

DOI: 10.3901/JME.2023.21.110

# 基于微动特性分析的精密线性平台微行程重复定位精度表征与补偿<sup>\*</sup>

唐 皓<sup>1</sup> 张 贺<sup>1</sup> 张 栋<sup>1</sup> 高贵兵<sup>1</sup> 郑 煜<sup>2</sup>

(1. 湖南科技大学机电工程学院 湘潭 411201;  
2. 中南大学机电工程学院 长沙 410083)

**摘要:** 重复定位精度是衡量运动系统精确性和稳定性的关键指标。以广泛应用于精密/超精密工程领域的精密线性平台为对象,针对微行程尺度下重复定位精度信息表征不清晰,误差补偿不精确等问题开展研究。首先,分析精密线性平台机械结构,辨识误差源并获取敏感误差项;其次,求解丝杠螺母副等效刚度、丝杠螺母副等效摩擦、直线导轨等效摩擦等物理信息,分析微行程(<0.1 mm)下精密线性平台微动特性,建立微行程尺度下动力学微分方程;最后,综合建立精密线性平台重复定位精度的误差模型,基于统计学规律计算其重复定位精度分布特性。通过不同行程(10 mm, 0.1 mm, 0.01 mm)测量试验可知,各带宽区间与理论值基本相等,表明重复定位精度数值与行程无直接关系,且位移-时间、速度-时间曲线均和仿真曲线趋势相同,证明了模型的精确性。调整材料属性后,新平台重复定位精度与误差模型预测值基本接近,同时结果优于原平台,证明了所提出精密线性平台微行程重复定位精度表征与补偿方法的可行性。该方法对于提升精密线性平台微行程重复定位精度具有重要意义。

**关键词:** 精密线性平台; 重复定位精度; 动力学; 刚度; 摩擦

**中图分类号:** TH115

## Repeatability Characterization and Compensation in Micro-scale Displacement for Precise Linear Stage Based on Micro-dynamics Analysis

TANG Hao<sup>1</sup> ZHANG He<sup>1</sup> ZHANG Dong<sup>1</sup> GAO Guibing<sup>1</sup> ZHENG Yu<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201;  
2. College of Mechanical and Electromechanical Engineering, Central South University, Changsha 410083)

**Abstract:** Repeatability is an essential index for judging the moving accuracy and stability. A precise linear stage widely used in precise/super-precision engineering region is analyzed, and a series of researches are proposed to solve these problems including repeatability characterization unclearly and error compensation inaccurately. Firstly, the structure of precise linear stage is analyzed, and sensitive error terms are developed; secondly, the equivalent stiffness of the bearing-screw joint, the equivalent stiffness of the screw nut pair, the equivalent friction of the screw nut pair and the equivalent friction of the linear guides are calculated, respectively. The micro-dynamics of precise linear stage (<0.1 mm) is analyzed, and the dynamic equation of the precise linear stage is established. Finally, a comprehensive error model for repeatability of precise linear stage is established, and the distribution characteristic of repeatability based on statistics is computed. A series of measurement experiments are proposed in different displacement scales (10 mm, 0.1 mm, 0.01 mm). The width of repeatability is in coincidence with theoretical value in full stroke, which means the values of repeatability are not related to displacement. The relationships of displacement-time and velocity-time have the same trend with simulated results. in micro-scale displacement, and the error model accuracy is proved. By changing the material property, the value of repeatability is closed to predicted value, and the results are better than former stage, so that the error model can be adopted in

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(51705149)、湖南省教育厅优秀青年(20B212)和湖南省研究生科研创新(CX20210996)资助项目。20230123 收到初稿, 20230711 收到修改稿

repeatability prediction and compensation. This method has significantly meaning for repeatability improvement in micro displacement scale of precise linear stage.

**Key words:** precise linear stage; repeated positioning accuracy; dynamic; stiffness; friction

## 0 前言

精密线性平台广泛应用于微/纳米测量、光子器件制备等精密工程领域, 实现目标物体空间位姿的高精度定位。作为标准体系下的重要精度指标, 重复定位精度是目前行业内广泛使用的、用以衡量运动精度的关键参数<sup>[1-2]</sup>。目前使用的运动系统常辅之以高精度反馈模块, 如纳米级光栅尺等, 因此重复定位精度的受重视程度一般高于精度标准体系下其他指标, 如反向间隙、系统偏差、无效运动等。

关于重复定位精度的表征, 不仅应揭示其误差传递规律, 同时也需包含分布区间的数值信息, 以及误差概率分布, 方便预测可能出现的误差值, 为目标空间位姿的误差补偿与精度提升提供支撑。目前常使用的重复定位精度表征方法, 根据精度标准体系定义的数学公式与物理意义, 遵循给定的测量步骤, 计算得到数值, 并采用正态分布表示其特征与范围<sup>[3-4]</sup>。由于 ISO230-2<sup>[5]</sup>, ASME B5.54<sup>[6]</sup>, GB<sup>[7]</sup>等常用精度标准已给出具体测量步骤和计算公式, 如 4 倍不确定度, 以及单向极值与 2 倍不确定度之和的绝对值, 因此使用者们并未深度剖析重复定位精度的成因机理、传递规律及表征方法, 加之存在于反馈模块, 使得关于重复定位精度/误差的预测与补偿也缺乏研究, 若期望提高精度也大多是从更换高精度组件、调整结构等方面切入。上述思想对于采用计算结果指导大批量粗放型生产的场合, 计算过程简单, 处理方便。然而, 若需要从根源上研究重复定位精度的成因, 需要严格分析误差传递规律, 并建立相关误差模型。特别是在精密工程领域中小于 1 mm 的微行程运动尺度下, 传统方法过度聚焦于计算数值, 难以体现逐组件下误差的变化累计过程以及运动系统微动特性的影响, 致使应用环境狭窄, 较难适用于精密系统高精度预测补偿需求。

针对运动系统重复精度问题, 一些学者展开了相关研究。SUN 等<sup>[8]</sup>基于理论模型和实验测试研究了导轨几何误差对机床线性轴重复精度的影响。KLUZ 等<sup>[9]</sup>提出一种计算重复定位精度的方法, 该方法可以计算机器人运动时任意指定点的重复精度数值, 从而避免了耗时的测量。由于滚珠丝杠副是精密线性平台的关键零部件, 因此对于滚珠丝杠副

的运动特性进行分析是十分必要的, 已经有相关研究对滚珠丝杠的动态特性进行了分析。AGUADO 等<sup>[10]</sup>论述了机床运动学的改进模型, 并将其运用到误差不确定度的误差源研究中。黄涛等<sup>[11]</sup>提出了一种滚珠丝杠传动系统线性变参数动力学模型, 可为高精度运动控制提供理论基础。FREY 等<sup>[12]</sup>提出丝杠轴在不同运行和约束条件下的表现及其对系统模态的主要影响。LI 等<sup>[13]</sup>为提高丝杠副传动精度, 提出了动态传动误差的正反馈补偿方法。ZHANG 等<sup>[14]</sup>考虑载物台位置运用混合元法建立了丝杠伺服系统的动态模型, 提出了系统刚度矩阵和质量矩阵的计算方法。ZHANG 等<sup>[15]</sup>运用集中参数法建立了滚珠丝杠副系统的等效动力学模型, 考虑了加速度影响。可以看出, 深入观测运动系统微行程尺度下的运动状态, 完整掌握各类物理量信息, 分析系统微动特性, 精确获取系统动态响应曲线, 是准确表征微行程重复定位精度的关键。之前学者研究多聚焦于如何从公式定义方面控制、提升重复定位精度的数值, 对于精确揭示重复定位精度的形成机制, 特别是微行程尺度下重复定位精度的成因机理、传递规律、分布特点等仍需要重点关注。

关于精确表征重复定位精度的研究仍存在以下几个问题亟待厘清: ① 微行程重复定位精度(误差)成因特点; ② 微行程重复定位精度(误差)传递规律; ③ 微行程重复定位精度的误差模型, 以及如何为后续误差预测与补偿提供支撑。本文针对精密运动系统微行程重复定位误差表征问题, 深入开展微行程尺度下的运动系统动力学分析, 提出了一种基于微动特性研究的微行程重复定位误差表征方法。通过分析微行程尺度下运动系统动态特性, 剖析微行程重复定位误差的成因特点与机理, 揭示微行程重复定位精度的传递路径, 建立系统微动特性物理参数与重复定位精度数值的映射关系, 构建运动系统重复定位精度的数学模型, 实现微行程重复定位精度的精确描述; 设计相应测量试验验证本方法的有效性, 为提升系统运动精度、丰富误差理论提供理论基础与方法支撑。

## 1 标准体系下重复定位精度分析

目前关于运动系统精度指标群的定义描述与公

式推导, 主要涉及 ISO, ASME, GB, JIS<sup>[16]</sup>, BS<sup>[17]</sup> 及 VDI<sup>[18]</sup> 等几类精度标准, 包括定位精度和重复定位精度两项重要指标, 以及反向间隙、无效运动、系统偏差等其余几项指标。各类标准关于定位精度及重复定位精度的描述异同如表 1 所示。

定位精度与重复定位精度是目前行业内衡量运动系统性能高低的两项关键指标。根据表 1 中各精度标准的描述, 定位精度多集中于通过数据处理后的平均值描述目标物体的运动精确度, 常用于描述下一次运动偏差的极限分布范围, 因此重点放在各类误差源的影响与耦合关系, 特别是几何误差项的作用机理和分布规律, 笔者已开展了相关研究<sup>[19]</sup>; 而重复定位精度侧重于依据偏差/不确定度的倍数, 聚焦于数据处理后的方差/标准差, 常用于描述若干次相同运动路径的重复程度。由于大多运动系统均配置反馈单元, 因此行业内将重复定位精度作为精度指标的应用更为广泛, 更需要严格剖析系统在运动过程中的动态特性, 通过研究系统微动特性, 揭示重复定位精度的传递规律, 剖析精密运动系统重复定位精度的成因和形成机理。各国际通用标准关于精度指标群的测量步骤与定义公式存在异同, 但通常是采用针对某待测运动系统, 确定测量行程, 通过有限次的数据收集, 计算得出各精度的数值。一方面无法获取影响重复定位误差形成机理的各项因素, 另一方面难以在运动系统工作前对重复定位误差进行预测并

预先设计补偿方案。因此针对重复定位精度/误差形成机理的研究亟需开展。

为初步获取定位精度/重复定位精度的特征信息, 按照国际标准 ISO230-2:2006 中运动精度的定义方式对精密线性滑台进行不同行程的运动精度测量, 结果如图 1 所示。由于行程数量级跨度较大, 国际标准中对运动精度的定义方式较为综合和复杂, 选取能代表不同数量级的行程大小 0.01 mm, 0.02 mm, 0.05 mm, 0.1 mm, ..., 5 mm, 10 mm 进行运动精度的测量。可以看出, 与定位精度相比, 重复定位精度的走向与特征存在明显不同, 主要体现在: 定位精度随行程变化而发生明显变化, 在体现出单调增加的趋势; 重复定位精度随行程变化幅度很小, 走向保持水平。两者均是体现运动系统沿移动方向的精确程度, 但反映的差异表明其精度表征存在较大不同, 相应的误差特性也需进一步分析研究。

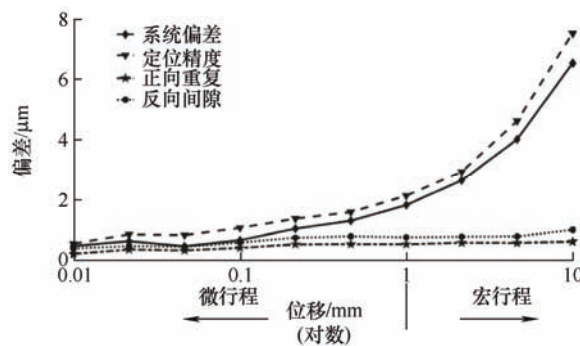


图1 行程-运动精度数值关系图

表 1 几种标准关于定位精度与重复定位精度的公式描述

精度标准	指标类型	公式描述
ISO	定位误差	$A = \max[\bar{X}_i \uparrow + 2S_i \uparrow, \bar{X}_i \downarrow + 2S_i \downarrow] - \min[\bar{X}_i \uparrow - 2S_i \uparrow, \bar{X}_i \downarrow - 2S_i \downarrow]$
	重复定位误差	$R \uparrow = 4 \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} \uparrow - \bar{X}_i \uparrow)^2}$
ASME	定位误差	$A \uparrow = \max[\bar{X}_i \uparrow + 2S_i \uparrow] - \min[\bar{X}_i \uparrow - 2S_i \uparrow]$ $A \downarrow = \max[\bar{X}_i \downarrow + 2S_i \downarrow] - \min[\bar{X}_i \downarrow - 2S_i \downarrow]$
	重复定位误差	$R_i \uparrow = 4S_i \uparrow$ $R_i \downarrow = 4S_i \downarrow$
JIS	定位误差	$A \uparrow = \max[X_j \uparrow]$ $A \downarrow = \max[X_j \downarrow]$
	重复定位误差	$R = \max[ X_j \uparrow - X_j \downarrow ]$
BS	定位误差	$A = \max[\bar{X}_i + 3S_i] - \min[\bar{X}_i - 3S_i]$
	重复定位误差	$R = \max[3S_i \uparrow - 3S_i \downarrow]$
VDI	定位误差	$A =  \bar{X}_{j\max} - \bar{X}_{j\min} $
	重复定位误差	$R = \max[\bar{X}_i + \frac{3(S_i \uparrow + S_i \downarrow)}{2} + \frac{U_i}{2}] - \min[\bar{X}_i - \frac{3(S_i \uparrow + S_i \downarrow)}{2} - \frac{U_i}{2}]$
GB	定位误差	$A = \max[\bar{X}_i \uparrow + 2S_i \uparrow, \bar{X}_i \downarrow + 2S_i \downarrow] - \min[\bar{X}_i \uparrow - 2S_i \uparrow, \bar{X}_i \downarrow - 2S_i \downarrow]$
	重复定位误差	$S_i \uparrow = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} \uparrow - \bar{X}_i \uparrow)^2}$

## 2 重复定位精度误差源辨识

精密线性平台的结构包括以下几类: 直线电动机驱动式、气浮/磁悬浮式、压电材料式等。市场上常使用高细分步距角步进电动机-滚珠丝杠-交叉滚柱导轨式的微米级精密线性平台, 通过电动机输出转矩, 引导滚珠丝杠副进行转动, 带动载物台水平运动, 达到从旋转运动转化为水平运动的目的, 结构部件如图 2 所示。

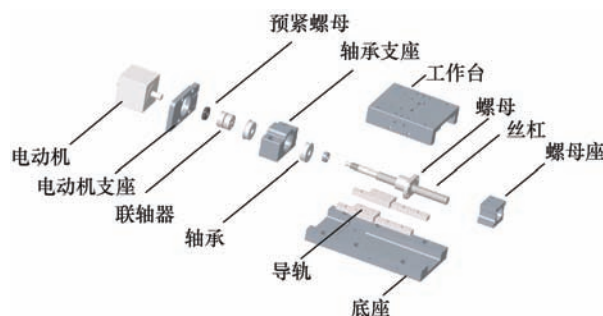


图2 精密线性平台结构图

影响精密线性平台重复定位精度的误差组成可分为几何误差部分与动态特性部分。几何误差主要包括零部件加工误差、安装误差与装配误差等; 动态特性部分则需分析精密线性平台动力学特性对位置偏差带来的影响。分类如表 2 所示。

表 2 影响精密线性平台重复定位精度的几何误差参数

误差类别	误差组成	参数
直接反映的误差项	电动机输出精度	$\sigma_1$
	滚珠丝杠副导程误差	$\sigma_2$
零件尺寸误差	轴承座 Z 向尺寸几何误差	$\delta_1$
	底座 Z 向尺寸几何误差	$\delta_2$
	螺母座 Z 向尺寸几何误差	$\delta_3$
零件装配误差	电动机-联轴器同轴度	$\lambda_1$
	联轴器-丝杠同轴度	$\lambda_2$
	丝杠-螺母座同轴度	$\lambda_3$
	丝杠-轴承同轴度	$\lambda_4$
	螺母座-载物台正交性	$\lambda_5$
	底座-导轨平行度	$\lambda_6$
	导轨-载物台平行度	$\lambda_7$

笔者已在相关论文中研究了精密线性平台误差传递过程<sup>[19]</sup>, 并建立了相应的误差模型。根据表 2 列出的误差项, 其几何误差建模流程如下所示

$$T_4 = P_0 \cdot I_m \cdot \prod_{i=1}^4 Q_{(i-1)i} \cdot \prod_{i=1}^2 Q_{6(6-i)} \quad (1)$$

$$P_4 = P_0 \cdot I_m \cdot \sum_{i=1}^4 Q_{(i-1)i} E_{(i-1)i} \cdot \sum_{i=1}^2 Q_{6(6-i)} E_{6(6-i)} \quad (2)$$

式中,  $T_4$ ,  $P_4$  分别表示平台理论位姿与实际位姿矩阵;  $P_0$  表示初始位姿矩阵;  $I_m$  表示输入量矩阵;  $Q_i$  表示图 4 中第  $i$  个组件尺寸矩阵;  $E_i$  表示第  $i$  个组件的误差矩阵。将上两式相减, 最终可得平台位姿实际偏差

$$E = P_4 - T_4 \quad (3)$$

式(3)为精密线性平台位姿精度的误差模型。

上述建模过程主要考虑几何误差项的传递规律和耦合影响。几何误差主要包括零件加工误差、装配误差等确定性误差, 而重复定位误差反映的是多次运动过程中的不确定性误差, 因此, 影响重复定位误差的因素不仅受到几何误差的影响, 零部件动态特性对精密线性平台运动过程的影响也非常显著。丝杠系统中的零部件包括联轴器、轴承、轴承座、联轴器、滚珠、螺母、螺母座、工作台, 其中的连接包括丝杠-滚珠-螺母, 轴承座-轴承-丝杠等, 上述零部件的弹性是导致形变

的重要因素, 需要严格考虑。此外, 零部件之间的摩擦也是动力学运动过程需要考虑的因素, 在精密线性平台中, 运动副如丝杠螺母副和滑块导轨副等, 其接触存在摩擦, 对运动过程产生影响。下文将详细展开精密线性平台动力学建模分析过程。

### 3 精密线性平台动态特性分析

精密线性平台机械结构模型为图 3 所示。

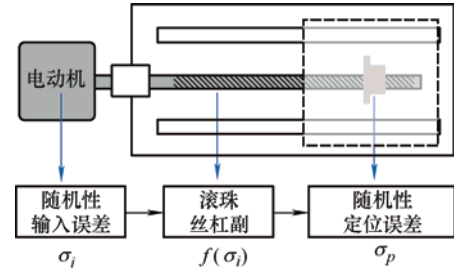


图 3 输入不确定引起定位误差不确定机理示意图

图 3 给出了以电动机角为输入、以滚珠丝杠为传动、以工作台位移为输出的滚珠丝杠系统示意图。在实际情况下, 定位误差的不确定性往往不等于输入误差的不确定性。为分析精密线性平台运动过程的动力学特性, 将图 3 考虑为弹簧-阻尼-摩擦模型, 如图 4 所示。输入代表电动机转动传递的位移。设等效刚度的弹簧为丝杠螺母和轴承丝杠的刚度  $k_{eq}$ ; 等效阻尼系数为  $c_{eq}$ ; 等效摩擦系数是  $f_{eq}$ 。

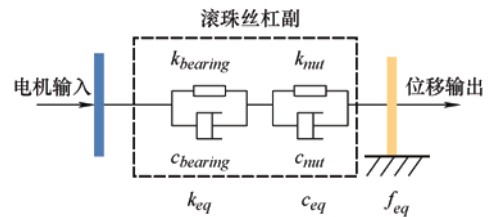


图 4 滚珠丝杠系统简化为弹簧阻尼摩擦系统的示意图

设精密线性平台滚珠丝杠系统的初始位置为原点, 系统的初始速度由电动机的步进信号产生, 标记为  $v_m$ 。由于摩擦方向与位移方向相反, 故动力学微分方程和初始条件为表示为式(4)。

$$\begin{cases} m_{eq}(x - \ddot{x}_m) + c_{eq}(x - \dot{x}_m) + k_{eq}(x - x_m) = -f_{eq} & \dot{x} > 0 \\ m_{eq}(x - \ddot{x}_m) + c_{eq}(x - \dot{x}_m) + k_{eq}(x - x_m) = f_{eq} & \dot{x} < 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_m \end{cases} \quad (4)$$

精密运动平台位移-时间关系如图 5 所示。



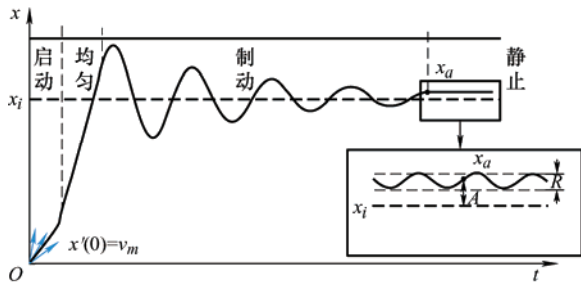


图5 考虑输入不稳定和摩擦作用下的滚珠丝杠系统输出的动力学过程

图5为系统运动过程的位移-时间线图,主要包括加速-匀速-振荡-停止环节。从初始点 $O$ 以速度 $v_m$ 启动加速,经匀速、减速,最终停在 $x_a$ 位置处。根据精度标准的定义,实际点 $x_a$ 与目标点 $x_i$ 之差为此次运动偏差。基于统计学规律,对于该系统而言,其最终位置区间遵循正态分布,上下限分别为 $(x_u, x_l)$ ,上下限与目标点的位置值之差 $A$ 为该运动系统在此行程下的定位误差(双向);若放大最终制动及停止过程的线图,该曲线的波动范围为该运动系统在此行程下的重复定位误差(双向),如图5右下角放大图所示。定位误差主要反映系统各项误差的耦合关系与传递过程,重复定位误差主要反映系统的不确定度与随机误差。

将系统静态位置的单边波动范围、系统固有频率 $\omega$ 定义为式(5)。

$$\begin{cases} \delta = f_{eq} / k_{eq} \\ \omega = \sqrt{k_{eq} / m_{eq}} \end{cases} \quad (5)$$

式中, $f_{eq}$ 为滚珠丝杠系统的极限摩擦。由于摩擦力的反向作用,目标点的加速度在每个极值点发生突变。在每个极值点,如果弹性力大于极限摩擦力,目标点可以继续运动。然而,如果弹性力小于极限摩擦力,目标点就停止运动。由于电动机的不稳定性,目标点将在波动范围内 $[x_m - \delta, x_m + \delta]$ ,带宽为 $2\delta$ 。

假设随机的定位误差服从图6所示的高斯分布。根据 $3\sigma$ 原理,定位误差的不确定度可以由滚珠丝杠系统的极限摩擦和等效刚度来计算,其表达式为式(6)。从式中可以推导出定位误差的不确定度与滚珠丝杠系统的极限摩擦成正比,与等效刚度成反比。

$$f_{eq} / k_{eq} = 3\sigma \quad (6)$$

由于重复精度 $R=4\sigma$

$$R = \frac{4}{3} f_{eq} / k_{eq} \quad (7)$$

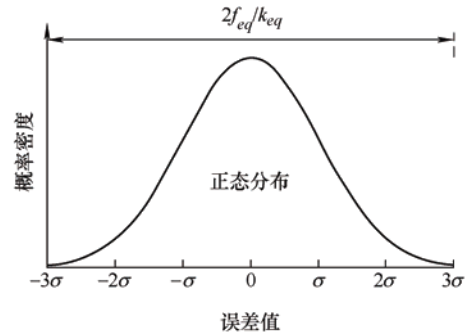


图6 滚珠丝杠系统误差概率密度的正态分布

从以上分析可知,若要准确预测重复定位精度及建立误差模型,需严格获取各组件的材料属性(如弹性模量,泊松比,阻尼系数,摩擦系数,密度等),结构,尺寸等物理参数,列出动力学方程,求解运动曲线。为建立动力学模型,针对各组件的刚度与配合副的摩擦特性,提出如下假设。

(1) 丝杠系统中的零部件包括联轴器、轴承、轴承座、联轴器、滚珠、螺母、螺母座、工作台,其中的连接包括联轴器-丝杠,丝杠-滚珠-螺母,轴承座-轴承-丝杠,螺母-螺母座-工作台。由于联轴器-丝杠等的刚度较高且连接方式为螺栓固定,因此可以视为刚性连接。而丝杠-滚珠-螺母连接和轴承座-轴承-丝杠连接方式复杂且包含柔性元件,其柔性动力学特性导致振动与变形,因此为建立模型需要考虑柔性连接处的刚度。

(2) 精密线性滑台的运动副主要为丝杠-螺母的配合,导轨-滑块的配合。由于大多工况下精密线性滑台处于匀速运动状态,因此主要考虑运动副之间的动摩擦。

### 3.1 丝杠副刚度计算

图7为丝杠、螺母和滚珠接触的示意图,假设只有滚珠存在弹性变形,滚珠全部相同且无几何误差。滚珠的法向力和变形之间的关系可以通过赫兹接触理论计算。在没有外部负载时,滚珠的初始状态法向力和变形之间的关系如公式所示

$$\begin{cases} P_b = P / (N \cdot \sin \alpha_1 \cdot \cos \beta) \\ N = n\pi d_s / (d_b \cdot \cos \beta) \\ \delta_1 = K_1 P_b^{2/3} \end{cases} \quad (8)$$

式中  $d_s, d_b$ ——丝杠和滚珠直径;

$\alpha_1$ ——滚珠和滚道的接触角;

$\beta$ ——丝杠的螺旋升角;

$N, n$ ——滚珠数和滚珠圈数;

$P_b$ ——滚珠和滚道法向力;

$P$ ——滚珠丝杠副额定动态负载;

$\delta_1$ ——滚珠法向接触变形;

$K_1$ ——赫兹接触系数。

$K_1$  由丝杠螺母的接触形貌和材料属性决定。可以通过下式计算

$$K_1 = \left( \frac{\cos \lambda}{z^2 \sin^5 \beta} \right)^{1/3} \left[ \frac{2K(e_{np})}{\pi m_{anp}} \sqrt[3]{\frac{1}{8} \left( \frac{3}{E_n'} \right)^2 \sum \rho_{np}} + \frac{2K(e_{sp})}{\pi m_{asp}} \sqrt[3]{\frac{1}{8} \left( \frac{3}{E_s'} \right)^2 \sum \rho_{sp}} \right] \quad (9)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{E_n'} = \frac{1-\nu_b^2}{E_b} + \frac{1-\nu_n^2}{E_n} \\ \frac{1}{E_s'} = \frac{1-\nu_b^2}{E_b} + \frac{1-\nu_s^2}{E_s} \end{cases} \quad (10)$$

式中  $E_n', E_s'$ ——当量弹性模量;

$\nu_b, \nu_n, \nu_s$ ——滚珠, 螺母和丝杠的泊松比;

$E_b, E_n, E_s$ ——滚珠, 螺母和丝杠的弹性模量;

$\rho_{sp}$ ——滚珠和丝杠滚道接触点的曲率和;

$P_{np}$ ——滚珠和螺母滚道接触点的曲率和;

$e_{sp}, m_{asp}$ ——和  $\rho_{sp}$  相关的系数;

$e_{np}, m_{anp}$ ——和  $\rho_{np}$  相关的系数。

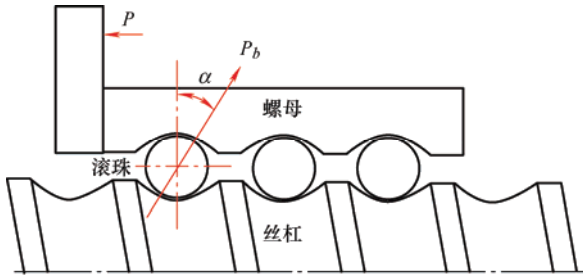


图 7 丝杠螺母副侧视图和内部滚珠受力情况示意图

根据每个滚珠法向力和变形的关系, 各滚珠的刚度  $k_b$  和丝杠螺母副的等效轴向刚度  $k_{nut}$  可以通过式(11)得到。

$$\begin{cases} k_b = \frac{P_b}{\delta_1} \\ k_{nut} = n \cdot \frac{\pi \cdot d_s}{d_b \cdot \cos \beta \cdot K_1} \cdot P_b^{1/3} \end{cases} \quad (11)$$

### 3.2 轴承刚度计算

图 8a 是两端通过轴承支撑的丝杠副的安装结构, 轴承是固定的, 内部滚珠视为弹性。由图 8b 知轴承部分的刚度和预紧力  $F_{pre}$  相关。类似于上述丝杠副内部滚珠受力情况, 轴承内滚珠法向力可以通过下式  $F$  计算

$$\begin{cases} F = \frac{F_{pre}}{N_2 \cdot \sin \alpha_2} \\ \delta_2 = K_2 F^{2/3} \end{cases} \quad (12)$$

式中  $\delta_2$ ——滚珠法向接触变形;

$K_2$ ——赫兹接触系数;

$N_2$ ——轴承内部滚珠总数;

$\alpha_2$ ——滚珠和轴承接触角。

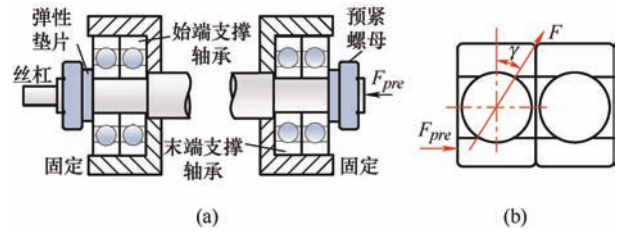


图 8 两端通过轴承支撑的丝杠副的安装结构和轴承中滚珠法向力示意图

因此, 每个滚珠的刚度  $k_{bb}$  及轴承轴向等效刚度

$k_{bearing}$  可由下式计算

$$\begin{cases} k_{bb} = \frac{F}{\delta_2} \\ k_{bearing} = N_2 F^{1/3} / K_2 \end{cases} \quad (13)$$

其中由于丝杠系统的刚度可以简化为轴承刚度和丝杠副刚度的共同作用, 其等效刚度如式(14)。

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_{bearing}} + \frac{1}{k_{nut}} \quad (14)$$

### 3.3 滚珠丝杠副摩擦力矩

根据滚珠丝杠副的工作原理及运动特点, 其摩擦力矩主要来源于: ① 滚珠与螺旋滚道面间的摩擦, 包括弹性变形引起的摩擦、差动滑动摩擦; ② 滚珠间的滑动摩擦; ③ 润滑剂的黏滞阻力。

(1) 如图 9 所示在轴向工作载荷  $Q$  作用下, 滚珠丝杠副将在其接触面处产生弹性变形, 因接触面变形的弹性迟滞现象的存在, 造成滚珠因不平衡接触力而形成的滚动阻力矩。

$e$  为接触滚道圆弧的偏心距, 在接触变形的极限情况下  $e=b/2$ , 则单个接触点处弹性滞后所引起的摩擦力矩为<sup>[9]</sup>

$$M_r = \frac{b}{2} Q \gamma = m_b \gamma^3 \sqrt{\frac{3Q^4}{16E \sum \rho}} \quad (15)$$

式中  $\gamma$ ——弹性滞后系数;

$m_b$ ——单个滚珠质量;

$E$ ——滚珠弹性模量;

$\rho$ ——滚珠和滚道接触曲率。

滚珠在接触椭圆变形面的中间部分及两侧将出现差动滑动, 从而存在差动滑动摩擦。因此, 结合相关研究文献可知因差动滑动所引起的摩擦力矩可由下式表示

$$M_c = \frac{0.04\mu_s Q a^2 d_1}{(f d_b)^2} (f+1)^2 \quad (16)$$

式中  $\mu_s$ ——滑动摩擦系数;  
 $a$ ——接触椭圆的长半轴;  
 $d_1$ ——接触点处直径;  
 $f$ ——滚道曲率半径系数。

(2) 在丝杠滚道中运动的滚珠, 滚珠之间相互接触点处的相对滑动速度是其滚动线速度的两倍。由于滚珠丝杠副运行时内部的滚珠存在着彼此间的正压力, 因而会造成滚珠间的滑动摩擦, 其摩擦力矩  $M_b$  可由下式表示

$$M_b = \frac{1}{2} d_b \mu_b F_b \quad (17)$$

式中  $d_b$ ——滚珠直径;  
 $\mu_b$ ——滚珠与滚道间摩擦系数;  
 $F_b$ ——滚珠与滚珠间正压力。

(3) 由于滚珠丝杠副润滑剂的黏滞摩擦原理上和滚动轴承的黏滞摩擦相似, 可以参考帕姆格林的滚动轴承摩擦力矩的实验测量结果, 该理论提出了润滑剂的黏滞阻力所产生的摩擦力矩  $M_R$  的计算式

$$M_R = 10^{-7} f_0 (vn)^{\frac{2}{3}} d_b^3 \quad (18)$$

式中  $f_0$ ——与机械结构类型和润滑状态相关的系数;  
 $v$ ——润滑剂的黏度;  
 $n$ ——丝杠轴转速。

基于上面的对滚珠丝杠副各部分的摩擦力矩分析(图 9)可以得到: 滚珠丝杠副总摩擦力矩主要由滚珠与滚道间的接触摩擦  $M_T$ , 差动滑动摩擦  $M_C$ 、滚珠间的摩擦力矩  $M_B$  和润滑剂的黏滞摩擦力矩  $M_R$  等部分构成。故丝杠副的总摩擦力矩可由其所构成的这几项摩擦力矩叠加而成

$$M = \sum_{i=1}^Z M_T + \sum_{i=1}^Z M_C + \sum_{i=1}^Z M_B + M_R \quad (19)$$

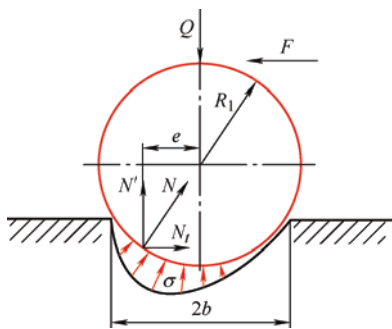


图 9 滚珠丝杠副弹性变形引起的摩擦阻力矩示意图

### 3.4 直线导轨摩擦

由于直线导轨与滑块的接触为平动约束, 精密

线性平台在大多工况中处于匀速运动, 假设精密线性平台直线导轨摩擦力  $f_g$  为库仑摩擦, 可通过下式表示

$$f_g = \mu_g m_T g \quad (20)$$

式中  $\mu_g$ ——直线滑轨摩擦系数;  
 $m_T$ ——精密线性平台工作台质量;  
 $g$ ——重力加速度。

精密线性平台的摩擦主要由于滚珠丝杠副的摩擦力矩和直线滑轨的滑动摩擦力合成。因此精密线性平台的等效摩擦  $f_{eq}$  可由下式表示

$$f_{eq} = M \cdot \eta + f_g \quad (21)$$

式中  $\eta$ ——滚珠丝杠传动比。

综上所述, 若计算系统微行程重复定位精度的数值, 需考虑几何误差与动力学特性的影响, 包括加工误差、装配误差的传递路径, 以及微行程下各部件的刚度及配合副的摩擦特性, 通过综合公式(1)~(4)、(14)和(21), 推导出精密线性平台重复定位误差数学模型。

## 4 重复定位精度测量试验

前文推导得到精密线性平台动力学模型, 并构建系统动态特性与重复定位精度的数学关系。根据 ISO230-2 精度标准, 采用激光干涉仪测量精密线性平台的重复定位精度, 如图 10 所示。

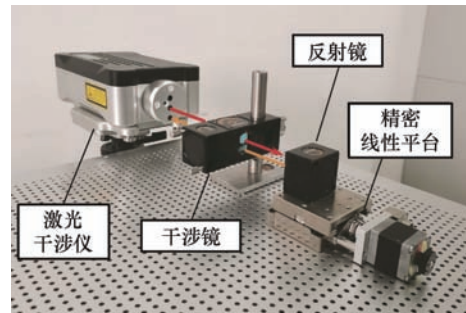


图 10 重复定位精度测量试验装置分布图

测量试验在恒温恒湿条件下的隔震平台进行, 其中线性测距设备采用 Renishaw 公司 XL-80 型激光干涉仪, 系统精度  $\pm 0.5$  ppm ( $0 \sim 40$  °C), 分辨率  $0.001 \mu\text{m}$ , 最大测量速度  $4.0 \text{ m/sec}$ , 最高采样频率  $50 \text{ kHz}$ ; 待测精密线性平台自重  $0.78 \text{ kg}$ , 最大行程  $20 \text{ mm}$ , 单向定位精度  $5 \mu\text{m}$  以内, 重复定位精度  $1 \mu\text{m}$  以内, 最小位移分辨率  $1 \mu\text{m}$ , 最大运行速度  $20 \text{ mm/sec}$ 。根据精密线性平台的机械结构、材料属性与工作特点, 其各项物理参数如表 3 所示<sup>[20]</sup>。



表 3 精密线性平台动力学模型参数

物理参数	数值
滚珠和丝杠接触角 $\alpha_1/\text{rad}$	$\pi/4$
丝杠的螺旋升角 $\beta/\text{rad}$	0.03
丝杠直径 $d_s/\text{mm}$	7.2
滚珠直径 $d_b/\text{mm}$	0.8
丝杠副滚珠圈数 $n$	5
滚珠丝杠副额定负载 $P/\times 10^4 \text{ N}$	1.2
丝杠副赫兹接触系数 $K_1$	0.05
轴承内部滚珠总数 $N_2$	12
滚珠和轴承接触角 $\alpha_2/\text{rad}$	$\pi/12$
轴承赫兹接触系数 $K_2$	0.01
润滑状态相关的系数 $f_0$	0.008
滚珠与滚道间摩擦系数 $\mu_b$	0.005
丝杠轴转速 $n/(\text{r}/\text{min})$	30
滚珠丝杠传动比 $\eta$	$1:2\pi$
预紧力 $F_{pre}/\times 10^3 \text{ N}$	3.1
直线滑轨摩擦系数 $\mu_g$	0.003
工作台质量 $m_T/\text{kg}$	0.1

平台运动行程常分为宏行程(1 mm)、小行程(<100  $\mu\text{m}$ )和微行程(1  $\mu\text{m}$ )。根据式(4), 首先以宏行程为观测指标, 计算得出重复定位精度的数值为  $R=0.60 \mu\text{m}$ 。

图 11 为以 1 mm 为间隔, 分别测量 10~20 mm 行程下重复定位误差的分布区间。

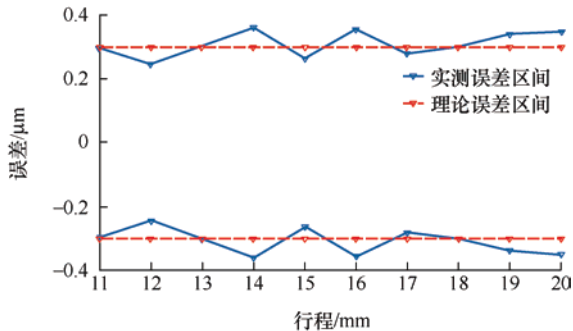
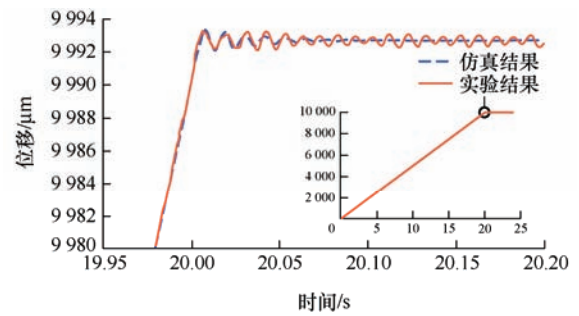


图 11 10~20 mm 行程下重复定位精度的数值

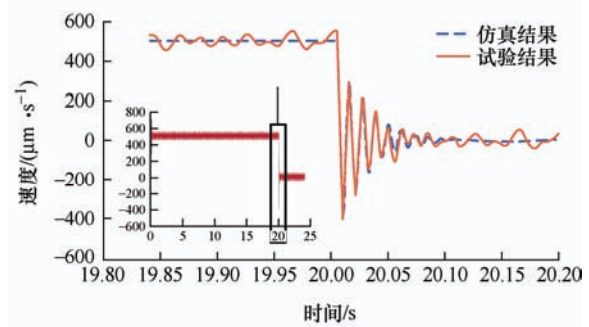
从图 11 中看出, 根据误差模型求得的计算值和测量值非常接近。若对仿真结果和实验结果进行相似度计算, 其 Spearman 相关系数为  $r_s = 0.9970$ , 有很高的相似度, 表明式(4)可很好地用于预测精密线性平台重复定位精度。理论区间(红线)是通过统计学得出, 因此为两条水平线; 实际区间存在一定波动范围, 因此为折线, 但幅度很小。

图 12a 为恒定速度下的 10 mm 行程位移-时间曲线, 其曲线前 20 s 内包含加速与匀速运动, 在 20 s 附近时局部放大图出现振荡且振荡逐渐衰弱至位移

1 mm  $\pm 7.3 \mu\text{m}$  处。前 20 s 内, 由于步进电动机的驱动力为均匀的脉冲信号, 使得平台运动逐渐接近匀速, 如图 12b, 可以看出曲线中前的速度在 0.5 mm/s 附近波动且逐渐平稳。在 20 s 时, 电动机开始制动, 丝杠系统由于存在初始速度继续进行做衰减的振荡运动。最终静止于偏离目标位置的  $-7.3 \mu\text{m}$  (误差均值  $7.3 \mu\text{m}$ ) 附近。同时从位移曲线和速度曲线对比可看出测量结果与动力学仿真结果接近。



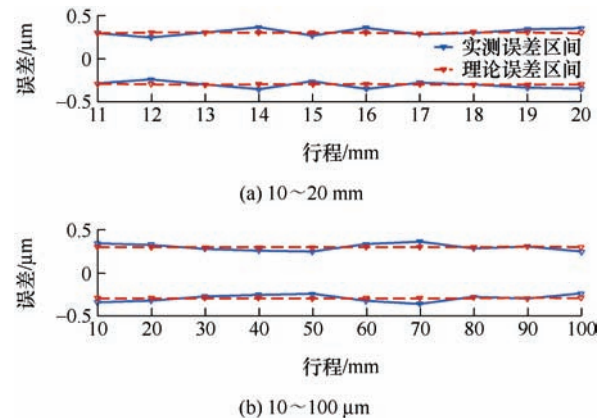
(a) 位移-时间



(b) 速度-时间

图 12 10 mm 行程下位移-时间及速度-时间结果对比图

考虑在精密工程中存在大量的小行程与微行程, 特别是在光电子封装和机器人运动控制领域, 因此需着重研究不同行程尺度下重复定位精度的数值变化。以小行程 100  $\mu\text{m}$  为例, 测量其重复定位精度数值, 结果与 10 mm 宏行程组对比, 如图 13 所示。

图 13 10~100  $\mu\text{m}$  & 10~20 mm 行程下误差分布区间



可以看出:  $10\sim 100\ \mu\text{m}$  行程下误差分布区间带宽为  $0.6\ \mu\text{m}$ , 和  $10\sim 20\ \text{mm}$  带宽非常接近, 且和模型计算结果接近, 表明重复定位精度的数值与行程大小无直接关系, 主要由几何误差、材料属性等因素决定。这是重复定位精度与定位精度在行程-误差曲线下的显著区别, 可印证图 1 结论。

为进一步验证动力学特性与重复定位精度的数学关系, 根据动力学分析建立的已有模型, 模拟描绘运动系统  $100\ \mu\text{m}$  下位移-时间变化曲线, 如图 14a 所示, 同时, 测量  $100\ \mu\text{m}$  行程下速度-时间变化曲线, 如图 14b 所示。

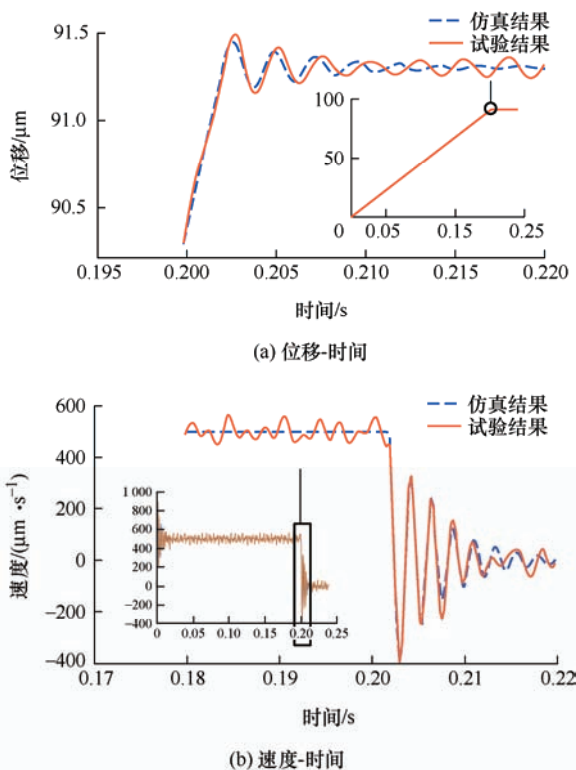


图 14  $100\ \mu\text{m}$  行程下位移-时间及速度-时间结果对比图

图 14a 为位移-时间曲线, 其曲线前  $0.2\ \text{s}$  内为匀速运动, 在  $0.2\ \text{s}$  附近时出现振荡且逐渐衰弱。步进电动机驱动力为均匀的脉冲信号, 使得平台运动匀速如图 14b。在  $0.2\ \text{s}$  时, 电动机开始制动, 丝杠系统由于存在初始速度继续进行做衰减的振荡运动, 最终静止于偏离目标位置的  $91.3\ \mu\text{m}$  (误差均值  $-8.7\ \mu\text{m}$ ) 附近, 与仿真结果接近。

以微行程  $1\ \mu\text{m}$ , 测量重复定位精度, 结果与  $10\ \text{mm}$  宏行程组和  $100\ \mu\text{m}$  小行程组对比, 如图 15 所示。可以看出  $1\sim 10\ \mu\text{m}$  行程下误差分布区间和宏行程小行程基本相同, 且在模型计算结果  $0.6\ \mu\text{m}$  相吻合, 进一步表明重复定位精度数值与宏、小、微行程无直接关系。

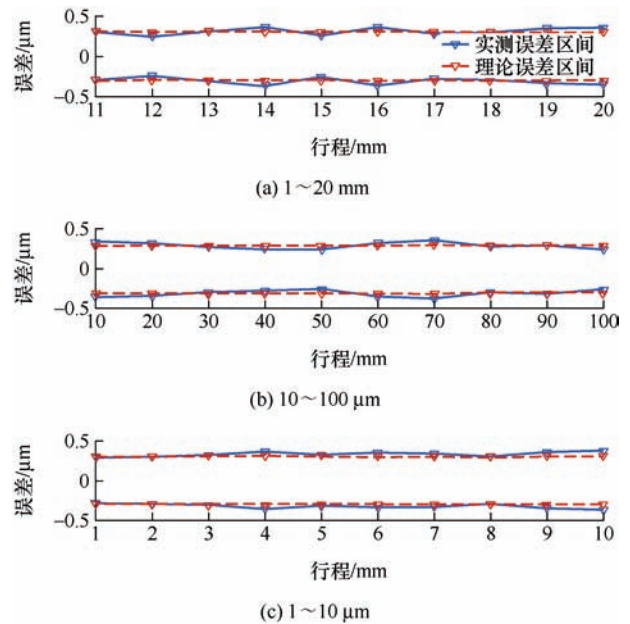


图 15 三种行程下重复定位精度的数值

$1\ \mu\text{m}$  行程下位移-时间关系的仿真曲线与测量结果如图 16 所示。图 16a 是位移  $1\ \mu\text{m}$  的位移时间曲线, 该曲线经过短暂的时间到达  $1\ \mu\text{m}$  附近, 由于位移短, 系统速度上升到  $0.4\ \text{mm/s}$  开始制动。在之后由于存在初始速度继续进行做衰减的振荡运动。最终静止于偏离目标位置的  $0.8\ \mu\text{m}$  (误差均值  $-0.2\ \mu\text{m}$ ) 附近。同样, 图 16b 中的速度时间的仿真结果与测量结果非常接近。

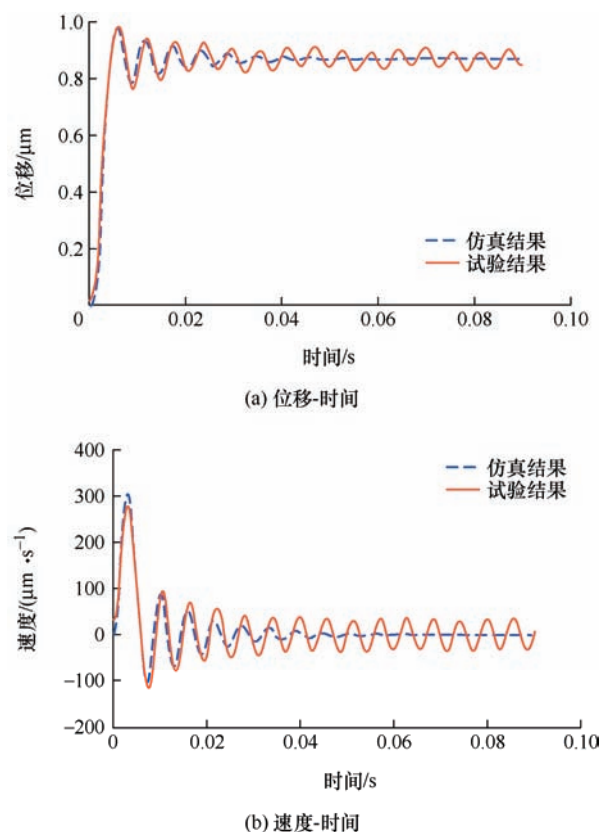


图 16  $1\ \mu\text{m}$  行程下位移-时间及速度-时间结果对比图

宏行程到微行程的重复定位精度测量结果表明, 不同行程下精密线性平台的重复精度基本保持不变, 且与动力学模型的重复精度数值大小非常接近。由于动力学特征在制动阶段较为明显, 对比微行程的动力学位移时间曲线的仿真和试验, 两曲线过冲量和震荡波形十分相似, 证明了本方法不仅可用于精确预测运动系统重复定位精度, 解释了重复精度的形成机理, 为重复精度的改善提供了指导。

## 5 试验数据分析与讨论

本论文动力学模型可用于精确计算运动系统重复定位精度数值, 利于开展误差预测和补偿研究。第四章的宏、小、微行程下关于重复定位精度的试验验证了不同行程下精度模型的准确性, 通过对重复精度的改善可在全行程提高系统精度。

根据前文可知, 若考虑重复定位精度的动态特性, 需要严格分析材料刚度和配合副摩擦的影响。刚度主要受柔性连接丝杠副配合和轴承——丝杠连接的影响。将图 17 中的 C7 丝杠替换为同型号不同等级的 C3 丝杠, 其中两丝杠的物理参数除预紧力外完全相同, 两丝杠的物理参数在表 4 中列出。

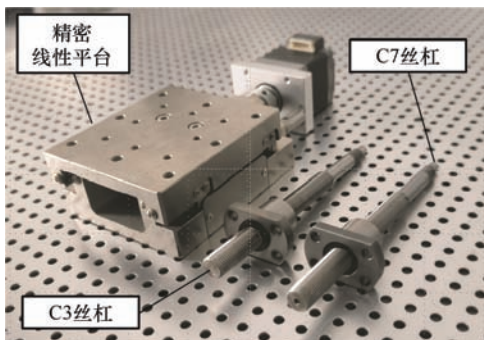
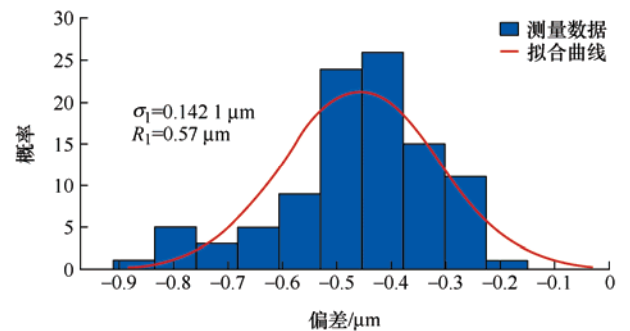


图 17 精密线性平台不同精度等级滚珠丝杠实物图

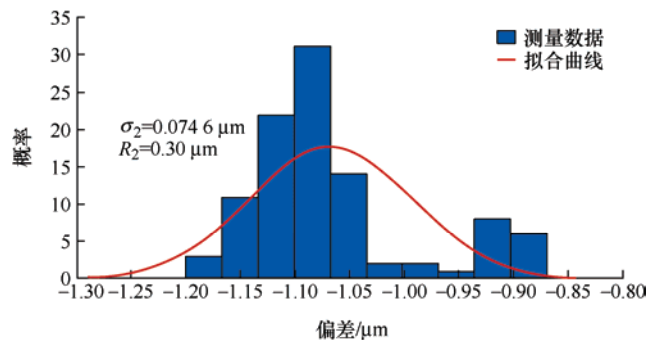
表 4 C3 和 C7 等级丝杠物理参数对比表

物理参数	C3 丝杠数值	C7 丝杠数值
滚珠和丝杠接触角 $\alpha_1/\text{rad}$	$\pi/4$	$\pi/4$
丝杠的螺旋升角 $\beta/\text{rad}$	0.03	0.03
丝杠直径 $d_s/\text{mm}$	7.2	7.2
滚珠直径 $d_b/\text{mm}$	0.8	0.8
丝杠副滚珠圈数 $n$	5	5
300 mm 误差容许值 $e_{300}/\mu\text{m}$	8	50
$2\pi$ rad 误差容许值 $e_{2\pi}/\mu\text{m}$	6	—
滚珠丝杠副额定载荷 $P/\times 10^4 \text{ N}$	9.6	1.2

图 18a 是内置 C7 丝杠的精密定位平台的误差分布图, 其概率分布标准差为  $\sigma_1=0.172 \text{ } 1 \mu\text{m}$ ,  $R_1=0.57 \mu\text{m}$ 。图 18b 是内置 C3 等级丝杠的精密定位平台的误差分布图, 可以看出其误差分布区间减小。 $\sigma_1=0.074 \text{ } 6 \mu\text{m}$ ,  $R_1=0.30 \mu\text{m}$ 。这是由于 C3 等级丝杠的预紧力大于 C7 丝杠, 因此内置 C3 丝杠的精密定位平台的刚度较高, 而根据公式  $R = \frac{4}{3} f_{eq} / k_{eq}$  可知, 重复精度和刚度负相关, 该部分实验验证了通过调整精密定位平台刚度减小重复定位精度数值的思路。



(a) C7丝杠精密线性平台重复定位误差分布图



(b) C3丝杠精密线性平台重复定位误差分布图

图 18 两种等级丝杠传动下的精密平台的重复精度对比

## 6 结论

(1) 精密线性平台的定位不确定度主要受到运动系统的刚度和摩擦的影响, 重复精度的数值与位移大小无直接关系, 与系统等效轴向摩擦成正比, 与刚度成反比, 已通过仿真与试验结果对比验证。

(2) 精密线性平台运动过程的位移时间函数可以通过刚度——摩擦模型进行计算, 精密线性平台的重复精度可以通过调节系统刚度进行提升, 试验表明计算结果和试验测量结果十分接近, 为研究精密线性平台微行程下的误差理论和精度提升提供了新的方法。

## 参 考 文 献

- [1] TANG H, DUAN JA, ZHAO Q. A systematic approach on analyzing the relationship between straightness & angular errors and guideway surface in precise linear stage[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2017, 120: 12-19.
- [2] ZHANG P, CHEN Y, ZHANG C, et al. Influence of geometric errors of guide rails and table on motion errors of hydrostatic guideways under quasi-static condition[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2018, 125: 55-67.
- [3] MAJDA P, POWALKA B. Rapid method to determine accuracy and repeatability of positioning of numerically controlled axes[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2019, 137: 1-12.
- [4] 王丽娜, 田文杰, 张大卫, 等. 数控机床几何精度设计指标确定方法研究[J]. 机械工程学报, 2020, 56(1): 167-174.
- WANG Lina, TIAN Wenjie, ZHANG Dawei, et al. Research on determination method of geometric accuracy design index of CNC machine tools[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(1): 167-174.
- [5] ISO 230-2: 2014(E). Test code for machine tools – Part 2: Determination of accuracy and repeatability of positioning of numerically controlled axes[S]. Switzerland: International Standard Organization, 2014.
- [6] ASME B5.54-2005. Methods for performance evaluation of computer numerically controlled machining centers[S]. New York: American Society of Mechanical Engineers, 2005.
- [7] GB/T 17421.2-2000. 机床检验通则 第2部分: 数控轴线的运动精度和重复运动精度的确定[S]. 北京: 国家质量技术监督局, 2000.
- GB/T 17421.2-2000. Test code for machine tools – Part 2: Determination of accuracy and repeatability of positioning numerically controlled axes[S]. Beijing: National Bureau of Quality and Technical Supervision, 2000.
- [8] SUN G, HE G, ZHANG D. Effects of geometrical errors of guideways on the repeatability of positioning of linear axes of machine tools[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2018, 98(9-12): 2319-2333.
- [9] TRZEPICIŃSKI T, KLUZ R. The repeatability positioning analysis of the industrial robot arm[J]. Assembly Automation, 2014, 34(3): 285-295.
- [10] AGUADO S, PEREZ P, ALBAJEZ J A. Study on machine tool positioning uncertainty due to volumetric verification[J]. Sensors (Basel), 2019, 19(13): 2847.
- [11] 黄涛, 杜双江, 张钎, 等. 滚珠丝杠传动系统线性变参数动力学模型试验建模方法[J]. 机械工程学报, 2022, 58(9): 98-106.
- HUANG Tao, DU Shuangjiang, ZHANG Qian, et al. Experimental modeling of linear parameter varying dynamics model of ball screw drive system[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2022, 58(9): 98-106.
- [12] FREY S, DADALAU A, VERL A. Expedient modeling of ball screw feed drives[J]. Production Engineering, 2012, 6(2): 205-211.
- [13] LI F, JIANG Y, LI T. Compensation of dynamic mechanical tracking errors in ball screw drives[J]. Mechatronics, 2018, 55: 27-37.
- [14] ZHANG H, LIU H, DU C. Dynamics analysis of a slender ball-screw feed system considering the changes of the worktable position[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2018, 233(8): 2685-2895.
- [15] ZHANG J, ZHANG H, DU C. Research on the dynamics of ball screw feed system with high acceleration[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2016, 111: 9-16.
- [16] JIS B6336-1-2000. Test conditions for machining centers-Part1: Geometric tests for machines with horizontal spindle and with accessory heads[S]. Tokyo: Japanese Industrial Standard, 2000.
- [17] BS 3800: Part 2: 1991. General tests for machine tools. Statistical methods for determination of accuracy and repeatability of machine tools[S]. British Standard, 1991.
- [18] VDI/DGQ 3441: 2008. Statistical examination of exactly working and positioning of machine-tools fundamental[S]. Berlin: Verein Deutscher Ingenieure/Deutsche Gesellschaft für Qualität, 2008.
- [19] 唐皓, 张栋, 张贺, 等. 基于“误差流”理论的精密线性平台微行程定位精度表征方法[J]. 机械工程学报, 2023, 59(13): 49-58.
- TANG Hao, ZHANG Dong, ZHANG He, et al. Positioning accuracy characterization approach in micro-scale displacement for precise linear stage based on stream of variation theory[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2023, 59(13): 49-58.
- [20] Suruga Seiki Corporation. Suruga fiber alignment information: Alignment system[EB/OL]. <http://eng.surugaseiki.com/alignment>.

作者简介: 唐皓, 男, 1988 年出生, 副教授, 硕士研究生导师。主要研究方向为复杂精密系统误差分析。  
E-mail: tanghao@hnust.edu.cn