DOI: 10.3901/JME.2015.16.057

奇异值分解对连续 Morlet 小波变换的压缩和提纯*

赵学智 陈统坚 叶邦彦

(华南理工大学机械与汽车工程学院 广州 510640)

摘要: 研究连续 Morlet 小波变换矩阵行矢量的线性相关性, 这种相关性使得连续 Morlet 小波变换的结果存在很大的冗余, 利用奇异值分解(Singular value decomposition, SVD)来压缩这种冗余性。理论分析表明, SVD 技术可以将连续 Morlet 小波变换矩阵的信息完全压缩到少数的非零奇异值及其对应的正交奇异矢量中, 分析压缩前后数据量的比例, 证实矩阵维数越大, 压缩效果越好。研究确定性信号和噪声的连续 Morlet 小波变换结果的奇异值的分布特点, 发现确定性信号的有效奇异值数量由信号中的频率数量决定, 有效奇异值之后的奇异值会很快地下降到零, 而噪声的奇异值序列的变化比较均匀, 下降速度比较缓慢。利用确定性信号和噪声奇异值的这种差异, 可以实现对含噪信号的连续 Morlet 小波变换结果的提纯, 只要选择前面合适的奇异值进行 SVD 重构, 大部分噪声奇异值的信息会被抛弃, 因而可在很大程度上消除噪声对连续 Morlet 小波变换结果的影响。

关键词: 连续 Morlet 小波; 奇异值分解; 冗余信息; 数据压缩; 数据提纯

中图分类号: TN911; TH165

Purification and Compression of Continuous Morlet Wavelet Transform Based on Singular Value Decomposition

ZHAO Xuezhi CHEN Tongjian YE Bangyan

(School of Mechanical and Automotive Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640)

Abstract: The linear correlation of row vectors of the continuous Morlet wavelet transform matrix is studied, this correlation make the result of continuous Morlet wavelet transform be of great redundancy, and singular value decomposition(SVD) is proposed to compress this redundancy. Theoretical analysis shows that the continuous Morlet wavelet transform matrix can be compressed into a few non-zero singular values and the corresponding orthogonal singular vectors by SVD technology. The ratio of the data size before and after compression is analyzed, and it is shown that the larger the matrix dimension, the better the compression effect. The distribution characteristics of singular values of the continuous Morlet wavelet transform results of the deterministic signal and the noise is studied, and it is found that the number of the effective singular values of the deterministic signal is determined by the number of frequencies in this signal, and the other singular values after the effective ones will soon drop to zero, while the singular values of noise is changed evenly and its falling speed is slow. This difference between the singular values of the deterministic signal and the noise is utilized, the purification of the continuous Morlet wavelet transform result of noisy signal can be realized, if the appropriate front singular values are chosen for SVD reconstruction, then the information of most noise singular values is discarded, thus the influence of noise on continuous Morlet wavelet transform is erased to a great extent.

Key words: continuous Morlet wavelet; singular value decomposition; redundant information; data compression; data purification

0 前言

Morlet 小波在信号处理和故障诊断中有着广泛的应用, 无论是机械信号如轴承振动信号、齿轮箱振动信号等还是生物医学信号如肌电信号、脑电信号等, 都可利用 Morlet 小波来进行特征提取。如在机械信号方面, SHEEN^[1]利用 Morlet 小波获得轴承

振动特征频率; GRYLLIAS 等^[2]将连续 Morlet 小波变换用于估计摩托车发动机的瞬时频率; SARAVANAN 等^[3-4]则对齿轮箱振动信号采用连续 Morlet 小波变换提取特征矢量, 作为支持矢量机的输入; KARIMI 等^[5]利用连续 Morlet 小波变换方法识别车辆碰撞时的碰撞参数。在生物医学信号处理方面, ALMANJI 等^[6]对肌电信号采用连续 Morlet 小波变换的时间熵和频率熵来识别肱三头肌和肱二头肌的动作; MANSFELD^[7]则利用 Morlet 小波提取脑电图信号中的弱小信号。诸如此类的应用还有很多, 这里不再一一列举。

* 国家自然科学基金(51375178)和广东省自然科学基金(S2012010008789)资助项目。20140909 收到初稿, 20141226 收到修改稿

在上面这些实际应用中, 采用的都是连续 Morlet 小波变换。对于连续 Morlet 小波变换, 两相邻尺度在数值上差别很小, 因而这些尺度上的小波变换结果非常接近, 这造成变换结果存在很大的冗余性。如果将连续 Morlet 小波变换的结果用一个矩阵表示, 矩阵的行数与尺度相对应, 则矩阵的相邻行矢量之间会非常相似, 各行矢量之间存在很大的相关性, 这使得矩阵的秩会远低于矩阵的行数, 因而这不是一个行满秩矩阵。对于这样的一个矩阵, 如果能找到这样一组基矢量, 这组基矢量中任意的两个矢量都线性无关, 而矩阵中的任何一行都可以这组基矢量线性表示出来, 那么这组基矢量就构成了这个矩阵的一个最大线性无关矢量组, 它们代表了该矩阵的全部信息。根据线性代数理论, 这组基矢量的个数就等于矩阵的秩, 它小于矩阵的行数。如果能找到这样的一组基矢量, 那么就可以实现对连续 Morlet 小波变换结果矩阵的压缩。

本文首先从理论上分析了连续 Morlet 小波变换矩阵的秩, 证明了在无噪声情况下, 这矩阵的秩是由所处理信号中的分量个数所决定, 如果信号中有 1 个直流分量和 r 个交流分量, 那么不管小波变换的尺度数比 $r+1$ 大多少, 此信号连续 Morlet 小波变换矩阵的秩都是 $r+1$, 这是可以实现对该矩阵压缩的理论基础。进一步分析了信号中存在噪声时的情形, 发现此时矩阵的秩将会在 $r+1$ 的基础上有一定的增加, 但是矩阵仍然不是一个行满秩矩阵。利用奇异值分解(Singular value decomposition, SVD)方法获得了连续 Morlet 小波变换矩阵的基矢量, 由此实现对该矩阵的压缩, 并分析了无噪声情况下非零奇异值个数大于理论值 $r+1$ 的原因。另外, 对于含噪声信号的连续 Morlet 小波变换结果矩阵, 虽然其基矢量数会大于 $r+1$, 但是如果仅选择前 $r+1$ 个基矢量来恢复矩阵信息, 还可以在很大程度上消除噪声对连续小波变换结果的影响。

1 连续 Morlet 小波变换矩阵的秩

Morlet 小波的实质是调制的高斯函数, 其表达式为

$$\psi(t) = \exp(j\omega_0 t) \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1)$$

式中 ω_0 ——调制频率;

σ ——窗宽参数。

窗宽参数决定着 Morlet 小波的时窗和频窗宽度, σ 越大, 则小波的时窗越宽, 而频窗会越窄。

在尺度 s 下 Morlet 小波的伸缩函数为

$$\psi_s(t) = \frac{1}{s} \exp\left(j\omega_0 \frac{t}{s}\right) \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2 s^2}\right) \quad (2)$$

而信号 $f(t)$ 的 Morlet 小波变换的实质就是 $f(t)$ 与伸缩函数 $\psi_s(t)$ 的卷积, 即

$$Wf(s, t) = f(t) * \psi_s(t) \quad (3)$$

根据式(3)的卷积定义, 可以将 Morlet 小波变换看作是一个单输入/单输出系统, 该系统的传输特性函数是 $\psi_s(t)$, 输入是 $f(t)$, 而输出就是小波变换结果 $Wf(s, t)$ 。对传输特性函数 $\psi_s(t)$ 求傅里叶变换, 可以得到此系统的频率响应函数为

$$\hat{\psi}_s(\omega) = \sqrt{2\pi}\sigma \cdot \exp\left[-\frac{(\omega s - \omega_0)^2 \sigma^2}{2}\right] \quad (4)$$

从式(4)可见, 该系统的频率响应函数是一个实函数, 其虚部为零, 因此式(4)也就是系统的幅频特性函数, 而系统的相频特性为零, 这意味着 Morlet 小波变换的结果不存在相位延迟, 具有零相移特性。

对于此系统的输入信号 $f(t)$, 首先考虑信号中没有噪声干扰时的情形。不失一般性, 设 $f(t)$ 的直流分量为 a_0 , 此外还含有 r 个不同的频率成分, 则 $f(t)$ 可表示为

$$f(t) = a_0 + \sum_{i=1}^r a_i \cdot \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad (5)$$

式中, a_i 、 ω_i 和 φ_i 分别是第 i 个频率分量的幅值、圆频率和相位。对于式(5)所示的信号, 根据 Morlet 小波的频率响应函数式(4), 容易得到其在 Morlet 小波系统某一个尺度 s_k 下的输出为

$$Wf(s_k, t) = \sqrt{2\pi}\sigma \left\{ a_0 \cdot \exp\left(-\frac{\omega_0^2 \cdot \sigma^2}{2}\right) + \sum_{i=1}^r a_i \cdot \exp\left[-\frac{(\omega_i \cdot s_k - \omega_0)^2 \sigma^2}{2}\right] \cdot \sin(\omega_i t + \varphi_i) \right\} \quad (6)$$

式(6)是 $f(t)$ 在尺度 s_k 下的 Morlet 小波变换结果。设对 $f(t)$ 共进行了 m 个尺度的小波变换, 这 m 个尺度按照一定的步长从小到大连续变化, 则所有尺度下的变换结果依次排列在一起就构成了连续 Morlet 小波变换的结果, 它可以用一个矩阵 W 表示

$$W = \begin{pmatrix} Wf(s_1, t) \\ Wf(s_2, t) \\ \vdots \\ Wf(s_m, t) \end{pmatrix} \quad (7)$$

设信号 $f(t)$ 离散化后的长度为 n , 则矩阵

$W \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 当此矩阵的行数 $m > (r+1)$ 时, 这个矩阵不是一个行满秩的矩阵。从式(6)可见, W 中的任何一个行矢量 $Wf(s_k, t)$ 都可由 1 个直流分量 a_0 和 r 个交流分量 $\{a_i \cdot \sin(\omega_i t + \varphi_i), i=1, 2, \dots, r\}$ 线性表示。如果用 α_0 表示幅值为 a_0 的直流矢量, 即 $\alpha_0 = (a_0, a_0, \dots, a_0)$, $\alpha_0 \in \mathbf{R}^{1 \times n}$; 用 α_i 表示幅值为 a_i 、频率为 ω_i 的交流矢量, 即

$$\begin{aligned} \alpha_i &= [a_i \sin(\omega_i \cdot 0 + \varphi_i), a_i \sin(\omega_i \cdot 1 \cdot T_s + \varphi_i), \dots, \\ &\quad a_i \sin(\omega_i \cdot (n-1) \cdot T_s + \varphi_i)] \\ \alpha_i &\in \mathbf{R}^{1 \times n} \quad i=1, 2, \dots, r \end{aligned}$$

而 T_s 是对 $f(t)$ 离散化时的采样周期。因为任何两个频率不同的矢量是线性无关的, 而一个由常数构成的直流矢量与任一个正弦的交流矢量也是线性无关的, 故矢量组 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ 是线性无关的, 很容易将式(6)表示为这组矢量的线性组合形式, 即

$$\begin{aligned} Wf(s_k, t) &= \sqrt{2\pi}\sigma \left\{ \exp\left(-\frac{\omega_0^2 \sigma^2}{2}\right) \cdot \alpha_0 + \right. \\ &\quad \exp\left[-\frac{(\omega_1 \cdot s_k - \omega_0)^2 \sigma^2}{2}\right] \cdot \alpha_1 + \dots + \\ &\quad \left. \exp\left[-\frac{(\omega_r \cdot s_k - \omega_0)^2 \sigma^2}{2}\right] \cdot \alpha_r \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

式中, $t=0, T_s, 2T_s, \dots, (n-1)T_s$ 。式(8)表明, 矩阵 W 的任何一个行矢量 $Wf(s_k, t)$ 都可由 $r+1$ 个线性无关的矢量 $\{\alpha_i, i=0, 1, \dots, r\}$ 线性表示, 因此这 1 个直流分量和 r 个交流分量形成的矢量组 $\{\alpha_i, i=0, 1, \dots, r\}$ 就构成了矩阵 W 的一个最大线性无关矢量组, 根据线性代数理论, 这矩阵 W 的秩就是 $r+1$ 。

总结以上分析, 笔者可以得到以下重要结论。

对一个含有直流分量和 r 个不同频率成分的无噪声信号 $f(t)$ 进行连续 Morlet 小波变换, 设变换时尺度的数目是 m , 当 $m > (r+1)$ 时, 不管 m 有多大, 得到的小波变换系数矩阵的秩总是 $r+1$ 。换言之, 在连续 Morlet 小波变换系数矩阵所有的 m 个行矢量中, 不管 m 比 $r+1$ 大多少, 只有 $r+1$ 个行矢量是线性无关的, 而此矩阵的其他任何一行都可由这 $r+1$ 个线性无关的行矢量线性表示, 因此这 $r+1$ 个行矢量构成了矩阵的一组基矢量。

因此, 对于连续 Morlet 小波变换得到的系数矩阵, 只需要找到这 $r+1$ 个线性无关的行矢量, 就可由它们恢复出全部的小波变换结果, 从而可以实现对连续 Morlet 小波变换结果的压缩。这 $r+1$ 个行矢量包含了连续 Morlet 小波变换的全部信息, 其中有

1 个反映的是原信号的直流分量信息, 而其他 r 个反映的是原信号的交流分量信息, 它们也是连续 Morlet 小波变换结果的特征矢量。问题的关键是如何根据连续 Morlet 小波变换的结果找到这 $r+1$ 个线性无关的行矢量, 奇异值分解 (Singular value decomposition, SVD) 方法可以用来解决这一问题。

2 利用 SVD 确定连续 Morlet 小波变换矩阵的最大线性无关矢量组

设原始信号 $f(t)$ 离散化后的长度为 n , 对此信号共进行了 m 个尺度的连续 Morlet 小波变换, 则小波变换的结果矩阵 $W \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 根据奇异值分解理论, 可以将 W 分解为

$$W = UDV^T \quad (9)$$

式中, U 和 V 都是正交矩阵, $U \in \mathbf{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$, T 表示矩阵的转置, 而 $D \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 它是一个对角阵, 可写为

$$D = \begin{cases} (\text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q), \mathbf{O}) & m < n \\ (\text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q), \mathbf{O})^T & m > n \end{cases}$$

式中, $\mathbf{O}$ 表示零矩阵; $q = \min(m, n)$, 且有 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_q \geq 0$, 它们是矩阵 W 的奇异值^[8]。

SVD 有一个十分重要的性质: 矩阵的非零奇异值的个数就是此矩阵的秩, 反过来, 矩阵的秩也决定着此矩阵非零奇异值的数量^[9]。因此, 如果连续 Morlet 小波变换的结果矩阵 W 的秩是 $r+1$, 那么对 W 进行奇异值分解就只能得到 $r+1$ 个非零奇异值。因奇异值是降序排列的, 这 $r+1$ 个非零奇异值会排在奇异值序列的最前面。此外还可以证明, 利用 SVD 可以得到 W 的一组基矢量, 而每一个非零奇异值对应着一个基矢量, 证明如下。

将式(9)的两个正交矩阵 U 和 V 用列矢量表示, 即 $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ 和 $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, 然后利用 $r+1$ 个非零奇异值, 将式(9)改写成用 U 和 V 的列矢量 u_i 和 v_i 表示的形式

$$W = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \dots + \sigma_{r+1} u_{r+1} v_{r+1}^T \quad (10)$$

式中, $u_i \in \mathbf{R}^{m \times 1}$, 它是正交矩阵 U 的列矢量, 亦称左奇异矢量; $v_i \in \mathbf{R}^{n \times 1}$, 它是正交矩阵 V 的列矢量, 亦称右奇异矢量, 而 $i=1, 2, \dots, r+1$ 。对于右奇异矢量 v_i , 因 $v_i \in \mathbf{R}^{n \times 1}$, 则 $v_i^T \in \mathbf{R}^{1 \times n}$, 可见 v_i^T 是行矢量, 并且其长度为 n , 这与每一尺度上的小波变换结果

长度相等, 因为 $\mathbf{v}_i^T$ 之间两两正交, 所以它们是线性无关的, 则式(10)表明, 连续 Morlet 小波变换的结果矩阵 $\mathbf{W}$ 可由这 $r+1$ 个线性无关的正交行矢量 $\mathbf{v}_i^T$ 线性表示, 因此矢量组 $\{\mathbf{v}_i^T, i=1, 2, \dots, r+1\}$ 就构成了矩阵 $\mathbf{W}$ 的一个最大线性无关矢量组。

这样, 利用 SVD 就将矩阵 $\mathbf{W}$ 压缩为一组大小为 $r+1$ 的基矢量, 无论小波变换的尺度数 m 有多大, 由这 $r+1$ 个线性无关的基矢量总是可以恢复出 $\mathbf{W}$ 的全部信息。对于 $\mathbf{W} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 其数据量为 $m \cdot n$, 经 SVD 压缩后, 得到的 $r+1$ 个基矢量 $\mathbf{v}_i^T$ 的数据量为 $(r+1) \cdot n$, $r+1$ 个 $\mathbf{u}_i$ 的数据量为 $(r+1) \cdot m$, 再考虑到 $r+1$ 个奇异值, 所有这些数据量与原矩阵 $\mathbf{W}$ 数据量的比例为

$$\eta = \frac{(r+1) \cdot (n+m+1)}{m \cdot n} = \frac{(r+1) \cdot [1+(n+1)/m]}{n} \quad (11)$$

从式(11)可见, m 越大, 则 η 越小, 压缩效果越好, 并从式(11)可得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \eta = \frac{r+1}{n} \quad (12)$$

故原信号 $f(t)$ 的数据长度 n 越大, 压缩效果也越好。

可以进一步分析任一尺度下的小波变换结果 $Wf(s_k, t)$ 与这 $r+1$ 个基矢量的关系。因为 $\mathbf{v}_i$ 是正交矩阵 $\mathbf{V}$ 的列矢量, 根据正交矩阵的定义有

$$\mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_i = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (13)$$

在式(10)两边同时右乘列矢量 $\mathbf{v}_i$, 并考虑到式(13), 则可以得到

$$\mathbf{W} \mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i \quad (14)$$

矩阵 $\mathbf{W}$ 和列矢量 $\mathbf{v}_i$ 的乘积 $\mathbf{W} \mathbf{v}_i$ 实际上反映的是 $\mathbf{W}$ 的每一行在矢量 $\mathbf{v}_i$ 上的投影大小, 也即是 $\mathbf{W}$ 的每一个行矢量与矢量 $\mathbf{v}_i$ 的相似程度, 而 $\mathbf{W}$ 的全部行矢量与 $\mathbf{v}_i$ 的相似性程度由列矢量 $\sigma_i \mathbf{u}_i$ 表示。因为 $\mathbf{W}$ 的每一个行矢量就是某一个尺度下的小波变换结果, 设式(14)中的列矢量 $\mathbf{u}_i = (u_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,m})^T$, 并将矩阵 $\mathbf{W}$ 的表达式(7)代入式(14)中, 则可得每一个尺度下的小波变换结果在正交矢量 $\mathbf{v}_i$ 上的投影大小为

$$Wf(s_k, t) \cdot \mathbf{v}_i = \sigma_i u_{i,k} \quad k=1, 2, \dots, m \quad i=1, 2, \dots, r+1 \quad (15)$$

从式(15)可见, 利用列矢量 $\mathbf{u}_i$ 中绝对值最大的坐标 $u_{i,k}$ 就可以找到与正交矢量 $\mathbf{v}_i$ 最为相似的小波变换结果 $Wf(s_k, t)$ 。

3 实例分析

3.1 利用前 $r+1$ 个奇异值恢复全部频率信息 设信号

$$x(t) = \sin(2\pi \cdot 20t) + \sin(2\pi \cdot 100t) +$$

$$\sin(2\pi \cdot 200t) + \sin(2\pi \cdot 300t) + \sin(2\pi \cdot 400t)$$

此信号含有 5 个频率成分, 对 $x(t)$ 以 1 000 Hz 的采样频率采集 512 点, 然后对采集的信号进行连续 Morlet 小波变换。首先须确定 Morlet 小波的参数, 文献[10]讨论了 Morlet 小波参数的一种选取原则, 参照该文献的方法, 对 Morlet 小波的两个参数分别取为 $\omega_0 = \pi$ 、 $\sigma = 10$, 而尺度的变化范围为 $s \in [1, 100]$, 在此范围内取 512 个尺度进行连续 Morlet 小波变换。连续 Morlet 小波变换的计算方法参照文献[11], 计算后得到一个 512×512 的连续小波变换结果矩阵 $\mathbf{W}$, 此矩阵的行变量代表尺度值, 每一个尺度对应着一个频率, 频率 f 和尺度 s 的对应关系为 $f = f_s \cdot \omega_0 / (2\pi \cdot s)$, 其中 f_s 为原始信号的采样频率; $\mathbf{W}$ 的列变量则为某尺度下各个时刻的小波变换值。对 $\mathbf{W}$ 取绝对值绘图, 如图 1 所示, 图 1 已将尺度转换为频率。可见图 1 中共有 5 个频率峰, 它们分别对应着原信号的 5 个频率成分, 除此之外, 从图 1 还可看出小波变换的实际结果中还存在很多边界误差, 边界误差是小波变换在实现时对数据的延拓引起的, 是小波变换结果难以避免的。

图 1 连续 Morlet 小波变换结果

采用 SVD 对矩阵 $\mathbf{W}$ 进行分解, SVD 采用文献[12]中的多次分割双向收缩 QR 算法实现, 它克服了单向收缩 QR 算法在处理大型矩阵的 SVD 时收敛较慢甚至不收敛的问题[13], 其 QR 迭代过程收缩无停滞, 对任何大型矩阵都可以实现快速 SVD 计算。采用这种算法对矩阵 $\mathbf{W}$ 进行 SVD 计算, 得到 $\mathbf{W}$ 的奇异值如图 2a 所示, 因为原信号有 5 个频率成分, 根据前面的分析, 矩阵 $\mathbf{W}$ 的秩应为 5, 则奇异值分

解后应该也只有 5 个非零奇异值。为更清楚地观察奇异值, 将前 50 个奇异值绘于图 2b, 从图 2b 可见虽然前 5 个奇异值不为零, 但是后面还有很多奇异值却也并不为零, 这似乎和理论分析相矛盾。先暂时不分析这种矛盾, 从图 2b 可见, 虽然非零奇异值远不止 5 个, 但是前 5 个奇异值明显大于后面的奇异值, 现在取前 5 个奇异值及相应的 u_i 和 v_i 按照式 (10) 进行计算, 得到一个新的矩阵 W' , 绘出 W' 的绝对值, 结果如图 3 所示。从图 3 可见, 这前 5 个奇异值及相应的 u_i 和 v_i 重构的结果完全恢复了图 1 中的 5 个频率峰, 这表明 SVD 得到的前 5 个右奇异矢量 $\{v_i^T, i=1, 2, \dots, 5\}$ 和理论基矢量 $\{a_i, i=0, 1, \dots, r\}$ 所反映的信息是一致的, 由它们都可以正确地恢复出 W 中所有的频率信息。但是另外可以发现, 图 1 中的那些边界误差在图 3 中却再也找不到了。

图 2 矩阵 W 的奇异值

图 3 利用前 5 个奇异值及基向量恢复的结果

3.2 非零奇异值个数大于理论值的原因分析

3.2.1 由边界误差导致的非零奇异值个数的增加

现在再来分析非零奇异值个数大于理论值 5 的问题, 导致非零奇异值个数大于理论值的第一个原因是由于小波分解时产生的边界误差。由第 1 节的分析可知, 当原信号中存在 1 个直流分量 a_0 和 r 个

交流分量 $\{a_i \cdot \sin(\omega_i t + \varphi_i), i=1, 2, \dots, r\}$ 时, 连续小波变换的结果矩阵 W 可由 $r+1$ 个基矢量 $\{a_i, i=0, 1, \dots, r\}$ 线性表示出来, 其中 a_0 是直流矢量, 而 a_i 是频率为 ω_i 的交流矢量。矩阵 W 的第 k 个行矢量为 $Wf(s_k, t)$, 由于小波分解在实际实现时会产生边界误差, 这使得非频率峰值处的那些 $Wf(s_k, t)$ 的两端会出现交变误差, 因而这些 $Wf(s_k, t)$ 不能由 $\{a_i, i=0, 1, \dots, r\}$ 线性表达出来。图 4a 给出了本例 W 中第 506 个行矢量 $Wf(s_{506}, t)$, 它是一个非频率峰值处的矢量, 对于这样的一个矢量, 如果没有边界误差, 它就是一个直流矢量, 此时它可由基矢量组 $\{a_i, i=0, 1, \dots, r\}$ 线性表示出来, 但是由于实际中产生了边界误差, 使得这行矢量在两端的数值产生了很大的交变成分, 如图 4a 所示, 此时这矢量两端不再是直流成分, 但中间部分仍然是直流, 对于这样的一个两端交变、中间直流的行矢量, 它不能由基矢量组 $\{a_i, i=0, 1, \dots, r\}$ 线性表示出来, 而必须引入另外的基矢量才能表示出来, 这新基矢量的两端必须是同样频率的交变, 且中间部分是直流。也就是说, 当存在边界误差时, 必须引入新的基矢量才能表征这种含边界误差的小波变换结果, 因此矩阵 W 的基矢量的规模将增大, 其秩也将增大, 大于理论上的 $r+1$, 从而导致非零奇异值的个数也大于 $r+1$ 。

而对于频率峰值处的那些 $Wf(s_k, t)$, 它们代表的是原信号中的交流成分, 尽管它们也存在边界误差, 但这种边界误差只是改变了 $Wf(s_k, t)$ 在两端的幅值, 却并没有改变 $Wf(s_k, t)$ 的频率成分。图 4b 给出了 W 中第 155 个行矢量 $Wf(s_{155}, t)$, 它代表的是原信号中 20 Hz 的频率成分, 从图 4b 可见, 边界误差的存在使得这行矢量的图形变成了纺锤形, 但是其频率却没有改变, 因而这行矢量仍然可由基矢量 $\{a_i, i=0, 1, \dots, r\}$ 线性表示出来, 因此根据前 $r+1$ 个非零奇异值仍然可恢复 W 中的全部频率峰, 并且还可以由此消去 W 中非频率峰值处的那些边界误差, 因为根据上面的分析, 这些边界误差并不能由基矢量 $\{a_i, i=0, 1, \dots, r\}$ 线性表示, 因而也并不能被前面的 $r+1$ 个非零奇异值所代表, 而是由这 $r+1$ 个奇异值之后的那些较小的非零奇异值所代表, 因此由前 $r+1$ 个非零奇异值重构得到的结果将消除那些非频率峰值处的边界误差。

3.2.2 由频率泄漏导致的非零奇异值个数的增加

导致非零奇异值个数大于理论值的第二个原因是连续 Morlet 小波变换时产生的频率泄漏。在实践中我们发现, 连续 Morlet 小波变换的结果在低频

处存在频率泄漏,但在高频处却不存在这种现象,这个有趣的问题将另文讨论,但这里要指出的是,低频处的这种频率泄漏将会导致非零奇异值个数的增加。图 5 给出了本例中的连续小波变换矩阵 W 在 20 Hz 处的局部图形(同样是取绝对值绘图),从理论上说,本来应该只在 20 Hz 处存在频率峰,但是从图 5 可以发现,实际的结果在 20 Hz 附近的其他频率处也产生了频率峰,也就是说产生了不同于 20 Hz 的其他频率成分,这就是 Morlet 小波变换在低频时的频率泄漏。由于频率泄漏现象的存在,使得连续小波变换的结果矩阵 W 中产生了不同于原信号频率成分的其他频率成分,也就是说,由于频率泄漏而产生的这些频率成分与基矢量 $\{\alpha_i, i=0,1,\dots,r\}$ 中的频率不同,因而含有这些泄漏频率成分的行矢量 $Wf(s_k, t)$ 就不能由基矢量组 $\{\alpha_i, i=0,1,\dots,r\}$ 线性表示出来,而必须由与这些泄漏成分具有相同频率的基矢量才能线性表示出来,因此必须向原来的基矢量组中添加新的基矢量才能构成矩阵 W 的基,从而 W 的秩也将增大,由此导致了非零奇异值个数的增加。

图 4 边界误差对 Morlet 小波变换的影响

图 5 连续 Morlet 小波变换在低频处的频率泄漏

因此,由于边界误差和频率泄漏这两方面的原

因,导致了连续 Morlet 小波变换结果矩阵 W 的秩将大于理论值 $r+1$,故对 W 进行奇异值分解后得到的非零奇异值的个数也将大于 $r+1$ 。设考虑边界误差和频率泄漏后 W 的非零奇异值个数为 p ,则可以将这些非零奇异值分为两部分,一部分代表的是正常的小波变换结果,而另一部分代表的就是边界误差和泄漏的频率,此时可将式(10)改写为

$$W = \sum_{i=1}^{r+1} \sigma_i u_i v_i^T + \sum_{i=r+2}^p \sigma_i u_i v_i^T \quad (16)$$

$$\text{令 } W' = \sum_{i=1}^{r+1} \sigma_i u_i v_i^T, \quad W'' = \sum_{i=r+2}^p \sigma_i u_i v_i^T, \text{ 则 } W' \text{ 反}$$

映的就是原矩阵 W 中的直流偏置和 r 个频率峰,而 W'' 反映的则是 W 中的边界误差和由于频率泄漏而产生的频率峰,这三个矩阵满足简单的叠加关系,即: $W = W' + W''$,而在 W' 中则消去了边界误差和泄漏频率的不良影响。对于本例信号, W' 是由前 5 个非零奇异值重构得到的,其绝对值如图 3 所示,易见在其中边界误差已经消除。而由从第 6 个非零奇异值开始的后面所有非零奇异值重构得到的就是 W'' ,对 W'' 取绝对值作图,如图 6a 所示,并绘出其在 20 Hz 处的局部图形,如图 6b 所示,从这图 6 可见 W'' 反映的确实是 W 中的边界误差和由于频率泄漏而产生的频率,这一结果完全证实了上面关于非零奇异值个数增加的原因分析,而仅由前 5 个非零奇异值重构得到的 W' 则消去了由边界误差和泄漏的频率成分造成的不良影响。

4 含噪声时的情形

4.1 纯噪声的连续 Morlet 小波变换结果矩阵的秩

设信号中含有白噪声,白噪声 $\zeta(t)$ 的自相关函数是^[14]

$$R_{\zeta}(t) = d^2 \cdot \delta(t) \quad (17)$$

式中, d 为白噪声 $\zeta(t)$ 的标准差,而 $\delta(t)$ 为 Kronecker 函数

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (18)$$

从式(17)容易计算得到白噪声的功率谱密度函数为

$$\hat{P}_{\zeta}(\omega) = d^2 \quad (19)$$

可见白噪声在频域是一条均匀分布的直线,若以 $\zeta(t)$ 作为 Morlet 小波变换的输入信号,在某一个小波尺度 s 下,输出信号的功率谱密度为

$$\hat{P}_{wf}(\omega) = |\hat{\psi}_s(\omega)|^2 \hat{P}_\xi(\omega) \quad (20)$$

式中, $\hat{P}_{wf}(\omega)$ 为白噪声小波变换结果的功率谱密度函数。

图 6 SVD 分离出来的边界误差和泄漏频率

将 $\hat{\psi}_s(\omega)$ 的表达式(4)以及式(19)代入式(20)并化简, 可以得到白噪声的 Morlet 小波变换结果的功率谱为

$$\hat{P}_{wf}(\omega) = 2\pi\sigma^2 d^2 \cdot \exp\left[-\left(\omega - \frac{\omega_0}{s}\right)^2 \cdot s^2 \sigma^2\right] \quad (21)$$

可见白噪声在某一尺度 s 下的 Morlet 小波变换结果在频域就是一个高斯窗, 这高斯窗的中心在 ω_0/s , 窗宽与 $s\sigma$ 成反比, $s\sigma$ 越大, 则窗宽越小。

在 Morlet 小波的两个参数 ω_0 和 σ 确定后, 如果对白噪声进行连续 Morlet 小波变换, 因为尺度 s 是连续变化的, 相邻两尺度的数值差别是很小的, 则相邻两高斯窗的中心 ω_0/s 会很接近, 其窗宽的差别也相当小。例如取 Morlet 小波的参数 $\omega_0 = 3.14159$ 和 $\sigma = 10$, 白噪声 $\xi(t)$ 的标准差 $d=1$, 而尺度 s 在 $1 \sim 100$ 之间连续变化, 若共进行 512 个尺度的连续 Morlet 小波变换, 则相邻尺度的递增量为 $\Delta s = (100-1)/511 = 0.1937$, 在这样的情况下, 可以根据式(21)画出白噪声在不同相邻尺度下的几

个频率窗, 如图 7 所示。

图 7 相邻尺度下白噪声 Morlet 小波变换结果的功率谱

从图 7 可见, 两相邻高斯窗的大小和中心是相当接近的, 而且尺度越大, 相邻两高斯窗的中心越接近, 窗宽也趋于一致。可以根据式(21)解释这个现象, 从式(21)可见, 高斯窗的中心为 ω_0/s , 对于两相邻尺度 s_i 和 s_{i+1} , 它们所对应的窗的中心之间的距离为

$$\frac{\omega_0}{s_i} - \frac{\omega_0}{s_{i+1}} = \frac{(s_{i+1} - s_i)\omega_0}{s_i \cdot s_{i+1}} = \frac{\Delta s \cdot \omega_0}{s_i \cdot s_{i+1}} \quad (22)$$

式中, Δs 是尺度的增量。式(22)表明, 当尺度越大时, 相邻两高斯窗的中心会越接近。

对于窗宽也存在类似的现象。根据高斯函数的特性, 对式(21)所示的高斯函数, 其有效窗宽为 $6/(\sqrt{2}s\sigma)$, 则相邻两尺度 s_i 和 s_{i+1} 的窗宽差别为

$$\frac{6}{\sqrt{2}s_i\sigma} - \frac{6}{\sqrt{2}s_{i+1}\sigma} = \frac{6}{\sqrt{2}\sigma} \cdot \frac{\Delta s}{s_i \cdot s_{i+1}} \quad (23)$$

从式(22)、(23)可见, 在较大的尺度下, 不仅相邻高斯窗的中心会非常接近, 而且其有效窗宽的差别也相当小, 并且更重要的是, 高斯窗不像矩形窗那样是绝对截止的, 它是覆盖整个频域的, 不过距离窗中心越远的频率, 其幅值越小。在这样的情况下, 对于白噪声的连续 Morlet 小波变换结果, 当尺度较大时, 其相邻两尺度的小波分解结果所含频率成分没有什么区别, 它们具有相同的频率成分, 仅是各频率的幅值大小有一定微小区别而已, 因此这两尺度的小波变换结果是线性相关的; 只有当两个尺度差别很大, 相应的两个频率窗所含的频率成分才会有一定区别, 这两个尺度的小波变换结果才会线性无关。

总结以上分析, 可以得到结论: 对于白噪声的连续 Morlet 小波变换, 由于在较大尺度时, 相邻两尺度的变换结果存在线性相关性, 因此白噪声的连续 Morlet 小波变换的结果矩阵也不是一个行满秩矩

阵,但是它的秩却不会太低,因为当尺度差别很大时,这些尺度上的分解结果是线性无关的。

4.2 含噪信号的连续 Morlet 小波变换结果矩阵的秩的分析

现在来考虑含噪信号的 Morlet 小波-SVD 处理过程。一个含噪的信号可以表示为

$$f(t) = x(t) + \xi(t) \quad (24)$$

式中, $x(t)$ 是不含噪声的直流和交流成分,而 $\xi(t)$ 是白噪声。在某一个尺度 s 下对此含噪信号 $f(t)$ 进行 Morlet 小波变换,有

$$Wf(s, t) = f(t) * \psi_s(t) = x(t) * \psi_s(t) + \xi(t) * \psi_s(t) \quad (25)$$

可见,含噪信号 $f(t)$ 在某一尺度下小波变换的结果等于 $x(t)$ 和 $\xi(t)$ 在此尺度下的小波变换结果的叠加,而连续小波变换的结果就是连续多个尺度的小波变换结果按照尺度大小从低到高依次排列而成,因此 $f(t)$ 的连续 Morlet 小波变换的结果同样可以表示为 $x(t)$ 和 $\xi(t)$ 的连续小波变换结果的叠加,即

$$W = W_x + W_\xi \quad (26)$$

式中, W 、 W_x 和 W_ξ 分别是 $f(t)$ 、 $x(t)$ 和 $\xi(t)$ 的连续 Morlet 小波变换的结果矩阵,这些矩阵的维数都是 $m \times n$,其中 m 是尺度数,而 n 是信号长度。

对于白噪声的连续 Morlet 小波变换矩阵 W_ξ ,由第 4.1 节的分析可知,它不是一个行满秩矩阵,设其秩为 h ,则对矩阵 W_ξ 进行奇异值分解,可以得到 h 个非零奇异值。与式(10)类似, W_ξ 可以用这 h 个非零奇异值及相应的左、右奇异矢量完全恢复出来

$$W_\xi = \sigma_{\xi,1} u_{\xi,1} v_{\xi,1}^T + \sigma_{\xi,2} u_{\xi,2} v_{\xi,2}^T + \cdots + \sigma_{\xi,h} u_{\xi,h} v_{\xi,h}^T \quad (27)$$

式中, $\sigma_{\xi,i}$ 是 W_ξ 的第 i 个奇异值; $u_{\xi,i} \in \mathbf{R}^{m \times 1}$,它是 W_ξ 的第 i 个左奇异矢量; $v_{\xi,i} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$,它是 W_ξ 的第 i 个右奇异矢量, $i=1, 2, \dots, h$ 。

W_ξ 的第 k 行就是白噪声 $\xi(t)$ 在尺度 s_k 下的小波变换结果 $Wf_\xi(s_k, t)$, 设式(27)中的左奇异矢量 $u_{\xi,i} = (u_{\xi,i,1}, u_{\xi,i,2}, \dots, u_{\xi,i,m})^T$, 则根据式(27)可以得到 $Wf_\xi(s_k, t)$ 为

$$Wf_\xi(s_k, t) = \sigma_{\xi,1} u_{\xi,1,k} v_{\xi,1}^T + \sigma_{\xi,2} u_{\xi,2,k} v_{\xi,2}^T + \cdots + \sigma_{\xi,h} u_{\xi,h,k} v_{\xi,h}^T \quad (28)$$

式中, $u_{\xi,i,k}$ 是列矢量 $u_{\xi,i}$ 的第 k 个坐标值, $i=1, 2, \dots, h$, $k=1, 2, \dots, m$ 。

而对于无噪声信号 $x(t)$, 设 $x(t)$ 含有 1 个直流分量和 r 个不同频率成分的交流分量, 根据第 3 节的分析可知,在不考虑边界误差和泄漏频率的影响下,

矩阵 W_x 的非零奇异值个数就是 $r+1$, W_x 可由这 $r+1$ 个非零奇异值及相应的左、右奇异矢量恢复出来,而 $x(t)$ 在尺度 s_k 下的小波变换结果 $Wf_x(s_k, t)$ 就是 W_x 的第 k 个行矢量,同理可以得到

$$Wf_x(s_k, t) = \sigma_{x,1} u_{x,1,k} v_{x,1}^T + \sigma_{x,2} u_{x,2,k} v_{x,2}^T + \cdots + \sigma_{x,r+1} u_{x,r+1,k} v_{x,r+1}^T \quad (29)$$

式中, $\sigma_{x,i}$ 是 W_x 的第 i 个奇异值; $u_{x,i,k}$ 是 W_x 的第 i 个左奇异矢量 $u_{x,i}$ 的第 k 个坐标值; $v_{x,i} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$,它是 W_x 的第 i 个右奇异矢量, $i=1, 2, \dots, r+1$, $k=1, 2, \dots, m$ 。

因此,对于含噪信号 $f(t)$ 在尺度 s_k 下的小波变换结果 $Wf(s_k, t)$, 根据式(25)、(28)和(29)可以得到

$$Wf(s_k, t) = Wf_x(s_k, t) + Wf_\xi(s_k, t) = \sigma_{x,1} u_{x,1,k} v_{x,1}^T + \sigma_{x,2} u_{x,2,k} v_{x,2}^T + \cdots + \sigma_{x,r+1} u_{x,r+1,k} v_{x,r+1}^T + \sigma_{\xi,1} u_{\xi,1,k} v_{\xi,1}^T + \sigma_{\xi,2} u_{\xi,2,k} v_{\xi,2}^T + \cdots + \sigma_{\xi,h} u_{\xi,h,k} v_{\xi,h}^T \quad k=1, 2, \dots, m \quad (30)$$

因为信号 $x(t)$ 和噪声 $\xi(t)$ 是线性无关的,因此它们在任一尺度上的小波变换结果也是线性无关的,则小波变换结果的基矢量 $v_{x,i}$ 和 $v_{\xi,i}$ 也是线性无关的,则由式(30)可见, $Wf(s_k, t)$ 可由 $r+1+h$ 个线性无关的矢量 $v_{x,i}$ 和 $v_{\xi,i}$ 表示出来,因为 $Wf(s_k, t)$ 就是矩阵 W 的第 k 行,也就是说,矩阵 W 的任一行都可由 $r+1+h$ 个线性无关的矢量表示出来,因此 W 的秩就是 $r+1+h$ 。

以上过程表明,在不考虑边界误差和频率泄漏的情况下矩阵 W 的秩就是 $r+1+h$, 因此对 W 进行奇异值分解,可以得到 $r+1+h$ 个非零奇异值及相应的左、右奇异矢量,但是不可能获得如式(30)那样的将信号奇异值和噪声奇异值完全分离开的效果。因为根据奇异值分解理论,对混合矩阵 W 进行奇异值分解,得到的奇异值会将 W_x 和 W_ξ 的奇异值信息混合在一起,而不会将 W_x 和 W_ξ 的奇异值完全分离开,可以设 W 的奇异值为

$$\sigma_i = \sigma'_{x,i} + \sigma'_{\xi,i} \quad i=1, 2, \dots, r+1+h \quad (31)$$

式中, $\sigma'_{x,i}$ 是由 W_x 贡献的那部分,而 $\sigma'_{\xi,i}$ 是由 W_ξ 贡献的那部分,需要注意的是,这里 $\sigma'_{x,i}$ 并非 W_x 的奇异值, $\sigma'_{\xi,i}$ 也并非 W_ξ 的奇异值,这是因为矩阵之和的奇异值虽然混合了各分量矩阵的信息,但是它们与分量矩阵的奇异值之间并不满足叠加原理。

相应地, W 的右奇异矢量 v_i 也可表示为

$$v_i = v'_{x,i} + v'_{\xi,i} \quad i=1, 2, \dots, r+1+h \quad (32)$$

式中, $\mathbf{v}'_{x,i}$ 是由 $\mathbf{W}_x$ 贡献的那部分, 而 $\mathbf{v}'_{\xi,i}$ 是由 $\mathbf{W}_\xi$ 贡献的那部分, 同样, $\mathbf{v}'_{x,i}$ 并非 $\mathbf{W}_x$ 的右奇异矢量, $\mathbf{v}'_{\xi,i}$ 也并非 $\mathbf{W}_\xi$ 的右奇异矢量。设 $\mathbf{W}$ 的第 i 个左奇异矢量为 $\mathbf{u}_i$, 则利用 σ_i 、 $\mathbf{u}_i$ 和 $\mathbf{v}_i$ 可以将 $\mathbf{W}$ 表示为

$$\mathbf{W} = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T + \cdots + \sigma_{r+1} \mathbf{u}_{r+1} \mathbf{v}_{r+1}^T + \sigma_{r+2} \mathbf{u}_{r+2} \mathbf{v}_{r+2}^T + \cdots + \sigma_{r+1+h} \mathbf{u}_{r+1+h} \mathbf{v}_{r+1+h}^T \quad (33)$$

因为奇异值是按照从大到小的顺序排列的, 大奇异值及其所对应的基矢量 $\mathbf{v}_i$ 代表的是矩阵 $\mathbf{W}$ 中能量较大的那部分信息。如果在 $\mathbf{W}$ 中, 噪声 $\xi(t)$ 的小波分量的能量低于信号 $x(t)$ 的小波分量的能量, 那么在 $\mathbf{W}$ 的这 $r+1+h$ 个非零奇异值中, 前 $r+1$ 个大奇异值主要代表的就是信号 $x(t)$ 的小波变换结果, 也即是 $\mathbf{W}_x$, 但是如式(31)所示这 $r+1$ 个奇异值会混入一定的噪声。现利用前 $r+1$ 个奇异值对 $\mathbf{W}$ 进行 SVD 重构, 并考虑到式(31)、(32), 可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{W} = & (\sigma'_{x,1} + \sigma'_{\xi,1}) \mathbf{u}_1 (\mathbf{v}'_{x,1} + \mathbf{v}'_{\xi,1})^T + \\ & (\sigma'_{x,2} + \sigma'_{\xi,2}) \mathbf{u}_2 (\mathbf{v}'_{x,2} + \mathbf{v}'_{\xi,2})^T + \cdots + \\ & (\sigma'_{x,r+1} + \sigma'_{\xi,r+1}) \mathbf{u}_{r+1} (\mathbf{v}'_{x,r+1} + \mathbf{v}'_{\xi,r+1})^T \end{aligned} \quad (34)$$

如果信号 $x(t)$ 的小波分量的能量大于噪声 $\xi(t)$ 的小波分量的能量, 则利用式(34)得到的基本上是 $\mathbf{W}_x$ 的信息, 虽然此时还存在一定的噪声干扰, 但是在式(33)中后面那 h 个奇异值所代表的噪声信息则完全被去掉了, 因此在一定程度上消除了 $\mathbf{W}$ 中的噪声干扰, h 比 $r+1$ 越大, 意味着被抛弃的噪声奇异值越多, 则消噪效果越好。

这种消噪方式的一个不同寻常的特点是: 它消除的是 $\mathbf{W}$ 中的各有效谱峰之间由于噪声而产生的干扰谱峰。从式(32)可见, 噪声信息 $\mathbf{v}'_{\xi,i}$ 是附在有用信息 $\mathbf{v}'_{x,i}$ 上的, 如果没有噪声干扰, 即 $\mathbf{v}'_{\xi,i} = 0$, 此时基矢量 $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_{x,i}$, 而有效奇异值就是前面的 $r+1$ 个奇异值, 则利用这前 $r+1$ 个奇异值及相应的基矢量 $\mathbf{v}_i$ 重构得到的就是 $\mathbf{W}_x$ 。如果将 $\mathbf{W}_x$ 绘成三维时频图, 其结果就是在频率轴上的 $\omega_i/2\pi$ 处出现平行于时间轴的峰值, 一共有 r 个这样的谱峰, 图 1 的结果已经证明了这一点, 这里 ω_i 是 $x(t)$ 中交流成分 $a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$ 的圆频率 ($i = 1, 2, \cdots, r$), 而 $x(t)$ 中的直流分量只是使整个三维时频图沿 Z 轴产生一定的平移。这些谱峰完全是由前 $r+1$ 个基矢量 $\mathbf{v}_i$ 恢复出来的, 当存在噪声干扰时, $\mathbf{W}$ 的有效奇异值是前 $r+1+h$ 个, 如果噪声小波分量的能量低于信号小波分量的能量, 那么虽然前 $r+1$ 个奇异值代表的仍然是 $\mathbf{W}_x$, 但是此时这些奇异值及相应的基矢量 $\mathbf{v}_i$ 已经受到噪声的影响, 基矢量变为 $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_{x,i} + \mathbf{v}'_{\xi,i}$, 如果

利用前 $r+1$ 个奇异值及基矢量 $\mathbf{v}_i$ 重构, 此时得到的 $\mathbf{W}$ 虽然反映的是 $\mathbf{W}_x$ 的信息, 但是因为此时有噪声信息 $\mathbf{v}'_{\xi,i}$ 附在有用信息 $\mathbf{v}'_{x,i}$ 上, 重构得到的 r 个谱峰将受到噪声的影响, 也即是频率轴上 $\omega_i/2\pi$ 处的谱峰形状将会受到噪声的影响而变得不规则。而 $\mathbf{W}$ 的后 h 个奇异值则是噪声奇异值, 它们及相应的基矢量 $\mathbf{v}_i$ 影响的是频率轴上各 $\omega_i/2\pi$ 之间的谱峰, 其结果就是在各 $\omega_i/2\pi$ 之间产生杂乱的干扰谱峰, 如果抛弃掉后面的这 h 个奇异值, 则它们产生的杂乱谱峰将会被清除, 各 $\omega_i/2\pi$ 处的谱峰之间将会变得很干净。另外, 根据第 3 节的结果可知, 仅利用前 $r+1$ 个奇异值重构还可消去边界误差和频率泄漏对小波变换结果的影响。

4.3 实例分析及矩阵维数对消噪效果的影响

下面用实例来验证以上分析, 并探讨矩阵维数对噪声消除效果的影响。对正弦信号 $x(t) = \sin(2\pi \cdot 20t) + \sin(2\pi \cdot 100t) + \sin(2\pi \cdot 200t) + \sin(2\pi \cdot 300t) + \sin(2\pi \cdot 400t)$ 叠加正态分布的白噪声 $\xi(t)$, 信噪比为 -3.7477 dB, 得到含噪信号 $f(t)$, 分别对 $f(t)$ 、 $x(t)$ 和 $\xi(t)$ 以 1000 Hz 的采样频率各采集 512 点, 并分别对这三个信号进行连续 Morlet 小波变换, 变换时 Morlet 小波参数仍然为 $\omega_0 = \pi$ 、 $\sigma = 10$, 尺度 $s \in [1, 100]$, 并在这 $1 \sim 100$ 的范围内分别取 256 和 512 个尺度进行小波变换, 采用不同的尺度数是为了研究矩阵维数的变化对消噪效果的影响。在每一种尺度数下分别可以得到三个连续小波变换的结果矩阵 $\mathbf{W}$ 、 $\mathbf{W}_x$ 和 $\mathbf{W}_\xi$, 分别对这三个矩阵进行奇异值分解, 得到它们的奇异值, 并将三个矩阵的奇异值前 50 点绘在一个图中, 如图 8 所示。从图 8 可以清楚地看到, $\mathbf{W}_\xi$ 的奇异值基本是连续均匀下降的, 这表明相邻奇异值之间的差异比较均匀; 而 $\mathbf{W}_x$ 的奇异值的下降却没有这种均匀性, 它的前 5 个奇异值较大, 由第 3 节的分析可知, 这 5 个奇异值代表着信号 $x(t)$ 的 5 个频率成分, 而其后的非零奇异值则代表的是边界误差和泄漏的频率, 从图 8 可见 $\mathbf{W}_x$ 的前 5 个奇异值和其后的奇异值之间存在一个很大的突变, 在此之后奇异值的下降变得比较均匀。混合矩阵 $\mathbf{W}$ 的奇异值则可视为是在 $\mathbf{W}_x$ 的奇异值的基础上, 混入了噪声矩阵 $\mathbf{W}_\xi$ 的奇异值的影响, 但是各个奇异值受噪声影响的程度不一样, 就本例而言, $\mathbf{W}$ 的第 1 个奇异值受噪声影响最大, 第 4 个奇异值受噪声影响最小, 它基本与 $\mathbf{W}_x$ 的第 4 个奇异值重合。从第 6 个奇异值开始, 随着奇异值序号的增加, $\mathbf{W}_x$ 的奇异值以较快的速度趋向于零, 但 $\mathbf{W}_\xi$ 的奇异值却没有那么快趋向于零, 它具有更多的非零奇异值, 这表明 $\mathbf{W}_\xi$ 的秩较大, 这符合前面关于 $\mathbf{W}_\xi$ 的秩不会太低的理论分

图8 不同维数下 W 、 W_x 、 W_ξ 的奇异值关系

析, 而 W 和 W_ξ 的奇异值之间的差异则变得越来越小, 最后逐渐重合在一起, 这表明 W 后面的那些奇异值基本上就是噪声奇异值。如果取 W 的前 5 个奇异值进行重构, 尽管这 5 个奇异值受到了噪声的污染, 但是后面那些代表噪声的奇异值却完全被去掉了, 因此可以在很大程度上消除 W 中的噪声干扰, 并且根据第 3 节的分析, 这还可消除 W 中的边界误差和泄漏频率的影响。从第 6 个奇异值开始, W 之所以还有一部分奇异值与 W_ξ 的奇异值还存在差异, 就是因为 W 的这部分奇异值中还含有小波变换边界误差和频率泄漏的信息, 而随着奇异值序号的增加, 这种差异逐渐消失, 此时 W 的奇异值完全就是噪声奇异值。 W 、 W_x 和 W_ξ 的奇异值之间的这种关系不受矩阵维数的影响, 从图 8 可见, 当矩阵维数由 256×512 增大到 512×512 时, 各矩阵的奇异值的幅值都会增大, 但是它们之间的比例关系、变化趋势基本保持一致, 如果采用更大的矩阵维数如 $1\,024 \times 512$ 、 $2\,048 \times 512$ 也存在类似的结果, 矩阵维数的增大并不能使 W 的前 5 个奇异值更趋近于 W_x 的前 5 个奇异值, 也就是说, 并不能因此而降低噪声对 W 的奇异值的影响, 这说明矩阵维数的变化对 SVD 的消噪效果没有什么影响。这和 SVD 对一维信号的消噪效果有很大不同, 对于一维信号构造的 Hankel 矩阵, 当矩阵维数增大时, SVD 的消噪

效果明显增强^[15]。

在分析了各矩阵奇异值之间的关系之后, 可以来看一下实际的消噪效果。以尺度数 256 为例, 对 W 取绝对值绘图, 如图 9a 所示, 可见其中的干扰很严重, 噪声产生的杂乱谱峰无处不在, 它们形成极大的干扰, 整个三维时频图看上去很杂乱, 严重地影响了对信号 $x(t)$ 的正常谱峰的判断。现在取 W 的前 5 个奇异值及相应的基矢量 v_i 进行重构, 得到的结果如图 9b 所示, 可见那些杂乱谱峰全部被清除了, 仅在 20 Hz、100 Hz、200 Hz、300 Hz 和 400 Hz 处留下谱峰, 这 5 个频率正是信号 $x(t)$ 的频率, 而这 5 个谱峰之间的其他杂乱谱峰则完全被消除了, 但是这 5 个谱峰的形状也受到了一定的影响, 这是因为还是有一定的噪声附在前 5 个奇异值及相应的基矢量 v_i 上, 不能完全去除它们。这一结果证实了前面关于 SVD 对矩阵 W 中噪声干扰消除效果的分析, 它有选择性地清除了各有效谱峰之间的杂乱谱峰, 而有效谱峰则均被保留, 其效果令人满意。当尺度数为 512、1 024 和 2 048 时的消噪结果也与图 9 没有多少区别, 限于篇幅这里不再给出它们的图形结果, 这说明矩阵维数对消噪效果的影响不大, 而其内在原因是矩阵维数变化时并不能影响 W 、 W_x 和 W_ξ 的奇异值之间的关系, 这在上面已做了分析。

图9 SVD对连续Morlet小波变换噪声谱的清除。

5 对转子振动信号的处理实例

在 INV1612 型多功能柔性转子试验台上进行转子振动检测试验, 利用电涡流传感器检测转子的振动位移, 如图 10 所示。图 10 中两个电涡流传感器相互垂直, 这是为了分析转子轴心轨迹之用, 而本文只分析其中一个方向的振动信号。试验时转子转速为 3 520 r/min, 对转子振动信号的采样频率为 2 000 Hz, 采样点数为 1 024 点, 得到的一个振动信号如图 11a 所示, 此信号的幅值谱如图 11b 所示, 可见主要有三个频率成分, 其中 58.593 8 Hz 是转子的转频 (理想转频: $3\,520/60=58.666\,7$ Hz), 而另外两个频率 117.187 5 Hz 和 175.781 3 Hz 分别为转频的二次谐波和三次谐波, 但是它们的幅值很微小, 尤其是三次谐波。根据转子振动理论, 转频伴随着其二次谐波、三次谐波的出现意味着转轴组件对中不良, 因二、三次谐波的幅值较小, 说明对中不良还很轻微, 从普通傅里叶变换只能得到这一结论。

图 10 利用涡流传感器检测转子振动位移

图 11 原始振动信号及其幅值幅

利用连续 Morlet 小波变换来处理此信号, Morlet 小波的参数仍然取 $\omega_0=\pi$ 、 $\sigma=10$, 尺度 $s\in[1,100]$ 。虽然取不同尺度数对后续 SVD 处理效

果的影响不大, 但是尺度数较多时能取得较高的频率分辨率, 因此在 1~100 的范围内取 512 个尺度。在这样的参数下对图 11a 的信号进行连续小波变换, 得到三维时频图, 如图 12 所示。从图 12 可以看到, 整个时频图中的谱峰比较杂乱, 能够确认的只有一个平行于时间轴的较大谱峰, 它是原信号的转频, 除此之外从图 12 中难以确认更多的信息, 这种效果还不如傅里叶变换。

图 12 转子振动信号的连续 Morlet 小波变换结果

现对此连续小波变换结果进行奇异值分解, 首先来证明连续 Morlet 小波变换结果矩阵中频率峰的幅值由相应的奇异值大小决定, 奇异值越大, 其对应的频率峰幅值越大。由第 2 节可知, 对含有 1 个直流分量和 r 个不同频率成分的信号 $f(t)$, 其连续 Morlet 小波变换的结果矩阵 W 在奇异值分解之后, 在不考虑边界误差和频率泄漏的情况下, 可以得到 $r+1$ 个非零奇异值, 其对应的 $r+1$ 个右奇异矢量 $\{v_i^T, i=1,2,\dots,r+1\}$ 形成了 W 的一组基矢量, 其中一个 v_i 对应 W 中的直流偏置, 而另外每一个 v_i 分别对应 W 中的一个频率峰, r 个 v_i 共对应 W 中的 r 个频率峰, W 中的直流偏置和 r 个频率峰可以由这 $r+1$ 个基矢量完全恢复出来, 如式(10)所示。在式(10)中, 令 $W_i = \sigma_i u_i v_i^T$, 它是由单个 v_i 形成的分量矩阵, 其维数与 W 相同, 均为 $m \times n$ 。根据奇异值分解的性质, u_i 和 v_i 是单位矢量, 即 $|u_i|^2=1$ 、 $|v_i|^2=1$, 则可以计算得到此分量矩阵的能量为

$$|W_i|^2 = \sigma_i^2 \sum_{j=1}^m u_{j,i}^2 \sum_{k=1}^n v_{k,i}^2 = \sigma_i^2 |u_i|^2 |v_i|^2 = \sigma_i^2 \quad (35)$$

因为每一个 v_i 对应一个频率峰, 因此 W_i 中只有一个频率峰, 那么显然 W_i 的能量就是这个频率峰的能量, 而频率峰的能量是这个频率在各个时刻的幅值平方和组成的, 则式(35)表明, 奇异值 σ_i 越大, 则这个 σ_i 所对应的频率峰的幅值也越大。

对图 12 所示的连续小波变换结果进行奇异值分解, 得到的奇异值曲线如图 13a 所示, 可见此曲

线在开始比较陡峭, 然后比较平缓地下降, 为了更清楚地观察奇异值曲线的特性, 将前 30 点奇异值绘于图 13b, 可见只有第一个奇异值较大, 它与其他奇异值之间存在一个较大的突变。根据式(35)可知, 此奇异值所代表的就是图 12 中的那个幅值最大的谱峰, 即转频谱峰; 其他奇异值相对较小, 它们之间的变化也比较平缓, 这些奇异值所代表的是连续小波变换中峰值较小的那部分频率以及边界误差、泄漏的频率和噪声干扰。

图 13 连续 Morlet 小波变换矩阵的奇异值

取第 1 个奇异值进行 SVD 重构, 结果如图 14a 所示, 可见此时只有一个转频谱峰, 这证实此奇异值代表的确实就是那个幅值最大的转频, 而其他所有的谱峰都去掉了。取前两个奇异值重构, 结果如图 14b 所示, 可见这时除转频谱峰外, 还存在一个 2 倍转频谱峰, 而其他谱峰, 包括转频和 2 倍转频之间的那些干扰谱峰都消失了, 整个时频谱相当干净。因图 14a 已表明第 1 个奇异值代表的是转频, 则图 14b 表明第 2 个奇异值代表的就是二倍转频。从奇异值曲线来看(图 13b), 第 2 个奇异值与之后的那些奇异值差别不大, 这意味着这些奇异值所代表的那些谱峰的幅值的差异也很小, 因此在原时频图中(图 12), 二倍转频与其他谱峰混在一起难以分辨出来, 而如果仅取前两个奇异值重构, 则第 2 个奇异值所代表的二倍转频就会被分离出来。

取前 8 个奇异值重构, 结果如图 14c 所示, 可见除了转频、二倍转频之外, 在高频处还产生了一些谱峰, 但不同于与时间轴相平行的转频和二倍转频谱峰, 这些谱峰是与频率轴相平行的, 并且相邻谱峰之间也很干净, 从原时频图看不到这种效果。这样的谱峰不是噪声产生的, 因为噪声谱峰绝不可能与频率轴如此规则地平行。实际上这种频谱特征是冲击信号的典型特征, 对于理想的冲击信号 $\delta(t)$, 它的定义是

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (36)$$

而它的频谱为

$$\hat{\delta}(f) = \int_R \delta(t) \exp(-j2\pi ft) dt = 1 \quad (37)$$

即理想冲击函数的频谱在整个频率范围内都存在, 并且在所有频段上都是等强度的, 是一种均匀谱。但实际中绝不可能产生如此理想的冲击, 实际冲击的频谱总是只发生在一定频率范围内, 且在各频段内的强度也不会很均匀。对比图 11 中的原始信号, 可以发现原信号在一些时间点上确实存在较大的冲击, 而图 14c 中与频率轴相平行的谱峰就是这些冲击在时频图中的反映, 这些谱峰与时间轴的交点就是冲击发生的时间点。如果再取前 15 个奇异值重构, 如图 14d 所示, 此时的时频图仍然很干净, 只是那些与频率轴平行的冲击谱峰的频率范围进一步变宽了, 这表明增加的这 7 个奇异值中有一部分代表的仍然是冲击信息; 而除此之外, 在时频图中还出现了与时间轴平行的 3 倍转频、4.5 倍转频和 6 倍转频, 这三个频率信息没有在前 8 个奇异值重构的时频图中出现, 这说明这三个频率成分的幅值较小, 因而代表它们的奇异值排不到前 8 位中去, 而代表冲击信息的奇异值却排到前 8 位中去了, 这说明冲击信息在原信号中所占比例比 3 倍转频、4.5 倍转频和 6 倍转频还要大, 是仅次于转频和二倍转频的主要信息, 是不能被忽略的; 另外, 4.5 倍转频和 6 倍转频这样的高次谐波的出现意味着转子还存在基座松动和动静件碰摩, 所有的这些信息是图 11 的幅值谱反映不了的。

以上处理结果表明, SVD 方法对连续 Morlet 小波的变换结果有重要提纯作用, 它除了消除了连续 Morlet 小波变换结果中噪声产生的杂乱谱峰外, 另外还可以发现各个成分在原信号中所占份量的顺序, 如本例中通过依次选择不同的奇异值重构, 证明了原信号中转频成分所占比例最大, 二倍转频次之、而冲击成分也是一个主要成分, 其重要性位于第三, 比 3 倍转频、4.5 倍转频和 6 倍转频这三个频率成分在原信号中所占比例还大。

SVD 对连续 Morlet 小波变换的另外一个重要作用是压缩冗余数据, 如本例中整个 512 行的 Morlet 小波变换结果矩阵的有效信息只用前 15 个奇异值及相应的左、右奇异矢量 u_i 、 v_i 就可完全恢复出来。原来的矩阵数据量是 $512 \times 1\,024$, 经 SVD 压缩后, 15 个右奇异矢量 v_i 的数据量是 $15 \times 1\,024$, 15 个左奇异矢量 u_i 的数据量是 15×512 , 加上 15 个奇异值, 压缩后的数据量与原数据量之比为 $(15 \times 1\,024 + 15 \times 512 + 15) / (512 \times 1\,024) = 0.043\,97$, 即压缩后的数据量仅为原矩阵数据量的 4.397%, 还不到原矩

阵数据量的 5%, 但却反映了比原矩阵更清晰的故障特征信息。

6 结论

(1) 对含有 1 个直流成分和 r 个不同频率交流成分的无噪声信号进行连续 Morlet 小波变换, 当尺度数大于 $r+1$ 时, 得到的结果矩阵不是一个行满秩矩阵, 不管尺度数比 $r+1$ 大多少, 此矩阵的秩总是 $r+1$, 因此连续 Morlet 小波变换结果矩阵存在很大的冗余性。

(2) 对于含有 1 个直流成分和 r 个不同频率交流成分的无噪声信号, 其连续 Morlet 小波变换结果矩阵通过 SVD 可以压缩为前 $r+1$ 个非零奇异值及相应的左、右奇异矢量, 前 $r+1$ 个右奇异矢量构成了连续 Morlet 小波变换结果矩阵的一组基矢量, 矩阵维数越大, 压缩效果越好; 而之后的非零奇异值则代表着小波变换的边界误差和泄漏的频率成分。利用前 $r+1$ 个非零奇异值进行 SVD 重构, 可以完全恢复连续小波变换结果中的有效信息, 并可完全消除边界误差和频率泄漏对小波变换结果的影响。

(3) 白噪声的连续 Morlet 小波变换的结果矩阵也不是一个行满秩矩阵, 但是它的秩却不会太低; 而对于含噪信号, 它的连续 Morlet 小波变换的结果矩阵的秩是有用信号的秩和噪声的秩之和。

(4) 对于含噪信号的连续 Morlet 小波变换, 如果信号的小波分量能量大于噪声小波分量的能量, 则利用前 $r+1$ 奇异值进行 SVD 重构, 可以恢复连续小波变换结果中的有效谱峰, 而噪声产生的杂乱谱峰将被清除, 但是有效谱峰的形状会受到一定的影响。SVD 对连续小波变换结果矩阵的这种提纯效果与矩阵维数无关。

(5) SVD 还可用于确定原信号中各成分的重要程度。在对转子振动信号的处理中, 通过依次选择前面的奇异值重构, 发现了原信号中的冲击成分是一个主要成分, 其重要性比 3 倍转频、4.5 倍转频和 6 倍转频这三个频率成分在原信号中所占比例还大, 这种结果是傅里叶分析得不到的。

参 考 文 献

- [1] SHEEN Y T. On the study of applying Morlet wavelet to the Hilbert transform for the envelope detection of bearing vibrations[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2009, 23(5): 1518-1527.
- [2] GRYLLIAS K C, ANTONIADIS I A. Estimation of the instantaneous rotation speed using complex shifted Morlet wavelets[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2013, 38(1): 78-95.

图 14 不同奇异值重构的结果

- [3] SARAVANAN N, KUMAR S V N S, RAMACHANDRAN K I. A comparative study on classification of features by SVM and PSVM extracted using Morlet wavelet for fault diagnosis of spur bevel gear box[J]. Expert Systems with Applications, 2008, 35(3): 1351-1366.
- [4] SARAVANAN N, RAMACHANDRAN K I. A case study on classification of features by fast single-shot multiclass PSVM using Morlet wavelet for fault diagnosis of spur bevel gear box[J]. Expert Systems with Applications, 2009, 36(8): 10854-10862.
- [5] KARIMI H R, PAWLUS W, ROBBERSMYR K G. Signal reconstruction, modeling and simulation of a vehicle full-scale crash test based on Morlet wavelets[J]. Neurocomputing, 2012, 93(9): 88-99.
- [6] ALMANJI A, CHANG J Y. Feature extraction of surface electromyography signals with continuous wavelet entropy transform [J]. Microsystem Technologies, 2011, 17(5-7): 1187-1196.
- [7] MANSFELD A D. On the calculation of the Morlet wavelet used for the analysis of the dynamics of electroencephalogram signal responses[J]. Journal of Communications Technology and Electronics, 2012, 57(4): 429-431.
- [8] ZHAO Xuezhi, YE Bangyan. Similarity of signal processing effect between Hankel matrix-based SVD and wavelet transform and its mechanism analysis[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2009, 23(4): 1062-1075.
- [9] GOLUB G H, VAN LOAN C F. 矩阵计算[M]. 袁亚湘译. 北京: 科学出版社, 2001.
- GOLUB G H, VAN LOAN C F. Matrix calculation[M]. Translated by YUAN Yaxiang. Beijing: Science Press, 2001.
- [10] WANG W J, MCFADDEN P D. Application of wavelets to gearbox vibration signals for fault detection[J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, 192(5): 927-939.
- [11] BSSOW R. An algorithm for the continuous Morlet wavelet transform[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2007, 21(8): 2970-2979.
- [12] 赵学智, 叶邦彦, 陈统坚. 大型矩阵奇异值分解的多次分割双向收缩 QR 算法[J]. 华南理工大学学报, 2010, 38(1): 1-8.
- ZHAO Xuezhi, YE Bangyan, CHEN Tongjian. Multi-partition and double-directions shrink QR algorithm for singular value decomposition of large-scale matrix[J]. Journal of South China University of Technology, 2010, 38(1): 1-8.
- [13] 赵学智, 叶邦彦. 单向收缩 QR 算法在奇异值分解中的收敛特性[J]. 电子科技大学学报, 2010, 39(5): 762-767.
- ZHAO Xuezhi, YE Bangyan. Convergence characteristic of single direction shrink QR algorithm in the singular value decomposition[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2010, 39(5): 762-767.
- [14] 赵学智, 叶邦彦, 陈统坚. 基于统计模拟的无显式小波幅频特性计算与分析[J]. 机械工程学报, 2012, 48(9): 72-78.
- ZHAO Xuezhi, YE Bangyan, CHEN Tongjian. Computation and analysis of amplitude-frequency property of wavelet without analytic expression based on statistical simulation[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(9): 72-78.
- [15] 赵学智, 叶邦彦, 陈统坚. 奇异值差分谱理论及其在车床主轴箱故障诊断中的应用[J]. 机械工程学报, 2010, 46(1): 100-108.
- ZHAO Xuezhi, YE Bangyan, CHEN Tongjian. Difference spectrum theory of singular value and its application to the fault diagnosis of headstock of lathe[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(1): 100-108.

作者简介: 赵学智, 男, 1970 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为信号处理与机械故障诊断。

E-mail: mezhaoxz@scut.edu.cn

陈统坚, 男, 1937 年出生, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为现代制造系统及其状态监测。

E-mail: metjchen@scut.edu.cn

叶邦彦, 男, 1949 年出生, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为制造过程状态监测。

E-mail: byye@scut.edu.cn