POC 集。并联机构的 POC 集由式(17)与 DOF 确定。

(3) POC 集的维数。POC 集的维数由式(18)确定^[23-28]

$$\dim\{M\} = \dim\{M(r)\} + \dim\{M(t)\} \leq \text{DOF} \quad (18)$$

式中 $\dim\{M\}$ ——POC 集的维数;

$\dim\{M(t)\}$ ——POC 集的独立移动元素数;

$\dim\{M(t)\} = 0, 1, 2, 3$;

$\dim\{M(r)\}$ ——POC 集的独立转动元素数;

$\dim\{M(r)\} = 0, 1, 2, 3$ 。

(4) 独立位移方程数。比较式(10)与式(1), 可知机构独立位移方程数为

$$\xi_{mech} = \sum_{j=1}^{\nu} \dim \left\{ \bigcap_{i=1}^j M_{b_i} \cup M_{b_{(j+1)}} \right\} \quad (19)$$

式中 ξ_{mech} ——机构的独立位移方程数。

比较式(13)与式(1), 可知机构速度方程组的秩为

$$\xi_v = \sum_{j=1}^{\nu+1} \text{rank}(S_{b_j}) - \text{rank}(S_{Pa}) \quad (20)$$

式中 ξ_v ——机构速度方程组的秩。

(5) 公共约束数。由机构独立位移方程数(式(19)), 易知机构的公共约束数为

$$N_{ov} = 6\nu - \xi_{mech} \quad (21)$$

式中 N_{ov} ——公共约束数;

ν ——独立回路数;

ξ_{mech} ——独立位移方程数。

(6) 冗余自由度。由 POC 集的维数(式(18)), 机构冗余 DOF 为

$$D_{Re} = F - \dim(M) \quad (22)$$

式中 D_{Re} ——机构冗余 DOF;

$\dim\{M\}$ ——动平台 POC 集的维数。

对于基于约束分析的 DOF 公式(式(13)), 机构的冗余 DOF 可由式(15)确定。

(7) 判定消极运动副。消极运动副判定准则如第 1.7 节所述。

(8) 选定驱动副。驱动副选定准则如第 1.7 节所述。

例如, 对图 1、2、5 所示的 3 个机构, 它们的 DOF 分析结果如表 3 所示。

图 5 3 支路平面并联机构

表 3 机构 DOF 分析

DOF 分析	图 1 机构	图 2 机构	图 5 机构
DOF	DOF=4	DOF=2	DOF=6
动平台的 POC 集 (M_{pa})	$\begin{bmatrix} l^1(\perp(R_{11}, R_{31})) \\ r^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} l^1(\perp(R_{11}, R_{41})) \\ r^1 \cup \{r^2\} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} l^2(\perp(R_{11})) \\ r^1(\parallel R_{11}) \end{bmatrix}$
		(存在非独立元素)	
动平台 POC 集的维数	4	2	3
独立位移方程数 ξ_{mech}	16	18	6
过约束度 N_{ov}	2	0	0
冗余 DOF D_{Re}	0	0	3
消极运动副	不存在消极运动副		
驱动副	4 个 P 副可同时为驱动副	任意两个 P 副可同时为驱动副	每个支路上必须有 2 个驱动副

6 DOF 公式的物理内涵

6.1 DOF 公式的物理意义

DOF 公式的基本形式(式(10), 式(13))揭示了机构的拓扑结构, DOF 与方位特征(如 POC 集, 运动螺旋系等)三者之间的映射关系, 如图 6a 所示。犹如, 运动学方程揭示了机构的尺度参数、运动输入与运动输出三者之间的映射关系, 如图 6b 所示, 以及动力学方程揭示了机构的惯性参数、驱动力矩与工作阻力矩(以及真实运动状态)三者之间的映射关系, 如图 6c 所示。

顺便说明, DOF 公式(式(10)), 串联机构 POC 方程(式(16))和并联机构 POC 方程(式(17))三者组成了机构拓扑结构学的基本方程, 它们是拓扑结构分

析与综合的理论基础^[24, 28], 犹如机构运动学的位置方程, 速度方程和加速方程是运动学的基本方程, 它们是运动分析与综合的理论基础。

图 6 机构拓扑学、运动学与动力学方程揭示的映射关系

6.2 机构拓扑结构的运动过程不变性

机构拓扑结构的运动过程不变性是构建 DOF 公式的理论依据之一。

(1) 机构拓扑结构的 3 个基本要素：① 运动副类型, 对其联接的两构件提供了几何曲面的约束类型, 如棱柱面(P 副), 圆柱面(R 副), 平面(E 副)与螺旋面(H 副)等；② 构件之间的联接关系, 即机构所有构件之间的约束关系；③ 尺度约束类型, 构件对位于同一构件的运动副轴线之间相对方位的约束类型, 如平行、同轴、共点、共面、垂直与任意交叉等 6 种基本类型^[23-28]。

(2) 机构拓扑结构的运动过程不变性。一般地, 机构的拓扑结构由设计确定, 加工与装配后实现。因此, 一般机构的拓扑结构具有运动过程不变性(包括: 两个相邻的奇异位置之间的运动过程不变性; 两个相邻的改变拓扑结构的位置之间的运动过程不变性等)^[23-28], 从而为构建 DOF 公式(式(10))提供了理论依据。

(3) 机构拓扑结构的定义。基于上述拓扑结构 3 要素^[23-24, 27]提出了机构拓扑结构的如下定义。“机构的运动副与构件等元素以一定的方式连接, 这种连接方式就称为机构的拓扑结构, 它不考虑运动副与构件等元素的距离和大小, 但应保持运动副轴线之间的‘尺度约束类型’不变”。

传统上, 机构的拓扑结构只考虑两个要素(运动副类型, 构件之间的联接关系)。机构拓扑结构定义可见文献[1]。

6.3 机构方位特征的运动过程不变性

机构 POC 集的运动过程不变性(包括两相邻奇异位置之间的运动过程, 两相邻改变拓扑的位置之间的运动过程等)^[23-28]是构建 DOF 公式的另一个理论依据。

用于描述机构中任意两构件相对运动方位特征的 POC 集, 包含如下重要信息^[23-28]。

(1) POC 集的 3 个元素描述构件上基点 σ' 的位置特征, 另 3 个元素描述构件转动的方向特征。

(2) POC 集的维数(即独立元素数),且不大于机构 DOF (即式(12))。

(3) POC 集元素的方位特征是相对于运动副轴线的,与运动位置无关,具有运动过程不变性。

顺便说明,POC 集的全部信息也许可涵盖某些概念,见文献[7, 11, 18, 30-36, 38-42]。

6.4 基于拓扑结构 3 要素的机构分类

基于拓扑结构 3 要素,机构可分为如下 3 类。

6.4.1 无过约束机构

无过约束机构^[34]的 DOF 只取决于拓扑结构的 2 个要素:① 运动副类型;② 构件之间的联接关系。

例如, Gough-Stewart 机构属于无过约束机构。

6.4.2 一般过约束机构

一般过约束机构^[34]的 DOF 取决于上述拓扑结构的 3 个要素:运动副类型;构件之间的联接关系;“尺度约束类型”。例如, Delta 机构, Star 机构等属于一般过约束机构。

6.4.3 特殊过约束机构

特殊过约束机构^[34]的 DOF 取决于以下几点:运动副类型;构件之间的联接关系;尺度参数之间的特定函数关系。例如 Bennett 机构, Bricard 机构等属于特殊过约束机构。

特别说明:一般地, DOF 公式的基本形式(式(10)、(13))主要用于无过约束机构和一般过约束机构的拓扑结构设计。而发现新的特殊过约束机构是不少文献涉及的另一个重要研究方向^[32, 35, 43-47]。

7 结论

(1) 在对近十多年提出的 DOF 公式的综述性回顾基础上,本文给出了:基于螺旋系的 DOF 公式的统一形式(式(13))及其 DOF 计算的代数化方法;基于 POC 集的 DOF 公式的基本形式(式(10))及其 DOF 计算的几何化方法。

(2) 基于螺旋系的 DOF 公式(式(13))的主要特点:得到瞬时 DOF,需要进行整周性判定;由于螺旋系含位置参数,其相关性判定较为复杂。为减少其复杂性,可沿坐标系轴线方向配置运动副轴线,但可能使机构存在的几何条件失去一般性(如例 4 的并联机构)。

(3) 基于 POC 集的 DOF 公式(式(10))的主要特点:得到整周 DOF;由于 POC 集不含位置参数,其相关性判定简单。因此,使机构存在的几何条件具有一般性(如例 2 的图 2 所示并联机构)。

(4) 基于 DOF 公式,可确定机构的拓扑结构特征。如机构 DOF、动平台的 POC 集(或运动螺旋系)

及其维数、独立位移方程数、过约束度、冗余 DOF、消极运动副与选取驱动副等,它们与机构的基本功能,运动学与动力学性能,以及控制性能等密切相关。

(5) DOF 公式揭示了机构的 DOF、拓扑结构与运动方位特征三者之间的映射关系。而一般机构拓扑结构与机构方位特征的运动过程不变性是构建三者映射关系的理论基础。

参 考 文 献

- [1] IONESCU T G. Terminology for mechanisms and machine science[J]. Mech. Mach. Theory, 2003, 38: 597-601.
- [2] GOGU G. Mobility of mechanisms: A critical review[J]. Mech. Mach. Theory, 2005, 40: 1068-1097.
- [3] MOROSKINE Y F. General analysis of the theory of mechanisms[M]. Moscow: Akad. Nauk, SSSR, 1954.
- [4] KUTZBACH K. Mechanische Leitungsverzweigung, ihre gesetze und anwendungen[J]. Maschinenbau, 1929, 8: 710-716.
KUTZBACH K. Mechanical manifold, its laws and applications[J]. Mechanical Engineering, 1929, 8: 710-716.
- [5] ZHANG Q X. Study on structural theory of spatial mechanisms[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 1961, 9 (1): 7-32.
- [6] FREUDENSTEIN F, ALIZADE R. On the degree-of-freedom of mechanisms with variable general constraint[C]// Fourth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Sept. 8-12, 1975, Newcastle upon Tyne, UK, 1975.
- [7] ZHAO J S, ZHOU K, FENG Z J. A theory of degrees of freedom for mechanisms[J]. Mech. Mach. Theory, 2004, 39: 621-643.
- [8] DAI J S, HUANG Z, LIPKIN H. Screw system analysis of parallel mechanisms and applications to constraint and mobility study[C]// 28th ASME Biennial Mechanisms and Robotics Conference, Sept 28-Oct. 2, 2004. Salt Lake City, Utah, USA, 2004: DETC2004-57604.
- [9] DAI J S, HUANG Z, LIPKIN H. Mobility of overconstrained parallel mechanisms[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2006, 128: 220-229.
- [10] DAI J S. Finite displacement screw operators with embedded chasles' motion[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2012, 4(4): 041002.
- [11] 戴建生. 旋量代数与李群、李代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.

- DAI Jiansheng. Screw algebra and Lie groups and Lie algebras[D]. Beijing: Higher Education Press, 2014.
- [12] 戴建生. 机构学与机器人学几何基础与旋量代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.
- DAI Jiansheng. Screw algebra and kinematic approaches for mechanisms and robotics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2014.
- [13] GOGU G. Mobility and spatiality of parallel robots revisited via theory of linear transformations[J]. European J. of Mechanics A/Solid, 2005, 24(4): 690-711.
- [14] 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- HUANG Zhen, ZHAO Yongsheng, ZHAO Tieshi. Advanced spialial mechanism[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006.
- [15] 黄真, 刘婧芳, 李艳文, 等. 论机构自由度——寻找了 150 年的自由度通用公式[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
- HUANG Zhen, LIU Jingfang, LI Yanwen, et al. Mobility of mechanisms[M]. Beijing: Science Press, 2011.
- [16] HUANG Z, LI Q C, DING H F. Theory of parallel mechanisms[M]. New York: Springer, 2013.
- [17] KONG X, GOSSELIN C M. Mobility analysis of parallel mechanisms based on screw theory and the concept of equivalent serial kinematic chain[C]// 2005 ASME Design Engineering Technical Conference & Computers and Information in Engineering Conference, Sept. 24-28, 2005, Long Beach, California, USA. 2005: DETC2005-85337.
- [18] KONG X, GOSSELIN C M. Type synthesis of parallel mechanisms[M]. Springer, 2007.
- [19] RICO J M, AGUILERA L D. A more general mobility criterion for parallel platforms[J]. ASME, J. Mech. Des., 2006, 128: 207-219.
- [20] YANG T L, SUN D J. General formula of degree of freedom for parallel mechanisms and its application[C]// ASME 2006 Mechanisms Conference, Sept. 10-13, 2006, Philadelphia, Pennsylvania, USA. 2006: DETC2006-99129.
- [21] YANG T L, SUN D J. A general formula of degree of freedom for parallel mechanisms[C]// ASME 32th mechanisms and Robots Conference, August 3-6, 2008, Brooklyn, New York, USA. 2008: DETC2008-49077.
- [22] YANG T L, SUN D J. A general DOF formula for parallel mechanisms and multi-loop spatial mechanisms[J]. ASME Journal of Mechanisms and Robotics, 2012, 4: 011001-1-17.
- [23] 杨廷力. 机器人机构拓扑结构学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2004.
- YANG Tingli. Topology structure design of robot mechanism[M]. Beijing: China Machine Press, 2004.
- [24] 杨廷力, 刘安心, 罗玉峰, 等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- YANG Tingli, LIU Anxin, LUO Yufeng, et al. Theory and application of robot mechanism topology[M]. Beijing: Science Press, 2012.
- [25] 杨廷力, 沈惠平, 刘安心. 机构 DOF 公式的统一形式及其物理内涵[J]. 常州大学学报, 2013, 25(4): 1-8.
- YANG Tingli, SHEN Huiping, LIU Anxin. General form and physical meaning of DOF formula[J]. Journal of Changzhou University, 2013, 25(4): 1-8.
- [26] YANG T L, LIU A X, LUO Y F, et al. Position and orientation characteristic equation for topological design of robot mechanisms[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2009, 131: 021001-1-17.
- [27] YANG T L, LIU A X, SHEN H P, et al. On the correctness and strictness of the position and orientation characteristic equation for topological structure design of robot mechanisms[J]. ASME Journal of Mechanisms and Robotics, 2013, 5: 021009-1-18.
- [28] JIN Q, YANG T L. Theory for topology synthesis of parallel manipulators and its application to three-dimension-translation parallel manipulators[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2004, 126: 625-639.
- [29] DAVIDSON J K, HUNT K H. Robots and screw theory: Application of kinematics and statics to robotics[M]. London: Oxford University Press, 2004.
- [30] VOINEA R, ATANASIU M. Contributions à la théorie géométrique des vis[J]. Bull Polytech Inst Bucharest, 1959, 21(3): 69-90.
- VOINEA R, ATANASIU M. Contributions to the geometric theory of screws[J]. Bull Polytech Inst Bucharest, 1959, 21(3): 69-90.
- [31] HUNT K H. Screw axes and mobility in spatial mechanisms via the linear complex[J]. J. Mechanisms 1967, 3: 307-327.
- [32] WALDRON K J. The constraint analysis of mechanisms[J]. J. Mechanisms, 1966, 1: 101-114.
- [33] DAVIES T H, PRIMROSE E J F. An algebra for screw systems of pairs of bodies in a kinematic chain[C]// 3rd World Congress for the Theory of Machines and Mechanisms, Sept. 1971, Kupari, Yugoslavia. 1971: 199-212.
- [34] HERVE J M. Analyse structurelle des meanismes dar groupe des delacements[J]. Mech. Mach. Theory, 1978, 13(4): 437-450.

- HERVE J M. Structural analysis of the mechanisms by group of displacements[J]. Mechanism and Machine Theory, 1978, 13(4): 437-450.
- [35] BAKER J E. An analysis of the Bricard linkages[J]. Mechanism and Machine Theory, 1980, 15: 267-286.
- [36] PHILLIPS J. Freedom in machinery, introducing screw theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1984.
- [37] DUDIȚĂ F, DIACONESCU D. Optimizarea structurala a mecanismelor[M]. Ed Tehnica: București, 1987.
- DUDIȚĂ F, DIACONESCU D. Optimization structural mechanisms[M]. Bucharest: Technique Publisher, 1987.
- [38] FANGHELLA P. Kinematics of spatial linkages by group algebra: A structure based approach[J]. Mech. Mach. Theory, 1988, 23: 171-183.
- [39] FANGHELLA P, GALLETTI C. Mobility analysis of single-loop kinematic chains: An algorithmic approach based on displacement groups[J]. Mech. Mach. Theory, 1994, 29: 1187-1204.
- [40] FAYET M. Mécanismes multi-boucles – I: Détermination des espaces de torseurs cinématiques dans un mécanisme multi-boucles quelconque[J]. Mech. Mach. Theory, 1995, 30: 201-217.
- FAYET M. Multi-loop mechanisms – I: Determination of kinematic torque spaces in any one multi-loop mechanism[J]. Mechanism and Machine Theory, 1995, 30: 201-217.
- [41] SHOHAM M, ROTH B. Connectivity in open and closed loop robotic mechanisms[J]. Mech. Mach. Theory, 1997, 32: 279-293.
- [42] DAI J S, LI D, ZHANG Q X, et al. Mobility analysis of a complex structured ball based on mechanism decomposition and equivalent screw system analysis[J]. Mechanism and Machine Theory, 2004, 39(4): 445-458.
- [43] BAKER J E. The Bennett, Goldberg and Myard linkages—in perspective[J]. Mechanism and Machine Theory, 1979, 14(4): 239-253.
- [44] JIN Q, YANG T L. Over-constraint analysis on spatial 6-link loops (Bricard mechanism, etc.)[J]. Mechanism and Machine Theory, 2002, 37(3): 267-278.
- [45] CHEN Y, BAKER J E. On using a Bennett linkage as a connector between other Bennett loops[J]. Proc IMechE, 2005, 219(2): 177-185.
- [46] CUI L, DAI J S. Axis constraint analysis and its resultant 6R double-centered overconstrained mechanisms[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, Trans. ASME, 2011, 3(3): 031004.
- [47] ZHANG K, DAI J S. Screw-system-variation enabled reconfiguration of the Bennett plano-spherical hybrid linkage and its evolved parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Design, Trans. ASME, 2015, 137: 7.

作者简介: 杨廷力, 男, 1940 年出生, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为机构学、机器人机构学。

E-mail: yangtl@126.com